Realização
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

UM NOVO PARADIGMA NO ENSINO E APRENDIZAGEM DAS FRAÇÕES

Nilza Eigenheer Bertoni
Universidade de Brasília nilzab@conectanet.com.br

Introdução

O tema frações tem sido apontado pelos professores como um dos mais problemáticos na aprendizagem da matemática das séries iniciais. As avaliações nacionais do rendimento do aluno têm demonstrado baixo índice de acertos nesse tema.

Considerando a dificuldade do tema e outras prioridades curriculares, documentos oficiais têm diminuído a ênfase em frações, nas séries iniciais. É o caso dos Parâmetros Curriculares Nacionais, cujas orientações vão no sentido de eliminar das séries iniciais as operações com números racionais na representação fracionária. A matriz de descritores da 4ª série do SAEB – Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica, MEC/INEP - também não inclui essas operações. Por outro lado, não se nota, de modo geral, nos livros e nas propostas curriculares de 5ª a 8ª série, mudanças no sentido de uma introdução mais cuidadosa às frações e às operações entre elas, visando suprir essa lacuna deixada nas séries iniciais.

Isso nos leva à constatação de que o espaço para a aprendizagem desses números nas séries iniciais foi diminuído e não houve ganho de espaço nas séries finais. .

Entretanto, o entendimento do número racional é relevante na matemática e na sócio-cultura. É importante a construção da idéia desse número, compreendendo o quê quantifica e a que vem, e tendo presente que ele se desdobra em duas representações igualmente importantes – a decimal e a fracionária. A representação decimal tem maior presença em nossa sócio-cultura, a representação fracionária tem uso consagrado em razões, escalas, porcentagens, probabilidade. Além disso, em particionamentos da unidade, as representações fracionárias podem ser mais adequadas, sendo mais natural, por exemplo, falar em ¼ da pizza do que em 0,25 da pizza.

Ainda que facetas de um mesmo número, as duas representações são, geralmente, tratadas de modo estanque, como se dissessem respeito a números diferentes – *números* *decimais* e *frações*. Isto é, confundem-se o número e suas representações. Por estarem presentes nas quantias monetárias e nas medidas, as representações decimais tendem a ser mais aceitas pelos alunos; o que é reforçado pelo fato de os cálculos feitos com as representações decimais apresentarem bastante analogia com os cálculos feitos com números naturais. Já as representações fracionárias aparecem raramente em situações culturais, são insolitamente constituídas de dois números naturais e um traço separando-os; os cálculos são tão diferentes que nem parecem tratar-se de operações com os mesmos significados daquelas entre números naturais.

A estranheza frente aos cálculos usuais com números fracionários ficou evidenciada na manifestação de uma professora, quando desenvolvemos um processo alternativo de divisão de frações, usando um denominador comum:

$$3\frac{1}{3} \div \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \div \frac{2}{3} = 10 \div 2 = 5$$

O processo se justifica porque, se temos 10 pedaços - do tipo terços - e queremos separá-los de 2 em 2, o processo mental subjacente é o mesmo de quando se quer formar grupos de 2 com a quantidade 10, obtendo-se 5 grupos. Nessa ocasião, uma professora comentou: *"Ah, agora vi que existe mesmo divisão de fração. Porque antes falavam que era divisão, mas, na verdade, era uma multiplicação".*

O estudo

Nossos estudos têm sido focalizados na representação fracionária, que oferece maior dificuldade. Eles se concentram na formação do conceito do número fracionário, nas relações conceituais entre esses números e na articulação dessas relações com as representações fracionárias.

Tradicionalmente, três modelos têm sido adotados no ensino e aprendizagem de frações: o modelo discreto; as figuras geométricas, principalmente quadrados, retângulos e círculos; e a representação na reta numérica. Desses, ganha de longe, em freqüência, o uso de figuras geométricas.

Sabendo que o homem construiu a matemática a partir de suas necessidades, alguns questionamentos que se põem, relativos ao processo de introdução das frações, são:

- Há alguma necessidade infantil que gere o processo escolar de dividir e pintar figuras geométricas?
- Ao atribuir nomes e símbolos às partes das figuras, esses novos objetos são assimilados como números a serem acrescentados aos números naturais?

- esse processo é uma contextualização ou apenas uma concretização, usando modelos abstratos?
- a simultaneidade da introdução desses modelos com a nomenclatura e as representações, não deixa de lado a formação anterior da idéia desse número, no nível vivencial e mental?

Dois resultados respondem parcialmente a essas perguntas.

Nunes e Bryant (1997, p.191) afirmam que (no processo de dividir e pintar):

As crianças são informadas que o número total de partes é o denominador, então, o número de partes pintadas é o numerador. Esta introdução, junto com algumas poucas regras para calcular, permitem que as crianças transmitam a impressão de que sabem muito sobre frações.

....

No entanto, diversas partes de pesquisa demonstraram que a impressão de crianças raciocinando com sucesso sobre frações poderia ser falsa.

Um outro resultado foi obtido em sessões com crianças feitas no Laboratório de Ensino de Matemática, na Universidade de Brasília (Bertoni, p. 28-29). O desenvolvimento dos conhecimentos ocorriam antes que elas os tivessem visto na escola. Noções iniciais de frações e operações intuitivas ligadas a situações do cotidiano eram exploradas com o uso da linguagem verbal e a escritas correspondentes, como:“1 inteiro – 1 quarto = 3 quartos”. O grupo reagia muito bem e não demonstrava dificuldade. Após um período de férias, as crianças retornaram ao laboratório, já estando freqüentando a escola. Foi impressionante constatar o estrago cognitivo que essas semanas na escola causaram às crianças, com o início da aprendizagem de frações, associada à simbologia e à nomenclatura. Elas mostravam desconhecimento e confusão, e só lentamente resgataram o que haviam compreendido anteriormente, descobrindo conexões entre o que entendiam e o complexo universo simbólico visto na escola.

Comparando a aprendizagem das frações com a dos números naturais, vemos que, nesses últimos, são necessários vários anos de vida para a sedimentação da compreensão de alguns números iniciais. Embora essa aprendizagem se inicie por volta de 1 ano e meio, muitas crianças chegam aos 6 ou sete anos sabendo apenas identificar, nomear e comparar quantidades até 6 ou 8, ainda que possam recitar, oralmente, a seqüência numérica até números bem maiores, ou mesmo ler símbolos como 100 ou 1000. Se isso ocorre com os números naturais, que povoam nossa sócio-cultura e com os quais a criança entra em contato diariamente, por que deveria ser diferente com os números fracionários, pouco presentes no cotidiano, e com os quais a criança pouco ou nenhum contato tem? No entanto, no processo escolar, isso não é levado em conta: as frações são introduzidas na 3ª série e, em algumas páginas dos livros didáticos, são introduzidos os nomes de todas as frações, as representações numéricas correspondentes e a nomenclatura de tipos especiais de frações. Ou seja, espera-se que, aproximadamente em uma semana, a criança esteja compreendendo esse novo campo numérico.

Essas constatações e interrogações surgiram ao longo de anos de trabalho com frações e crianças. Na verdade, o título desta palestra deveria ser: *A gestação de um novo paradigma para o ensino e a aprendizagem do número fracionário.* Etapas que ocorreram antes do paradigma atual que temos consistiram, uma, no foco em que os alunos conseguissem abstrações reflexivas a partir dos modelos geométricos; outra, na ênfase em objetos da realidade que se apresentam particionados igualmente ou que são suscetíveis de um tal particionamento.

A gestação durou cerca de 15 anos. Optamos por descrever esse processo, por algumas razões. Uma delas é que ele explica as origens e a história da investigação pedagógica que, no nosso caso, geraram esse novo paradigma; outra, é que a apresentação de etapas anteriores da gestação podem oferecer idéias ao professor para a construção de seu próprio caminho no sentido de mudanças em sua ação pedagógica, até o paradigma atual. A terceira é criar condições para o entendimento desse paradigma. Começamos, então, pelo início de tudo.

As experiências didáticas sobre ensino e aprendizagem de números fracionários no Laboratório de Ensino da UnB

Realizamos as primeiras investigações sobre o ensino e a aprendizagem do número fracionário por volta de 1987, no âmbito de um projeto financiado pelo SPEC-Subprograma Educação para a Ciência. Nossos eixos de referência eram o sócio-cultural, o epistemológico e o cognitivo. As pesquisas pedagógicas e resultados obtidos foram um ponto de partida para o desenvolvimento das investigações posteriores, que se desenvolvem até hoje. Naquela época, trabalhamos principalmente com o modelo de particionamento da unidade, com algumas incursões na divisão. O particionamento, embora referido a situações do cotidiano, ainda era explorado com forte apoio em material didático manipulativo - fichas ou canudos, os mesmos materiais que haviam servido de recurso no ensino de números naturais. Eles representavam partes dos mesmos objetos aos quais o material inteiro se referia. Esse era um ponto que considerávamos, e ainda consideramos, importante – conservar os modelos de referência, por meio do que os alunos percebem que as coleções quantificáveis podem ser constituídas de objetos (unidades) inteiros e também de parte deles. Ou seja, ficava garantida a idéia do acréscimo de outros números aos números naturais.

Famílias de partes foram introduzidas, com a construção inicial das próprias crianças – dividir bolo, fichas ou canudos em duas partes iguais, depois cada uma novamente em duas, e mais uma vez, obtendo metades, quartos e oitavos. Em cada etapa era questionado quantas de cada uma faziam o todo, o que levava à nomeação das mesmas: se eram quatro, cada uma era o quarto; se eram oito, cada uma era o oitavo. Também trabalhamos as famílias dos *terços-sextos-dozeavos* e dos *quintos-décimos-vinteavos.*

A linguagem usada era a língua materna, oral ou escrita. Houve evidências de que as situações e os novos conhecimentos tinham significado e eram compreendidos pelas crianças. Por exemplo, frente à questão - o que é maior: 2 terços *de uma coisa* ou 3 quartos *da mesma coisa*? - uma criança respondeu prontamente 3 quartos, enquanto outras pegavam materiais para verificar. Questionada se não queria também pegar material, a aluna disse que não e argumentou do seguinte modo: *se eu como 2 terços do bolo, sobra 1 terço. Se como 3 quartos, sobra 1 quarto. 1 quarto é menor do que 1 terço. Quando sobra menos, é porquê eu comi mais.* Outra vez, a mesma aluna, frente à pergunta: quanto dá *5 terços menos 1 sexto*, respondeu: *4 terços e meio,* seguida de um momento pensativo e de uma aprovação dos demais. Foi um outro que nos explicou: *1 sexto é metade de 1 terço. Tem 5 (terços), se tira metade, ficam 4 e meio.*

Trabalhamos também com situações de divisão, que surgiam naturalmente. Uma delas foi a divisão de 3 laranjas para duas crianças. A resposta das crianças foi *uma e meia,* ou *uma e uma metade*. Solicitadas a fazerem essa divisão por escrito, as crianças usaram a língua materna, sem perguntarem por uma representação matemática da metade.

3 laranjas	2 crianças
	2 laranjas e meia

As ações de juntar, adicionar, retirar, comparar, multiplicar e dividir foram introduzidas também usando situações reais, materiais manipulativos e a língua materna.

Representações iniciais envolviam signos dos números naturais, palavras para indicar as partes, e os mesmos esquemas gráficos usados nas operações entre números naturais.

Desse modo, as crianças operaram bem, frente às propostas que se seguem, sem necessidade de explicações:

+ 2 quartos	+ 3 e meio	× 1 quarto	4 quintos	2 crianças
1 quarto	meio	3		

A simbologia matemática foi introduzida depois. Foi feita paralelamente ao ato de dividir em partes iguais e pegar algumas. Ao dividir, por exemplo, em 5 partes, escrevíamos o 5 com um traço horizontal em cima e verbalizávamos *dividiu em 5*; ao tomar 2 partes escrevíamos 2 sobre o traço e verbalizávamos *e pegou 2.* Ao se depararem com uma notação fracionária, as crianças liam do mesmo modo: *dividiu em tantas e pegou tantas.* Um momento seguinte foi o de associarem essa leitura funcional com os nomes que já conheciam: se, ao dividir em 5, obtinham quintos; pegando 2, teriam 2 quintos. As crianças reconheciam mais por esse lado funcional e hesitavam um pouco em nomear, ainda mais que, conforme o caso, diziam *dividiu em 15, mas não sei o nome desse pedaço.* Esse ponto foi importante para mostrar a dificuldade existente em coordenar o papel dos dois números envolvidos na constituição de um nome.

O conhecimento da representação fracionária permitiu seu emprego na escrita das operações. Uma peculiaridade foi o fato de, em somas e subtrações, além de representarmos os algoritmos verticalmente, não transformarmos frações mistas em impróprias, fruto das observações feitas nos procedimentos próprios das crianças no uso de material manipulativo: se tinham que juntar quantidades envolvendo fichas inteiras e partes, eles sempre juntavam as inteiras e efetuavam as trocas necessárias nas partes.

$$\begin{array}{l} 12\frac{3}{4} + \\ \ \ 8\frac{2}{4} \\ \hline \end{array}$$

20 5/4 ou 21 1/4

Essas investigações foram interrompidas em 1989, com o término do projeto.

A continuação dos estudos

Investigações subseqüentes foram feitas nas séries 2^a a 5^a de uma escola particular e em várias capacitações de professores formados em nível médio e em nível superior.

Nessas interações com professores, constatando que sua concepção de frações vinculava-se fortemente à divisão de figuras geométricas, preparamos oficinas visando o surgimento de abstrações reflexivas a partir de ações sobre essas divisões. As atividades incluíam, por exemplo, partes pintadas descontínuas e divisões de uma mesma figura em um mesmo número de partes iguais, de maneiras diferenciadas. Apesar de constatar que houve ganhos, manifestados pelos próprios participantes, consideramos que esses ganhos eram devidos à familiaridade prévia dos participantes com esses modelos. Ao nosso ver, o uso desses modelos, pintados ou recortados, para a introdução dos números fracionários, não era o mais adequado. Incomodava-nos principalmente as atividades subseqüentes, usuais nos livros didáticos, em que o aprendiz ficava preso à manipulação de figuras, não sendo solicitado a formular idéias.

No caso da escola, com alunos de uma 5ª série que haviam passado, na 4ª série, por um processo de aprendizagem análogo ao que havia sido desenvolvido no Laboratório, verificamos que eles reagiram bem a situações do cotidiano que solicitavam uma reflexão sobre frações.. Mostravam maior facilidade de raciocínio com as frações do que os alunos novos, que haviam sido transferidos de outras escolas. Um exemplo disso foi a reação à seguinte situação-problema:

Três colegas foram a uma pizzaria e pediram uma pizza, que veio dividida em quatro partes iguais. O garçom serviu uma a cada um. Ao terminarem de comer, pediram ao garçom que dividisse o pedaço restante entre os três. Quanto de pizza cada um comeu?

A maioria dos alunos transferidos ficou bloqueada, principalmente pelo fato de *não haver números.* Os demais pensaram ativamente e várias soluções foram apresentadas, com respostas em formas diferenciadas:

1 quarto mais 1 terço de 1 quarto

4 terços de ¼

1 quarto mais 1 doze avo

4 doze avos

1 terço

Ao exporem as soluções, o grupo que respondeu "1 terço" disse que não havia escrito nada, nem desenhado nada, nem pego material. E contaram como haviam pensado: *Não eram 3 meninos? Não comeram a pizza toda? Todos comeram igual. Então cada um comeu 1 terço.*

As concepções dos alunos transferidos, acostumados a dizer que *sabiam mais* sobre frações, pelo fato de conhecerem as regras formais das operações, foram alteradas após essa atividade.

Soluções como a apresentada, envolvendo apenas raciocínio e uma boa conceituação do número fracionário, análoga a outras surgidas anteriormente (no caso de saber quanto é 5 terços menos 1 sexto; ou determinar o maior: 2/3 ou ¾) pareciam indicar que, em certa fase da aprendizagem, os alunos poderiam dispensar o material e pensar com autonomia.

Na verdade, a questão do material manipulativo, que usávamos mais do que as figuras geométricas, ainda nos causava certa inquietação. Ele nos parecia de certo modo artificial, não havendo uma articulação bem visível entre os particionamentos de fichas e canudos e os particionamentos reais encontrados no viver cotidiano. Por outro lado, a comparação do uso desse material – fichas e canudos cortados em frações - com o uso de material de contagem, para os números naturais, levou a certas constatações. Há uma sintonia perfeita entre o contar objetos da realidade, como carteiras ou alunos e o contar objetos manipulativos: tampinhas, palitos, canudos etc. Ou seja, a ação de contar objetos na escola é bastante significativa para o aluno, representando um processo naturalmente incorporado na sua vivência cotidiana, sem necessidade da elaboração de uma transposição para que isso ocorra. Já a contagem de materiais representando partes da unidade, que usávamos bastante em jogos, não é usualmente aplicada em situações do cotidiano, por não encontrar demanda nesse sentido. Os desenvolvimentos posteriores usualmente feitos na aprendizagem dos números fracionários, das relações e operações entre eles, permanecem centrados nas figuras, criando um universo próprio para a existência das frações, desvinculado da realidade.

Essa constatação gerou um rastreamento de coisas divididas em partes iguais, ou que requeriam tal divisão, em contextos da realidade. Trabalhamos com sanduiches e laranjas divididas ao meio; pizzas grandes divididas em 8 partes e pizzas médias divididas em 6; a divisão do bolo da merenda para os alunos; a divisão de tortas e pudins em confeitarias, a divisão do relógio analógico, a compra de um pedaço de queijo, requerendo a divisão do mesmo em quatro partes etc, Passamos a evitar o oferecimento de um material de apoio direcionado diretamente a verificações e cálculos. O aluno era estimulado a pensar e, caso necessitasse, a desenhar ou recortar em papel algo que representasse os objetos considerados. Mas ainda oferecíamos um jogo que envolvia a manipulação dos canudos ou fichas cortados. Constatamos que, muitas vezes, em situações cotidianas problematizadas, os alunos recorriam à manipulação feita no jogo. Como exemplos, diziam:

- (no caso de terem meios e quartos) : *é igual nos canudos, pra ficar com as partes iguais troca metade por dois de 1 quarto*
- *se tem 5 de 1 terço, dá pra trocar 3 por um canudo inteiro*

Esse apoio em particionamentos da realidade e menor ênfase no material concreto foram mudanças iniciais em relação aos desenvolvimentos anteriores, feitos no laboratório.

Além disso, notamos que as crianças raciocinavam com forte apoio nas frações unitárias, referindo-se, por exemplo, a *2 de 1 terço, 6 de 1 quinto*, e não a 2 terços ou 6 quintos. Nossas leituras mostraram que esse foi também um caminho histórico para a aprendizagem de frações, entre povos antigos (ver Tropfke, p. 93, 95, 255).

A adoção dessa terminologia, de nossa parte, tornou os entendimentos conceituais mais claros, e motivou uma segunda mudança em nossos procedimentos, dessa vez na introdução da representação fracionária. Passamos a introduzir apenas as representações dos pedaços unitários obtidos, do tipo 1/n, e a usar registros do tipo 2 de 1/5, que parte dos alunos associava naturalmente a $2 \times 1/5$. Ao identificá-las posteriormente com 2/5, tínhamos um ganho extra, da compreensão inicial da multiplicação de frações.

O estado atual das investigações e propostas

Pensando em uma aprendizagem matemática apoiada na demanda social, na natureza e história da matemática e na cognição e interesse do aluno, e levando em conta os resultados de nossas investigações, apontamos alguns indicadores para uma aprendizagem mais adequada dos números fracionários, com compreensão dos conceitos, das relações entre esses números e de suas representações fracionárias.

O primeiro ponto a considerar é evidenciar contextualmente a necessidade de novos números, descartando assim a introdução por divisão de figuras, cortes de papel ou de pizzas de massa. Esses procedimentos visam apenas a dar certo sentido a algo que a escola quer que os alunos aprendam, que ela lhes impõe, sem que eles saibam das necessidades ou finalidades desse conhecimento. Constitui uma introdução dos novos números feita no âmbito de um modelo restrito e desvinculado da realidade, consistindo na atribuição de um nome e um símbolo numérico a objetos (partes) em uma situação estereotipada de dividir, pintar ou recortar; que propicia verificações locais, mas não raciocínios de relações entre esses objetos. Há suficientes indicadores, em avaliações práticas e pesquisas teóricas, que levam a duvidar da validez desse processo na construção de um entendimento dos números fracionários e da capacidade de pensar sobre eles.

Um referencial sobre formação de conceito é a concepção de Vergnaud, segundo o qual o conceito está associado a um conjunto de situações que tornam o conceito útil e significativo; a invariantes que podem ser usados pelo aluno para lidar com essas situações e a representações simbólicas, lingüísticas, gráficas ou gestuais que possam ser usadas para representar situações e procedimentos. É uma concepção ampla, que compreende as motivações que asseguram uma compreensão inicial do conceito, o desenvolvimento de esquemas para lidar com situações que envolvam esses números, incluindo as operações, e a construção das representações.

Situações que tornam o conceito útil e significativo

Ao caracterizar e classificar um amplo conjunto de situações para as quais o conceito de número fracionário pode ser útil ao estudante, observamos que há duas vertentes relevantes que podem fornecer tais situações.

a) contagem de elementos ou quantificação de coleções que envolvam unidades inteiras e partes (especiais) delas. Por exemplo: um funcionário deve anotar quantas melancias há em cada uma das quatro prateleiras de um supermercado. Em um desenho, pode-se ver que em uma delas há 12 melancias, em outra há 10 melancias e uma metade longitudinal, na terceira há 8 melancias e uma metade transversal e, na última, há 7 melancias, duas metades e um pedaço menor. Isso possibilita as escritas:

   12 10 e meia 8 e meia 8 e um pedaço

   Observando-se, percebe-se que esse pedaço menor corresponde à metade da metade e informa-se que há um nome para tal pedaço: 1 quarto.

   Os alunos podem fazer a contagem da quantidade total de melancias, havendo necessidade de alguma mediação do professor quanto ao fato da junção de duas metades diferentes (aparentemente de melancias iguais) eqüivalerem a uma melancia.

   Outra atividade consiste em distribuir a cada criança um pedaço de barbante, cujo comprimento será de um metro ou meio metro. Se perguntamos pelo comprimento da linha que podem fazer com esses pedaços, elas alinham os metros intercalados aos meios metros. O processo de contagem ou quantificação posterior é bastante interessante e variado. O importante é que o *meio* mistura-se aos números naturais como um quantificador. Na expressão final do comprimento, como 22 metros e meio, as crianças gostam de saber que há uma modo matemático de escrever o meio, que pode ser informado.

De modo geral, as medidas constituem outro aspecto dessas situações envolvendo quantificações. Se os alunos conhecem as unidades metro, litro e minuto e o processo de medir, poderão verificar a quantidade de líqüido em um recipiente, o comprimento de uma linha ou determinar certo intervalo de tempo cujos resultados serão 2 litros e meio, 3 metros e meio, 1 minuto e meio.

b) divisões entre números naturais gerando a necessidade de expressar quantidades fracionárias.. Mencionamos a situação de dividir 3 laranjas por duas crianças, cujo resultado as crianças expressam prontamente com *uma laranja e uma metade.* Já em 3 laranjas para 4 crianças, elas pensam em dividir todas ao meio, resultando em 6 metades, das quais dão uma a cada um, as duas metades restantes são novamente divididas ao meio e é dada uma parte a cada um. Os alunos expressam que cada um recebe metade e mais metade da metade. Ao propormos 10 doces para 6 crianças, elas pensaram: dá 1 para cada uma e sobram 4; dividindo três ao meio, dá mais meio para cada uma, depois, dividimos o que sobrou em 6 e damos um pedaço para cada um. Expressam o resultado como 1 doce, mais uma metade, mais um pedacinho,

Fica evidente a necessidade de nomear o pedaço e a possibilidade de representá-lo matematicamente, e o pedaço que apareceu quando dividimos 1 doce em 6 partes iguais é chamado de 1 sexto. Os nomes e possíveis representações matemáticas aparecem em meio às situações, *em ação.*

A metodologia subseqüente envolve numerosas situações do cotidiano, nas quais são introduzidos os nomes para várias frações e onde começam a se evidenciar invariantes específicos do conceito de frações. Além disso, os dois processos, de contagem e divisão, mesclam-se a exemplos do cotidiano em que objetos aparecem igualmente particionados. Os jogos de canudos – nos quais os canudos apresentam-se inteiros ou em partes fracionárias, e um dado indica a quantidade fracionária que o aluno deve pegar a cada vez - sistematizam os processos de contagem do cotidiano e são úteis para aprofundar e generalizar conceitos.

b) Invariantes usados pelo aluno para lidar com essas situações

A escola costuma trabalhar com os alunos as equivalências e as operações de frações. Mas destacamos alguns esquemas mais funcionais, ligados à compreensão de ações entre frações. Há vários esquemas que são percebidos e construídos pelos alunos em ação, ao longo das situações-problema.

1 – a formação do todo, o complementar, a formação de metade.

Frente à situação de dividir 1 inteiro em n partes, a criança percebe que n dessas partes formam o inteiro. A quantidade n determina o nome do pedaço obtido: se n é 6, o pedaço é 1 sexto. Assim, percebe que 6 de 1 sexto formam o inteiro e que, se tem 1 sexto, precisa de mais 5 para formar o inteiro. A questão da metade também é compreendida: no caso de n ser par, fica claro, pois precisa de 6 sextos para formar o inteiro e de 3 sextos para formar metade do inteiro. No caso de n ser ímpar, recorre à metade de uma das partes: precisa de 5 quintos para formar o inteiro e de 2 quintos e metade de 1 quinto para formar metade do inteiro.

2 – idéias iniciais de equivalência. Seja em processos de divisão ou de contagem, os alunos percebem claramente que uma metade vale tanto quanto dois de 1 quarto; que 1 terço vale 2 de 1 sexto, que 1 inteiro vale 2 metades ou 3 terços ou 4 quartos etc.

3 – a idéia de que, quanto maior é n, menor é o pedaço obtido. Ou, em linguagem acessível a eles: *quanto mais divide, menor fica.* A idéia de que 1/8 é menor do que 1/6 fica clara, não havendo qualquer obstáculo com o fato de 8 ser maior que 6. Ou melhor, é justamente por 8 ser maior do que 6 que ela entende que 1/8 é menor do que 1/6.

4 - a idéia de que, quanto mais se toma, maior fica. Assim, 4 de 1 quinto é maior do que 2 de 1 quinto.

5 – Perceber que 2 de 1 quinto é o que cada um recebe, se forem divididos dois inteiros para 5 pessoas.

6 – Perceber o efeito de tomar n pedaços de uma fração. Ou seja, perceber que 2 de 1 quinto implica em tomar duas vezes 1 quinto e pode ser representada naturalmente por 2 × 1 quinto.

7 - perceber o efeito de tomar uma fração unitária de uma fração unitária. Tomar 1 meio de 1 quinto corresponde a tomar meia parte de 1 quinto, ou tomar meia vez 1 quinto. O efeito é dividir 1 quinto ao meio.

8 – perceber quanto dá 3 vezes 1/5 de 5 terços. 1/5 de 5 terços dá 1 terço; 3 vezes 1 terço dá 1 inteiro. Esse esquema será generalizado depois para 3/5 × 5/3 = 1, ou ainda *uma fração multiplicada pela fração inversa é igual a 1.*

Há esquemas cujo desenvolvimento junto aos alunos é mais adequado a partir da 5ª série. Por exemplo, relacionados a equivalências, de modo mais sistematizado. Visto que, na sistematização das equivalências está envolvida a multiplicação de ambos os membros por um mesmo número, é preciso mediar a compreensão das ações subjacentes a esses esquemas. Ainda que não fiquem claras de início, o aluno irá assimilando-as, aos poucos. São as seguintes:

9 - a correlação entre dividir uma fração unitária em certo número de partes e o efeito na representação da nova fração: ½ ÷ 4 = ⅛ ou 1/n ÷ m = 1/(n.m). Em sentido

oposto, perceber que a multiplicação do denominador por n implica na divisão da fração por n.

10 - a correlação entre multiplicar uma fração unitária por certo número e o efeito na representação da nova fração: $4 \times \frac{1}{2} = 4/2$. Em sentido oposto, perceber que a multiplicação do numerador por n implica na multiplicação da fração por n.

Os esquemas 9 e 10 descrevem ações opostas entre si. Multiplicar o numerador por n corresponde a multiplicar a fração por n; multiplicar o denominador por n corresponde a dividir a fração por n. A multiplicação simultânea do numerador e do denominador de uma fração por um mesmo número muda a representação da fração mas não altera o tamanho da parte representada.

11 – Um esquema ainda mais complexo, a ser desenvolvido nas séries finais, é o seguinte: se n/m de x vale y, então x vale m/n de y.

Embora o ensino tradicional de frações não trabalhe nem explicite esses vários esquemas, há uma expectativa implícita de que os alunos acabem dominando-os. O professor de 5ª a 8ª ou do Ensino Médio pode vir a usá-los, assumindo que, em algum ponto da escolaridade, eles foram trabalhados e aprendidos.

Representações simbólicas associadas ao conceito

Para completar a formação do conceito, é necessário um conjunto de representações simbólicas, lingüísticas, gráficas ou gestuais que possam ser usadas para representar situações e procedimentos ligados ao mesmo.

Já mencionamos um modo de introduzir as primeiras representações, referentes a frações unitárias. A simplificação de *3 de 1/5* para *3/5* é uma etapa seguinte. Os esquemas desenvolvidos, trabalhados quase todos em linguagem comum, devem ser compreendidos no âmbito das representações.

É necessário assimilar, por exemplo, que n/n vale 1 inteiro; que 1/n + (n-1)/n vale 1 inteiro, que (n/2)/n vale a metade de um inteiro. Ou que 1/(n.m) representa o resultado da divisão de 1/n por m (ou de 1/m por n). E ainda que $np/nq \approx p/q$. São dois processos que devem ser coordenados: a construção dos esquemas, com compreensão, e a construção das representações, com compreensão, resultando na compreensão dos esquemas aplicados às representações.

Sobre as operações

As operações também se constituem em esquemas que possibilitam aos alunos lidarem com os números fracionários. Muitos dos esquemas que apresentamos estão implícitos na lógica das operações, mas não chegam a ser explicitados. Nossas experiências apontam para ganhos na compreensão conceitual dos números fracionários quando esses esquemas são trabalhados independentemente das operações.

Entretanto, as operações estão naturalmente presentes ao longo do processo de aprendizagem do número fracionário. Nesse sentido, consideramos que os PCN deveriam contemplar a formação inicial dessas idéias operacionais.

Na metodologia que desenvolvemos, todas as operações surgem naturalmente nas situações cotidianas inicialmente propostas. Nessa fase, elas são resolvidas de modo informal, mentalmente ou com palavras. Os primeiros registros correspondem a estratégias próprias dos alunos e envolvem, geralmente, números naturais e nomes de partes fracionárias.

Um início de sistematização da soma e da subtração gera a necessidade de obter partes do mesmo tamanho, para que se possa expressar a quantidade global. Envolvem eqüivalências informais entre meios e quartos, terços e sextos etc. A divisão é trabalhada como partilha (divisão em n partes iguais) ou como medida (formação de partes de igual tamanho, pré-determinado). Um modo mais simples de compreender é expressando como partes de mesmo tamanho, como exemplificado. As multiplicações podem envolver as idéias de $n \times 1/q$, $n \times p/q$, $1/m \times 1/n$.

O processo geral de soma e subtração, a ser desenvolvido a partir da 5ª série, envolve a compreensão do esquema de eqüivalência. É feita a generalização de multiplicação $n/m \times p/q$, interpretada como $n \times 1/m \times p/q$.

Formalizações finais são feitas na 6ª série. Elas envolvem noções de múltiplos comuns e do menor múltiplo comum. Para entender a divisão como multiplicação pelo inverso, recorre-se a uma propriedade da divisão, segundo a qual a multiplicação do dividendo e do divisor por um mesmo número não alteram o quociente da divisão. Nesse caso, expressando a divisão $n/m \div p/q$ na forma de fração, para melhor visualização, e escolhendo o inverso do divisor como o fator pelo qual o dividendo e o divisor serão multiplicados, teremos:

$$\frac{\frac{n}{m}}{\frac{p}{q}}=\frac{\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}}{\frac{p}{q}\times\frac{q}{p}}=\frac{\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}}{1}=\frac{n}{m}\times\frac{q}{p}$$

Conclusões

Até o momento, temos trabalhado esse novo paradigma no ensino e aprendizagem das frações, com resultados animadores. Alguns dos esquemas mais complexos, adequados às séries mais avançadas, ainda não foram experimentados suficientemente. Consideramos que o estudo incorpora aspectos relevantes apontados nas pesquisas e ultrapassa problemas evidenciados na prática.

Entretanto, nosso interesse e pesquisa atual encaminham-se para uma investigação da aprendizagem simultânea das representações decimal e fracionária. Nossas experimentações iniciais giram em torno de décimos, meios e quintos. Os sujeitos da pesquisa têm sido adultos com escolaridade até 3ª ou 4ª série, há longo tempo fora do processo escolar e que usam apenas a matemática dos números naturais em suas vivências.

Referências Bibliográficas

BERTONI, N. E. (2002). Educação e linguagem matemática 4**.** Módulo V, vol. 2. Brasília: Universidade de Brasília.

BRASIL (1998).Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (5ª a 8ª série). Brasília: MEC/SEF.

NUNES, T.; BRYANT, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas.

TROPFKE, J. (1980). *Geschichte der Elementarmathematik* . Volume 1. Berlin, New York: de Gruyter.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie de champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol. 10. nos. 2-3, pp. 133-170.