
# EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR

LILIAN NASSER

IM - UFRJ - liliannasser@uol.com.br

CETIQT - SENAI - lnasser@cetiqt.senai.br

O objetivo principal desta Mesa Redonda é divulgar para toda a comunidade os trabalhos do Grupo de Educação Matemática no Ensino Superior, da SBEM, que existe desde 2000. Como coordenadora do grupo desde o início, apresento um histórico dos encontros e dos temas abordados ao longo desses 4 anos, além de apontar o crescimento das pesquisas referentes a esse segmento de ensino.

Um dos temas que tem preocupado os pesquisadores é a dificuldade dos alunos que chegam ao ensino superior com sérias deficiências em matemática básica. Como lidar com essas deficiências e ao mesmo tempo conseguir aprendizagem significativas nas disciplinas do 1º período? Numa tentativa de responder a esse questionamento, estou desenvolvendo um trabalho alternativo com alunos de um curso de engenharia, cujos resultados serão discutidos na apresentação.

**Histórico do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior**

O Grupo de Educação Matemática no Ensino Superior já se reuniu, a nível nacional, três vezes: no I Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (I SIPEM) realizado em Serra Negra (SP) em novembro de 2000, durante o VII ENEM, que se realizou na UFRJ em julho de 2001 e no II SIPEM, em Blumenau (SC) em outubro de 2003.

Considerando o cenário internacional, observa-se uma preocupação crescente com esse segmento do ensino, como comprovam os levantamentos de pesquisas publicados nos últimos anos (Tall, 1991; Grows, 1992; Bishop,1996) e os anais de conferências realizadas em diversos países, como por exemplo as conferências do grupo de Psychology of Mathematics Education (PME).

Os trabalhos apresentados no I SIPEM constam do texto do GT 4, no livro de Resumos do I SIPEM, páginas 118-168. Ainda foram relatados resumos de outras pesquisas, mas é claro que estes trabalhos não representam ainda o estado da arte das pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior. Nos trabalhos apresentados foram enfocados os seguintes tópicos da Educação Matemática no Ensino Superior:

- uso das novas tecnologias no ensino;
- funções da prova e da argumentação;
- análise de livros didáticos;
- compreensão de tópicos específicos de Cálculo, Geometria Analítica e Álgebra Linear e, em particular,
- as disciplinas do ciclo básico da área de exatas e os cursos de Licenciatura em Matemática.

Um bom resumo desses trabalhos é apresentado por Pinto (2002), com uma visão comparativa dos temas abordados

Durante os debates do grupo, observou-se ter havido um crescimento significativo de pesquisas no âmbito do Ensino Superior no Brasil, devido principalmente:

- ao aumento do número de pesquisadores em Educação Matemática nas Instituições de Ensino Superior brasileiras;
- ao uso de novas tecnologias no ensino;
- à democratização do ensino;
- às dificuldades inerentes à Matemática Superior.

Uma preocupação comum a todas as pesquisas é a de que os resultados cheguem à sala de aula, isto é, de que causem interferência real no processo ensino-aprendizagem de Matemática no Ensino Superior.

Para os encontros do Grupo Pesquisa no Ensino Superior no VII ENEM, que se realizou na UFRJ em julho de 2001, os membros do grupo foram consultados previamente sobre os temas de interesse comum. As preocupações apontadas foram:

- O que muda no ensino de Cálculo e Álgebra Linear com a introdução das novas tecnologias?
- Que enfoque e com que profundidade devem ser abordadas as disciplinas de Matemática nos cursos de ‘serviço’ ?

- Que abordagem especial deve ser adotada nas disciplinas do ciclo básico para os cursos de Licenciatura em Matemática ?
- De que maneira as dificuldades existentes na Escola básica estão interferindo nos cursos ministrados na Universidade?

Os trabalhos foram então agrupados de acordo com um esses temas. Devido à coincidência de horários das reuniões dos Grupos de Trabalho com as sessões de Comunicações e Relatos de Experiências, não foi possível a presença de todos os participantes nos três encontros realizados no VII ENEM. Isso prejudicou um pouco a continuidade dos debates. Apesar disso, e do pouco tempo disponível, as discussões foram bem ricas. A estrutura de apresentar os trabalhos por tema foi positiva, já que havia diversos pontos em comum nas apresentações, que puxaram os debates.

Em resumo, os principais pontos abordados pelo grupo foram:

- o uso de novas tecnologias no ensino superior não é garantia de que os alunos compreendem os conceitos. É preciso que o professor saiba explorar esse recurso;
- o tempo gasto com o ensino de cálculos e técnicas de integração pode ser diminuído com o auxílio do computador. Esse tempo economizado pode ser direcionado para a resolução de problemas mais interessantes;
- Quanto ao curso de Licenciatura em Matemática, é importante que a entrada do vestibular seja separada dos outros cursos da Matemática: Bacharelado, Informática, Estatística;
- As disciplinas voltadas para alunos de licenciatura não devem enfocar apenas uma simplificação do conteúdo da disciplina;
- O trabalho com alunos de Licenciatura deve ser baseado em textos matemáticos, exigindo do aluno leitura e compreensão dos mesmos;
- Deve haver uma preocupação constante com a linguagem matemática, e também com a questão social;
- Quanto às dificuldades apresentadas pelos alunos, ficou claro que estes apresentam sérias deficiências na compreensão de demonstrações, e não valorizam, em geral o rigor matemático;
- Para acompanhar o progresso dos alunos, devem ser usados métodos inovadores de avaliação, como a análise de portifólios;

- Em algumas universidades, a adoção de uma disciplina de Introdução ao Cálculo tem servido para suprir as deficiências dos alunos em conceitos básicos de Matemática;
- Já em outros casos, como na UNISINOS (RS), o curso de Pré-Cálculo não surtiu efeito, e foram introduzidos módulos de tópicos de matemática básica, opcionais e concomitantes com a disciplina de Cálculo I, o que tem dado bons resultados.

No II SIPEM, realizado em Santos, SP em outubro de 2003, grande parte dos trabalhos submetidos para apresentação tratavam do ensino/aprendizagem de Cálculo, com o uso de softwares como ferramenta. O uso da geometria dinâmica também está em ascensão. Uma de suas vantagens é a possibilidade de explorar uma conjectura antes de partir para a sua demonstração. Quanto a outros tópicos do ensino superior, foram apresentados trabalhos versando sobre a aprendizagem de: Geometria, Probabilidades, Funções Complexas, Álgebra Linear – Espaço Vetorial e Transformações Lineares. Outros trabalhos enfocaram questões ligadas à metodologia de ensino e estilos de aprendizagem.

Vale ressaltar que o número de trabalhos submetidos para apresentação quase que dobrou em relação ao I SIPEM, o que reforça a idéia de que cada vez mais os docentes do ensino superior estão se preocupando com a aprendizagem dos seus alunos, e para isso enfrentam mudanças de postura e desenvolvem investigações usando novos métodos de ensino, quer seja com o uso das novas tecnologias ou não.

Algumas regionais da SBEM também têm promovido debates e/ou mesas redondas sobre a Educação Matemática no Ensino Superior. No Rio de Janeiro, foi realizado em setembro de 2002 o IV Seminário de Pesquisa de Educação Matemática do Rio de Janeiro (IV SPEM-RJ). Devido ao número reduzido de participantes, o grupo de Educação Matemática no Ensino Superior se juntou ao de Ensino Médio. O debate foi muito proveitoso, e tivemos oportunidade de enfocar a passagem da escola básica para o ensino superior. Os temas abordados no VII ENEM foram discutidos, assim como as dificuldades encontradas pelos Cursos de Licenciatura no interior, a prática supervisionada e sua permeabilização entre as disciplinas de graduação, a resistência de professores e alunos aos processos de mudança, que conteúdos do ensino médio são importantes para o aluno que pretende ingressar na universidade e a falta de cursos de mestrado e doutorado em Educação Matemática no Estado do Rio de Janeiro.

**Uma experiência com calouros de um curso de engenharia**

Dos temas debatidos nos encontros do grupo, um tem merecido minha atenção, já que vem se agravando ano a ano: as dificuldades matemáticas trazidas pelos alunos que chegam ao curso superior. O número de aulas dedicadas ao Cálculo e Geometria Analítica nos cursos da área tecnológica, principalmente nas engenharias, tem diminuído. Por outro lado, devido à concorrência entre as faculdades privadas, fica cada vez mais fácil o acesso ao ensino superior, ao qual muitos alunos chegam sem nenhuma bagagem matemática. Como conseqüência, conseguir abordar o conteúdo desejável dessas disciplinas, alcançando aprendizagem significativa, torna-se praticamente impossível.

Neste primeiro semestre de 2004 estou acompanhando uma turma de calouros do curso de engenharia industrial têxtil com essas características. Com a redução do curso de 5 para 4 anos de duração, houve um corte drástico na carga horária destinada à Matemática. O curso tinha 4 disciplinas de Cálculo, Cálculo Numérico, Geometria Analítica e Cálculo Vetorial (GACV) e Álgebra Linear, totalizando 26 horas-aula semanais. Na nova grade são apenas 16 horas: 3 Cálculos e Matemática Vetorial. Os alunos, apesar das dificuldades, devem acompanhar essas disciplinas com mais conteúdo em menos tempo. Introduzimos então uma disciplina optativa com 2 horas de aula semanais, que intitulamos "Matemática Básica".

No teste diagnóstico realizado no primeiro dia de aula dessa disciplina, constatamos que alguns alunos apresentavam sérias dificuldades nos seguintes tópicos:

- soma de frações;
- porcentagem;
- resolução de uma equação do 2º grau;
- aplicação do Teorema de Pitágoras;
- noções básicas de Trigonometria;
- gráficos de parábolas e retas no plano cartesiano;
- expressar a função de 1º grau que representa uma situação da vida real.

Trabalhando em conjunto com os professores de Cálculo I e Matemática Vetorial, estou desenvolvendo um trabalho cuidadoso de abordagem dos conteúdos básicos, enquanto apoiamos os tópicos apresentados nessas disciplinas.

Neste relato pretendo apresentar as metodologias utilizadas nessa disciplina e o progresso obtido ao longo do semestre letivo. Já observamos que os alunos reconhecem que têm dificuldades e alguns até afirmam que não gostam de Matemática. Apesar de a disciplina ser optativa, os alunos mostraram interesse em participar desde o início, para sanar suas dificuldades.

**Referências Bibliográficas:**

BISHOP, A. J. et al (Eds): *International Handbook of Mathematics Education.* Netherlands: Kluwer, 1997.

GROUWS, D. A. (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, 1992.

LIVRO DE RESUMOS DO I SIPEM. Serra Negra, SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2000.

PINTO, M.M.F. : Educação Matemática no Ensino Superior. Em: Educação em Revista, nº 36, p. 223-238, Belo Horizonte, dez.2002

TALL, D. O. (Ed). ***Advanced Mathematical Thinking***. Netherlands: Kluwer, 1991, 289p.

# Estratégias gráficas na aprendizagem de Cálculo

Maria Clara Rezende Frota
PUC Minas – Departamento de Matemática e Estatística
mclarafrota@uol.com.br

## Introdução

Este trabalho descreve uma investigação acerca do uso de estratégias gráficas na aprendizagem de Cálculo. Os resultados aqui discutidos integram um trabalho de pesquisa que tenho desenvolvido, desde 1998, junto a alunos de engenharia (Frota, 2002).

As representações visuais constituem um objeto específico da pesquisa em Educação Matemática. Skemp (1986), em seu livro The Psychology of Learning Mathematics, dedica um capítulo à discussão dos dois tipos de símbolos, visual e verbal, presentes na matemática. Skemp busca estabelecer uma comparação entre os dois tipos visual e verbal-algébrico, destacando os contrastes e as similaridades entre os mesmos. O símbolo visual viabiliza a abstração de propriedades espaciais, pode representar pensamentos mais individuais, sendo então mais intuitivo e difícil de comunicar, mas, apresenta um caráter mais integrador, capaz de representar a estrutura completa de um tema. Por outro lado o símbolo verbal-algébrico possibilita a abstração de propriedades que independem da configuração espacial, podendo representar pensamentos mais socializados, sendo, então, mais analítico, seqüencial, lógico e de mais fácil comunicação.

Símbolos visual e verbal são formas de "visualização em matemática", entendida como: "a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e reflexão sobre figuras, imagens, diagramas" (Arcavi, 2003), objetivando refletir sobre e desenvolver idéias matemáticas iniciais, ainda nebulosas, avançar no entendimento matemático e representar e comunicar tais idéias O tema "visualização em matemática" preocupa matemáticos, psicólogos, professores e educadores matemáticos e tem sido o cerne de muitos trabalhos, desenvolvidos a partir de enfoques variados[1]. O seu papel na aprendizagem e as dificuldades possíveis na sua implementação na sala de aula são discutidos e analisados em contextos diferenciados, envolvendo tópicos distintos da matemática elementar e avançada,

[1] Por exemplo: Revista FOCUS -On Learning Problems in Mathematics, edição de inverno/primavera de 1989, artigos de Bishop, Eisenberg e Dreyfus; obra Advanced Mathematical Thinking, Tall (1991), contribuições de Dreyfus, Harel e Kaput, Eisenberg, Artigue, Dubinsky e Tall.; obra Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Grouws, 1992; Anais do PME, 1999, sessões plenárias de Duval, Kaput e Arcavi; Anais do PME 25, 26 e 27, grupo de dicussão "symbolic cognition in advanced mathematics".

investigando ainda as possibilidades, bem como os obstáculos, gerados a partir do emprego de calculadoras gráficas e tecnologias computacionais no desenvolvimento do pensar e fazer matemático dos alunos.

Uma série de estudos aponta a importância de se focalizar, além da representação analítica, as representações gráficas e numéricas, por exemplo, de funções e suas derivadas. Dessa forma a mediação de computadores no ensino de Cálculo tem se constituído como uma área importante de investigação (p. e. Aspinwall e Miller, 2001; Gray e Tall, 2001; Pinto e Tall, 2002; Rasslan e Tall, 2002; Tall 2003; Berry e Nyman, 2003).

No Brasil, torna-se difícil efetuar um mapeamento da pesquisa relativa à "visualização em matemática", ou mesmo qualquer outro tema, considerando-se, por exemplo, dificuldades de acesso a bancos de dados, ou problemas na estruturação de tais bancos, que podem impedir a recuperação de informações a partir de determinadas palavras chave, assim como a falta de políticas editoriais que incentivem a publicação de periódicos temáticos, onde se possa apresentar o estado da arte de um determinado assunto. Na realidade esforços nesse sentido têm sido conduzidos no interior dos Grupos de Trabalho que se reúnem nos congressos nacionais e internacionais de Educação Matemática.[2] Se um levantamento da pesquisa, por exemplo, em Educação Matemática Superior, já é uma tarefa difícil, maiores problemas são encontrados, quando se pretende um novo grupamento das pesquisas, de acordo com o tema visualização em matemática, ou, tema estratégias gráficas na aprendizagem de Cálculo.Apesar disso, creio poder afirmar que também no Brasil o tema interessa aos pesquisadores da área.[3]

Toda essa preocupação da comunidade de educadores e pesquisadores em educação matemática teve repercussões na política educacional dos países, traduzindo-se em diretrizes específicas relativas às metas do ensino de matemática nos vários níveis de escolaridade.

As recomendações para o ensino de matemática, expressas nos "standards" do NCTM, apontam como metas da formação matemática dos alunos a capacidade de "criar e usar representações para organizar, rememorar e comunicar idéias matemáticas", transitando entre

[2] Muitos dos GTs têm se proposto a traçar um perfil da pesquisa brasileira em Educação Matemática, na subárea respectiva.. Um destaque seja feito para o CEMPEM, na UNICAMP, que sob coordenação do professor Dario Fiorentini, instalou e busca manter atualizado um banco de teses e dissertações em Educação Matemática. Registrem-se, também, esforços isolados de elaboração de dossiês da pesquisa no campo Educação em Revista, UFMG, dez.2002.

as diversas formas de representação e sabendo selecionar as mais adequadas para o modelamento e resolução de problemas das várias áreas da ciência e importantes para a sociedade de hoje.

> *Algumas formas de representação – como diagramas, dispositivos gráficos e expressões simbólicas – têm feito parte da escolaridade matemática. Infelizmente, tais representações e outras têm sido várias vezes pensadas e ensinadas como se fossem fins em si mesmas. Esta abordagem limita o poder e a utilidade da representação como ferramenta de aprender e fazer matemática.* (NCTM, 1989).

Diretrizes nessa mesma linha podem ser encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais brasileiros. Entre os objetivos do ensino de matemática no nível médio destacam-se:

- *compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;*
- *expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;*
- *reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;* (Brasil, 1997)

com vistas a "aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas" com autonomia e de forma cooperativa.

É, pois, um consenso na comunidade de educadores e pesquisadores que o ensino de matemática tenha como uma de suas metas básicas o desenvolvimento de competências de representação e comunicação matemática, tornando-se tal meta também central para a formação de professores (Brasil, 2001).

A importância do tema na educação matemática e as observações resultantes de minha prática no exercício do magistério, ensinando Cálculo para alunos de engenharia, motivaram o trabalho de pesquisa desenvolvido, que visa a indagar acerca das estratégias de aprendizagem matemática desses estudantes, em particular, acerca do real papel das estratégias gráficas, no seu processo de estudo.

[3] Uma leitura dos resumos das Comunicações Científicas apresentadas no II SIPEM (Santos, 2003), permite localizar trabalhos, em todos os 12 GTs, que poderiam ser agrupados sob a tema "visualização em matemática".

Este trabalho consta de duas seções que abordam o método da pesquisa desenvolvida e os principais resultados. A seção final pretende ser uma reflexão acerca da prática do professor de cálculo, utilizando os resultados da pesquisa relativos ao fazer matemático dos alunos, para discutir o fazer docente na sala de aula da universidade.

**O método**

A pesquisa desenvolvida teve como um dos objetivos mapear as estratégias de aprendizagem matemática de alunos de engenharia ao cursarem disciplinas de cálculo. Na investigação conduzida, utilizei as metodologias qualitativa e quantitativa, procedendo a uma série de entrevistas individuais com 19 alunos, num total de 57 entrevistas e à aplicação e análise estatística dos dados de um questionário respondido por 529 estudantes. Destaco, no presente trabalho resultados que têm por foco o uso de estratégias gráficas no estudo/aprendizagem de Cálculo de alunos de engenharia.

Num primeiro momento das entrevistas clínicas[4] o aluno se expressava sobre a utilização ou não da forma gráfica de representação de idéias matemáticas, constituindo-se essa fala uma representação acerca do seu processo de estudar matemática e num segundo momento, o aluno era acompanhado no desenvolvimento de tarefas matemáticas de resolução de exercícios e leitura de um texto no livro didático, buscando-se confirmar até que ponto a representação expressa constituía-se uma estratégia, uma configuração da ação do aluno, lidando com questões do cálculo integral.

Resultados relevantes, constatados no trabalho de investigação qualitativa, foram transformados em indagações para o desenvolvimento de estudos quantitativos junto a um número maior de estudantes, de modo a permitir que fossem feitas generalizações de tais resultados.

Elaborei e apliquei um questionário “Motivações, concepções e estratégias de estudo/aprendizagem dos alunos”, de 12 questões, num total de 126 itens, respondido por 529 alunos. Os dados foram tratados a partir das técnicas estatísticas de análise multivariada, usando-se análise fatorial e análise de grupamentos (clusters).

[4] As entrevistas conduzidas foram consideradas entrevistas clínicas por se adotar princípios das entrevistas clínicas piagetianas.

Do conjunto de doze indicadores obtidos, estarei destacando o indicador que foi nomeado "estratégias gráfico-numéricas". Um alto escore no mesmo significa a concordância do aluno em utilizar investigações gráficas, no sentido de resolver uma situação concreta de dificuldade ou novidade, ou, em testar valores numéricos, na tentativa de resolver o problema, lançando mão da calculadora, ou do computador, nesse processo de busca. O indicador, além de configurar a ação do aluno, é também um indicador representativo de atitudes metacognitivas, uma vez que exige do aluno responder a si próprio sobre seu conhecimento de estratégias gráfico-numéricas de solução de problemas e sobre a utilização, ou não, que faz das mesmas.

Os indicadores obtidos possibilitaram classificar os 529 estudantes de engenharia, cursando Cálculo na instituição pesquisada, quanto ao tipo de estratégias de aprendizagem preferido. Além disso, foi possível realizar estudos de regressão, no sentido de verificar a influência de fatores como motivações ou atitudes metacognitivas, na explicação do uso das estratégias adotadas, em particular das estratégias gráfico-numéricas no estudo/aprendizagem de Cálculo.

Os estudos de regressão foram desenvolvidos, subdividindo-se a amostra total em duas amostras básicas de 264 e 265 casos, a primeira usada para explorar modelos variados de regressão e a segunda usada para a validação do modelo, fazendo o que usualmente se chama de validação cruzada. Finalmente, foi feita uma nova regressão a partir da amostra total de 529 casos.

Os resultados mais relevantes, tanto do ponto de vista do estudo mais aprofundado, desenvolvido com 19 alunos, através de entrevistas, quanto dos resultados generalizados, obtidos da análise dos questionários, estarão sendo destacados na seção seguinte.

## A ANÁLISE

### RESULTADOS LOCAIS

Um fato geral perpassou as entrevistas desenvolvidas: a estratégia de representação gráfica das situações matemáticas praticamente não era utilizada pelos alunos pesquisados.

Preocupei-me em indagar diretamente se os estudantes costumavam usar gráficos para representar situações matemáticas, no sentido de analisar as questões, através da representação feita. Todos os alunos entrevistados responderam que se limitavam a esboçar os gráficos, quando o seu emprego era naturalmente sugerido, por exemplo, quando do cálculo de áreas ou volumes.

Todos os alunos que cursavam a disciplina Cálculo III foram unânimes em considerar que, para resolver o exercício seguinte, o primeiro ponto seria esboçar o gráfico da região: seja R o paralelogramo delimitado pelas retas *x+y=1, x+y=2, 2x=3y=2 e 2x-3y=5.* Como se calcula a área de R? Qual a maneira mais fácil?

Entretanto, nenhum dos alunos de Cálculo II, pensou em utilizar uma interpretação gráfica para resolver a integral $\int_{-1}^{1} x^3 dx$, estratégia que poderia ter evitado qualquer cálculo, ou, por exemplo, representar graficamente a função integranda ao lidar com a integral $\int_{-1}^{1} x^{-2} dx$, estratégia que poderia, talvez, ter evitado o uso indevido do Teorema Fundamental do Cálculo.

Alguns alunos utilizaram a representação gráfica, num segundo momento, por sugestão nossa, quando, então, foram capazes de confirmar resultados obtidos numericamente, ou detectar os problemas na solução algébrica apresentada.

Esse foi o caso, por exemplo, de Aluísio, que a pedido da pesquisadora, embora alegasse não usar normalmente a estratégia de esboçar gráficos para visualizar as questões, foi capaz de representar graficamente o exercício $\int_{-1}^{1} x^3 dx$, estranhando o resultado zero encontrado, uma vez que estava associando ao gráfico a idéia de área. O aluno teve dificuldades em esboçar o gráfico de $\frac{1}{x^2}$ e após um diálogo longo com a pesquisadora foi capaz de, consultando o caderno, rever o enunciado do Teorema Fundamental do Cálculo, concluindo pela impossibilidade de sua utilização na solução do exercício $\int_{-1}^{1} x^{-2} dx$, além de vislumbrar que se tratava de uma integral imprópria. Aluísio constatou também que os dois exercícios eram apenas aparentemente semelhantes, uma vez que demandavam estratégias distintas para a resolução.

Fabrício, por sua vez, não foi capaz de esboçar nenhum dos dois gráficos. A pesquisadora apresentou-lhe, então os gráficos prontos, mas os mesmos não se constituíram instrumentos para o aluno confirmar a resposta obtida para $\int_{-1}^{1} x^3 dx$, ou perceber o erro cometido ao resolver $\int_{-1}^{1} x^{-2}dx$. Após um longo diálogo entrevistador-entrevistado, o aluno percebeu o erro cometido ao usar o Teorema Fundamental do Cálculo na solução do exercício, mas não foi capaz de vislumbrar qualquer possibilidade de como resolver a questão.

Os resultados da pesquisa confirmam resultados similares de outros estudos, permitindo concluir que, ao lidar com integrais, os alunos ignoram o esboço do gráfico, buscando, quase sempre, a solução algébrica das questões (Eisenberg, 1991).

Para alguns estudantes a estratégia gráfica era eliminada a princípio, pelas dificuldades alegadas de não saber esboçar o gráfico e de falta de visualização espacial.

A falta do desenvolvimento de estratégias visuais impediu, sem dúvida, que de modo geral os alunos de Cálculo III reconhecessem a possibilidade de que $\int_0^1 \int_0^1 (x + y)\, dxdy$ (exercício que será referenciado como ex1) ou, que $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4 - x^2}} (x^2 + y^2)\, dxdy$ (exercício que será referenciado como ex2) pudesse representar um volume e mais ainda ter uma imagem mental do sólido cujo volume estava ali expresso.

Analisando o trabalho desenvolvido com os alunos Bernardo e Lucas, ao lidarem entre outros com o ex1 e o ex2, pude detectar uma certa relutância na realização de investigações gráficas.

Bernardo, por exemplo, levou bastante tempo para associar ao ex1 uma possibilidade de representação do volume de um sólido, alegando ter sido dada maior ênfase pelo professor à possibilidade de interpretação de integrais como representando a massa de uma placa de densidade *z=f(x,y)*. Além disso, foi preciso um tempo para que Bernardo reconhecesse na equação *z=x+y* um plano, embora tivesse sido capaz de descrever o sólido como tendo uma face em *xy* definida pelo quadrado *[0,1] X [0,1]* e o topo dado por *z=x+y*. Ao lidar com o ex2 Bernardo, levou um certo tempo, dialogando com a pesquisadora até identificar a mudança para coordenadas polares como uma possibilidade de solução simplificadora.

Leonardo também, ao lidar com o ex1 não esboçou o gráfico do sólido, embora alegasse, como Bernardo, sempre esboçar gráficos para ajudar a resolver os exercícios. A pedido da pesquisadora buscou descrever o sólido, cujo volume estava calculando: identificou os planos $x=1$ *e* $y=1$ como definindo faces do mesmo, além da face quadrada projeção em *xy*; identificou a superfície $z=x+y$ como um plano inclinado, mas teve dificuldades em desenhá-lo.

O ex2 foi a princípio um desafio para Lívio, que começou a resolvê-lo diretamente, parando para pensar diante dos resultados complicados, indagando primeiramente sobre a necessidade de inversão da ordem de integração, estratégia que havia usado para resolver um outro exercício. Só, então, quando esboçou o gráfico da região de integração, percebeu se tratar de um quarto de uma circunferência, o que indicava que a mudança para coordenadas polares facilitaria a resolução. Facilmente Lívio armou a integral, sendo capaz de identificar a expressão como representando o volume de um sólido, limitado superiomente pelo parabolóide $z=x^2+y^2$.

Constatei, assim, de um lado dificuldades do aluno de imaginar, visualizar imagens e representações gráficas de figuras espaciais, de outro, dificuldades de esboçar os gráficos, mesmo estando, muitas vezes, de posse de sua própria calculadora. Os alunos mostraram-se um pouco acanhados ao lidar com a calculadora, que em nenhum momento foi utilizada para especular valores numéricos, ou testar resultados, independente de seu emprego para traçar gráficos.

Um outro fato mereceu também destaque: solicitados a dar uma interpretação, um sentido para expressões matemáticas, como as dos ex1 e ex2 acima, poucos alunos foram capazes. A linguagem simbólica matemática pode induzir o aluno a realizar procedimentos operacionais, como no ex1, para calcular duas integrais iteradas, ou ainda, fazer uma mudança de variáveis antes (procedimento algumas vezes feito de maneira mecanizada) para facilitar a resolução de uma integral como no ex2. Entretanto, a operação, que pode até ser executada a contento, é destituída de significado. Na realidade, expressão, operação e resultado podem ser destituídos de qualquer significado.

**Resultados globais**

Os estudos estatísticos desenvolvidos com os dados do questionário “Motivações, concepções e estratégias de estudo/aprendizagem dos alunos”, permitiram estabelecer indicadores de estratégias de estudo/aprendizagem dos alunos e indicadores de outros construtos passíveis de serem considerados como fatores explicativos do tipo de estratégias adotadas, como autocontrole, motivações e concepções. Através de tais indicadores foi possível caracterizar a população geral de estudantes de engenharia da instituição pesquisada, cursando disciplinas de Cálculo.

Os indicadores foram tratados estatisticamente através da estimativa de proporções da população total de 885 alunos, a partir da população amostral de 529. As análises foram feitas para a faixa de alunos cujos escores no indicador específico, por exemplo, *estratégias gráfico-numéricas* fosse alto, ou seja, cujos escores variassem de 4 inclusive, a 5 inclusive, (numa escala Likert de 5 pontos), valores caracterizadores de que o aluno concordava, ou concordava fortemente com afirmativas de uso de recursos gráficos na solução de questões de Cálculo que apresentassem novidades ou dificuldades.

Os resultados estatísticos permitiram afirmar, com 95% de certeza, que, apenas um percentual entre 12,9% e 19,2% da população de 885 alunos de Cálculo dos cursos de engenharia da instituição pesquisada (no semestre de realização da pesquisa), mostrava-se favorável ao emprego de estratégias de representação gráfica, ou ao uso de especulações numéricas, ao lidar com questões matemáticas que apresentam um certo grau de novidade, ou dificuldade.

Os resultados talvez se expliquem a partir do fato que a proporção de alunos que caracteriza seu estudo de Cálculo, como tendo uma ênfase mais teórica, situa-se entre 6,8% e 11,7%, enquanto uma proporção entre 45,6% e 54,2% alega adotar estratégias de aprendizagem com foco na resolução de exercícios, ou seja, adota uma ênfase mais prática de estudo. A estratégia de aprendizagem de Cálculo com uma ênfase apenas prática, na resolução de exercícios, pode impedir que estratégias diferenciadas, em particular gráfico-numéricas sejam empregadas, uma vez que a meta imediata torna-se resolver o exercício e, não, discutir acerca das possibilidades de solução do mesmo. Para que o exercício de Cálculo impulsione a aprendizagem, o exercício precisa se transformar em instrumento de diálogo teórico, tornando-se meio e não fim em si mesmo (Frota, 2003).

Estudos de regressão desenvolvidos, na tentativa de investigar fatores que influenciam a adoção de estratégias gráficas pelos alunos de engenharia ao lidarem com questões de cálculo, possibilitaram constatar que o uso de *estratégias gráfico-numéricas* (*EG*) é uma configuração de ação influenciada por atitudes de *autocontrole* (*AC*), bem como por *motivação para a engenharia* (*ME*) e por uma *concepção* de matemática *coesa* (*CMC*). Obtive a seguinte equação de regressão: $EG = 0,329AC + 0,213ME + 0,147CMC$ .

O modelo apresenta limitações, uma vez que explica pouco a variância da amostra ($R^2$ = 18%). Trata-se, assim, de um resultado preliminar, mas que confirma dados obtidos nas entrevistas conduzidas com 19 alunos. Durante tais entrevistas, os alunos que, incentivados a pensar soluções para os exercícios propostos a partir de análises gráficas, foram capazes de confirmar resultados obtidos por outros métodos, ou corrigir equívocos nas soluções anteriores, são alunos que demonstraram, ao longo de todo o trabalho desenvolvido, exercer um autocontrole do processo de estudo/aprendizagem, ao mesmo tempo, que manifestavam sua satisfação em estudar engenharia, bem como o seu gosto pela matemática.

**Considerações finais**

Ao desenvolver uma pesquisa com o objetivo de mapear as várias estratégias de aprendizagem de cálculo de alunos de engenharia, um fato tornou-se relevante: mesmo aqueles alunos que estavam de posse de suas calculadoras gráficas, sabendo manipulá-las com desenvoltura, mostraram-se reticentes quanto ao uso de estratégias gráficas.

O fato suscita um questionamento acerca dos motivos dessa resistência dos alunos ao uso de gráficos como uma estratégia de aprendizagem matemática.

Arcavi (2003), a partir de uma formulação de Eisenberg e Dreyfus, propõe classificar as dificuldades acerca da visualização em matemática em três categorias principais: cultural, cognitiva e sociológica. Tais categorias com certeza podem ser tomadas para explicar a relutância dos alunos de engenharia pesquisados, quanto à utilização da linguagem gráfica para pensar e fazer matemática.

A pesquisa aqui relatada e outras investigações que tenho desenvolvido, bem como observações decorrentes de minha prática, principalmente como professora de Cálculo de cursos de engenharia, permitiram evidenciar dificuldades de representação visual entre os alunos, que podem ser classificadas de acordo com as categorias mencionadas.

Questões de ordem cognitiva podem impedir o uso da linguagem gráfica para lidar com o cálculo, uma vez que para ser facilitadora e não se tornar um obstáculo, o seu uso pressupõe que alunos e professores se apossem de novas tecnologias, ainda por vezes ausentes da escola brasileira, uma vez que calculadoras gráficas têm um preço elevado, pouco compatível com a realidade econômico-financeira dos alunos, e por motivos de mesma ordem o número de computadores por aluno é ainda reduzido nas escolas, mesmo nas universidades. Essa questão, de ordem cognitiva a princípio - lidar com tecnologias -, pode se explicar a partir de questões socioeconômicas.

Questões culturais, relativas a concepções e valores, que relegam a um segundo plano um tratamento visual de um problema matemático, influenciam fortemente a prática do professor de matemática. Apesar das diretrizes curriculares e pedagógicas apontarem a importância de que os alunos sejam capacitados para transitar entre várias formas de representação de idéias matemáticas, apesar da ênfase dada atualmente à incorporação das tecnologias computacionais no ensino, tenho percebido tanto por parte de professores, quanto de alunos uma certa reserva quanto ao uso, principalmente de formas menos convencionais, para especular, investigar e mesmo resolver problemas. Sob a ótica do professor a posição de reserva pode se justificar, considerando que, de modo geral, o professor não foi formado para ter uma postura investigativa diante da matemática. A justificativa alegada para uma formação com este viés é sempre a mesma, de que abordagens de ensino mais especulativas pressupõem um maior tempo de dedicação a cada conteúdo e seriam inviabilizadas, considerando-se a extensão dos programas das disciplinas. O currículo de matemática da escola brasileira, aparentemente denso em conteúdo, pode estar se tornando um obstáculo para o desenvolvimento de aulas mais investigativas: a extensão de conteúdo, por exemplo, de uma disciplina de Cálculo, pode estar sendo a desculpa procurada para não se pensar aulas mais criativas, que possibilitem especulações diferenciadas, através, por exemplo, do uso de gráficos.

Arcavi (2003) aponta como dificuldade sociocultural acerca da visualização o fato da sala de aula ser um espaço multicultural, com alunos advindos de diferentes culturas, algumas enfatizando, outras, não, o uso da linguagem visual. Acrescento um outro fator sociológico, ou, melhor dizendo, demográfico. A sala de aula de Cálculo é superlotada: 50, 60 alunos, costumam estar confinados num espaço insuficiente para a utilização de metodologias, por exemplo, de trabalho em grupo, que possam permitir o acompanhamento dos estudantes experimentando formas variadas de visualizar e representar matemática.

Um conjunto de fatores conspira para que a sala de aula continue a se mover sob a batuta invisível de um maestro que define a priori como melhor forma de representação a verbal-algébrica; a mais lógica, seqüencial, analítica e, portanto, "matematicamente correta" ou "circunstancialmente correta" face aos constrangimentos econômico-sociais, dentre outros. Dessa forma os alunos, mais uma vez são podados nas suas iniciativas de procurar formas visuais de representação de suas idéias matemáticas. Representações visuais, ainda que não convencionais, poderiam ser um bom começo para se avançar, com vistas a construções de conceitos tão complexos quanto os de funções, limites, continuidade, derivadas, integrais.

Uma mudança, a meu ver, ainda lenta, começa a acontecer, induzida principalmente pelo próprio livro texto, que se beneficia dos recursos computacionais para trazer para o leitor um maior número de gráficos e problemas de análises gráficas, bem como exercícios para serem resolvidos utilizando recursos gráfico-numéricos. O professor tem de selecionar um livro didático, dentre um número razoável de novos livros de Cálculo, lançados anualmente no mercado brasileiro e, ao adotá-lo, o professor terá necessariamente que se defrontar com situações matemáticas que exigem uma abordagem gráfico-numérica para serem resolvidas[5].

Entendo que é principalmente através do texto didático que as estratégias gráficas começam a se incorporar no dia a dia da sala de aula, transformando-se em estratégias poderosas de aprendizagem matemática para a ilustração de resultados simbólicos, para corrigir resultados tratados simbolicamente de maneira errada, possibilitando que os alunos se envolvam na tarefa de retomar e fundamentar conceitos básicos do Cálculo, com vistas a resolver problemas de matemática e de engenharia.

Mas o maior desafio, sem dúvida, é incorporar na sala de aula novas estratégias de ensino, em especial estratégias gráfico-numéricas, com vistas à implementação de atividades de cunho mais investigativo, que viabilizem o desenvolvimento dos processos matemáticos de busca de padrões, de sistematização, abstração e generalização. Nessa linha tenho trabalhado, juntamente com outros colegas da PUC Minas, desenvolvendo práticas investigativas no ensino de Cálculo, ao mesmo tempo, que como grupo de pesquisa, temos desenvolvido investigações acerca de alunos desenvolvendo atividades matemáticas investigativas.

Palavras chave: ensino de cálculo; estratégias de aprendizagem; visualização em matemática.

[5] Por exemplo: Stweart, James, Cálculo volumes 1 e 2, Thompson Learning, 2001.

Referências Bibliográficas

ARCAVI, Abraham, The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, n.52, p.215-241, 2003.

ASPINWALL, Leslie e MILLER, L. Diane. Diagnosing conflict factors in calculus through students' writings: One teacher's reflections. Journal of Mathematical Behavior,
n.20, p.89–107, 2001.

BERRY, John S., NYMAN, Melvin A. Promoting student's understanding of the calculus. Journal of Mathematical Behavior, n.22, p.481–497, 2003.

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: ensino médio. Brasília: MEC, 1999, 364p.

BRASIL, MEC. *Diretrizes Curriculares para Cursos de Matemática*. Parecer CES1302/2001. Disponível em http://www.mec.gov.br/sesu/ Acesso em 09 de abril de 2003.

GRAY Eddie, TALL, David. Relationships between embodied objects and symbolic procepts: an explanatory theory of success and failure in mathematics, *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 65–72. Utrecht, The Netherlands, 2001.

FROTA, M. Clara R. *O pensar matemático no ensino superior:* concepções e estratégias de aprendizagem dos alunos.2002. 287p.Tese (Doutorado em Educação) – UFMG, Belo Horizonte.

FROTA, M. Clara R. O papel do exercício no ensino/aprendizagem de matemática. Conferência Interamericana de Educação Matemática, XI, Blumenau, 2003.

EISENBERG, Theodore. Functions and Associated Learning Difficulties. In: TALL, D. (Ed). *Advanced mathematical thinking.* Netherlands: Kluwer, 1991. p. 141-152.

GROUWS, D. A. (Ed). Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: Macmillan, 1992. 771p.

NCTM, *Standards of School Mathematics*. Disponível em htt://www.nctm.org/document/
/chapter3/rep.htm. Acesso em 20 de janeiro de 2004.

PINTO, Márcia, TALL, David. Building formal mathematics on visual imagery: a case study and a theory. *For the Learning of Mathematics,* v1, n. 22, p. 2–10, 2002.

TALL, David. (Ed). *Advanced mathematical thinking*. Netherlands: Kluwer, 1991, 289p.

TALL, David. Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. In L.M. Carvalho L.C. Guimarães *História e Tecnologia no Ensino da Matemática*, v. 1, pp. 1-28, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.

RASSLAN, Shakar, David TALL. Definitions and images for the definite integral concept. In: Cockburn A., Nardi E. (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Norwich, UK, v.4, p.89–96, 2002.

SKEMP, Richard. R. *The Psychology of Learning Mathematics.* Penguin Books, 1986.

# O ENSINO DE CÁLCULO:
# UM PROBLEMA DO ENSINO SUPERIOR DE MATEMÁTICA?

**Wanderley Moura Rezende**

IM-UFF / NEPEM-UFF / rezende@vm.uff.br

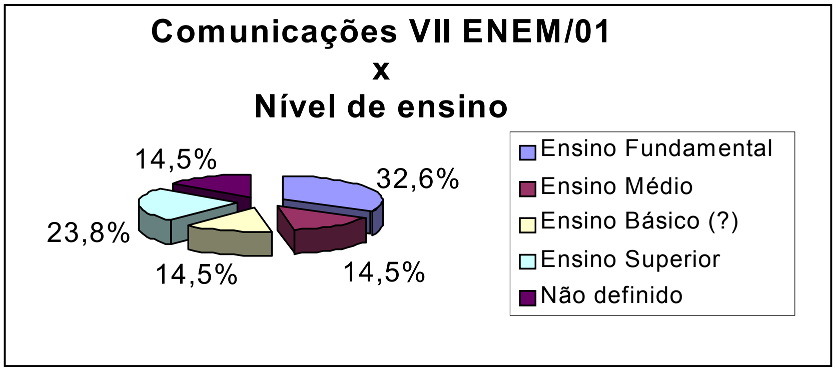
## Resumo

Algumas tentativas de resolver, ou pelo menos, amenizar, as dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo têm sido realizadas tanto no campo pedagógico quanto no âmbito da pesquisa. Muitas dessas ações, inseridas no próprio contexto do ensino superior de Cálculo, partem do pressuposto que essas dificuldades de aprendizagem são de natureza psicológica, internas ao sujeito aprendiz. No entanto, contrariando esta tendência, esta pesquisa pretende mostrar que parte significativa dos problemas de aprendizagem "do atual" ensino de Cálculo é de natureza essencialmente epistemológica, está além dos métodos e das técnicas de ensino, sendo inclusive anterior ao seu próprio tempo de realização.

## 1. Introdução

É notório o crescimento, em termos nacionais, do número de pesquisas em Educação Matemática no ensino superior. A razão para este crescimento, conforme nos revela Nasser (2001), deve-se a vários fatores: a introdução do uso de novas tecnologias no ensino, o aumento do número de pesquisadores em Educação Matemática nas instituições de ensino superior e as recentes reformas curriculares dos cursos de Licenciatura em Matemática.

Levantamento estatístico realizado recentemente, tendo como base o universo das pesquisas realizadas e apresentadas em forma de comunicações científicas no VII Encontro Nacional de Educação Matemática – realizado na UFRJ, em julho de 2001 - nos dá evidência do significativo volume de pesquisas no âmbito do ensino superior: este representa quase um quarto do universo total.




Os trabalhos de pesquisas desenvolvidos no âmbito do ensino superior têm apresentado uma profunda conexão com diversas outras linhas de pesquisa já consolidadas na Educação Matemática como, por exemplo, *Argumentação e Provas, Visualização e Representação, Modelagem e Resolução de Problemas, Pensamento Algébrico, Pensamento Matemático Avançado, Novas Tecnologias no Ensino, Avaliação, Linguagem, Formação de Professores, Concepções e Crenças de Professores e/ou Alunos*, entre outras. Mas um problema característico do ensino superior tem se tornado o centro temático das discussões acerca desses trabalhos de pesquisas em Educação Matemática relacionados ao ensino superior: as dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo.

Com efeito: no I SIPEM (realizado em Serra Negra, em novembro de 2000) oito, dos onze trabalhos apresentados, estavam diretamente relacionados ao ensino de Cálculo; no VII ENEM (realizado na UFRJ, em julho de 2001), mais especificamente no grupo de trabalho *"Educação Matemática no Ensino Superior"*, cinco, dos onze trabalhos apresentados estavam relacionados a este tema; e, mais recentemente, no II SIPEM, (realizado em Santos, em novembro de 2003) nove, dos quinze trabalhos apresentados, estavam relacionados ao tema em destaque.

Ao que parece, as dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo constituem ainda um vasto campo de pesquisa no ambiente pedagógico do ensino superior de matemática. O problema relacionado ao ensino de Cálculo persiste e é, sem dúvida, um dos principais problemas no ensino superior de matemática. Mas, estaria realmente a solução e/ou a causa deste problema neste nível de ensino? Ou de outro modo: estaria no próprio espaço-tempo de sua realização didática a solução e/ou a causa das dificuldades de aprendizagem do ensino de Cálculo? Esta é, com efeito, a principal questão que colocamos na mesa para a discussão. Antes porém analisemos mais de perto o problema.

**2.** A "crise" no ensino de Cálculo

Barufi (1999), em sua tese de doutorado, nos revela alguns dados alarmantes da tão propalada "*crise no ensino de Cálculo*": o índice de não-aprovação em cursos de Cálculo Diferencial e Integral oferecidos, por exemplo, aos alunos da Escola Politécnica da USP, no período de 1990 a 1995, varia de 20% a 75%, enquanto que no universo dos alunos do Instituto de Matemática e Estatística o menor índice não é inferior a 45% - isto é, não se aprovou mais do que 55% em uma turma de Cálculo no período citado. No que diz respeito à UFF, instituição onde leciono, a variação do índice de não-aprovação se encontra na faixa de 45% a 95%, sendo que, para o Curso de Matemática, este não é inferior a 65% (Rezende, 2003a, p.2).

Tal situação de desconforto com relação ao ensino de Cálculo não é local e nem característica exclusiva da UFF e da USP: basta correr os olhos, por exemplo, nos Anais dos Encontros Nacionais de Educação Matemática e dos Seminários Internacionais de Pesquisa em Educação Matemática e observar a grande quantidade de trabalhos sobre este tema advindos de vários pontos do país. O problema relativo ao ensino de Cálculo se apresenta na grande maioria das universidades brasileiras. Engana-se porém quem acredita que o problema é cultural e/ou específica do sistema educacional brasileiro. Em verdade, o problema vai além de nossas fronteiras e se encontra presente também no âmbito educacional dos países "desenvolvidos". Trabalhos sobre dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo têm sido publicados e recebidos merecidos destaques por parte da literatura especializada desses países.

David Tall (1976), por exemplo, tem sido (desde a década de 70) um dos principais articuladores da área de pesquisa "*pensamento matemático avançado*", cujas questões giram em torno das dificuldades encontradas nas aprendizagens dos conceitos básicos do Cálculo, tendo a psicologia cognitiva como pano de fundo para as suas análises epistemológicas.

Outro exemplo internacional desta inquietação foi o movimento em prol da reforma do ensino de Cálculo, iniciado na década de 80, e que ficou conhecido por "*Calculus Reform*". Tal movimento, que teve o matemático Peter Lax como um dos tutores, atacava os cursos de

Cálculo da época e tinha como características básicas o uso de tecnologias para o aprendizado de conceitos e para a resolução de problemas do Cálculo.

Poderíamos citar aqui outras referências internacionais que dão evidência da universalidade deste problema – Sierpinska (1987), Tall (1990), Artigue & Ervynck (1992), entre outras: todas bem conhecidas em nossa academia. –, preferimos, no entanto, insistir na questão que, efetivamente, motiva todas as pesquisas acerca deste tema: quais são efetivamente as raízes das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo?

## 3. Em busca de uma solução...

Antes de qualquer coisa cabe ressaltar que o problema relativo às dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo continua muito atual: a predominância deste tema nas apresentações das pesquisas no Grupo de Trabalho Educação Matemática no Ensino Superior do II SIPEM (2003) dão evidências disso. Em verdade, não precisaríamos nos reportar a evidências de caráter científico para elucidar a contemporaneidade do problema, bastaria apenas entrarmos em uma sala de aula de uma disciplina inicial de Cálculo.

Diante da complexidade do problema, têm sido muitos variados os encaminhamentos apresentados pelos professores desta disciplina e pesquisadores da área.

No ambiente pedagógico, por exemplo, a grande maioria dos professores atribui as razões das dificuldades de aprendizagem aos próprios alunos, isto é, na *"falta de base"* que estes possuem para a realização do curso. Em vista disso, tem sido bastante usual nas instituições de ensino superior a realização de cursos "preparatórios" para um curso inicial de Cálculo. É o caso, por exemplo, dos cursos de "*Cálculo Zero*", "*Pré-Cálculo*", "*Matemática Básica*", já tão familiares no nosso meio acadêmico.

Tais cursos, independentemente do nome que tenham, têm como meta principal resolver o problema da "*falta de base*" do aluno: ensina-se, costumeiramente, nesses cursos, toda aquela parte da matemática básica necessária à realização técnica do Cálculo: polinômios, fatoração, relações e identidades trigonométricas, funções reais usuais (modulares, polinomiais, exponenciais, logarítmicas e trigonometrias), produtos notáveis, simplificações e cálculos algébricos em geral etc. É verdade que falta tudo isto ao nosso aluno recém-egresso do ensino médio. Mas também é verdade que a tal "*falta de base*" não é um problema específico do ensino de Cálculo. A "*base*" que falta aqui, para o ensino de

Cálculo, também faz falta para o ensino de outras disciplinas do curso superior, e nem por isso os seus resultados são tão catastróficos como os do Cálculo. Não estamos negando com isso que a falta de "*base*" por parte do aluno dificulte o desenvolvimento operacional das técnicas do Cálculo, mas, isto sim, que existem, em verdade, outras *"ausências",* específicas do Cálculo, que se tornam indispensáveis para a construção de seus conceitos e resultados. O campo semântico das noções básicas do Cálculo tem muito mais a ver com as noções de "infinito", de "infinitésimos", de "variáveis", do que com "fatoração de polinômios", "relações trigonométricas", "cálculos algébricos" etc.

Assim, pode-se dizer que a "*preparação*" que se deve fazer para um curso de Cálculo é bem outra, e não de natureza algébrica como, aliás, já tem sido feita (mesmo com insucessos) desde o ensino básico de matemática. Revisar conceitos e resultados algébricos para melhor ensinar a "*técnica*" do Cálculo é, sem dúvida, uma forma de camuflar as dificuldades de aprendizagem que são inerentes ao próprio conhecimento do Cálculo. Interessante observar que não se escuta falar pelos corredores da academia que alguém não aprende geometria por que não sabe álgebra; ao contrário, propõe-se um ensino de geometria cada vez mais mergulhado no seu próprio campo semântico e menos dependente do da álgebra. Não estamos com isso querendo desmerecer a importância dos conceitos e resultados algébricos na construção do conhecimento do Cálculo [6] (ou mesmo da geometria), mas, isto sim, redimensionar a sua forma participação. A álgebra deve participar da tecedura do conhecimento do Cálculo como "*meio*", como elemento básico, e não como fim; não deve ser, absolutamente, um elemento complicador no ensino de Cálculo e *"roubar a cena"* das idéias e das dificuldades de aprendizagem do Cálculo. Diante disso, resta saber então qual é o curso de Cálculo que se quer? Aquele em que prevalece a técnica? Ou aquele em que se busca a construção dos significados? E, isto posto, definir qual deve ser então a melhor forma de preparação para um curso superior de Cálculo?

Há quem julgue, no entanto, que o problema relativo ao ensino de Cálculo é de natureza mais simples: as dificuldades de aprendizagem são decorrentes do processo didático, isto é, a solução reside em se encontrar uma forma apropriada para se ensinar a disciplina de Cálculo. O movimento "Calculus Reform", citado por nós alguns parágrafos acima, é, por exemplo, uma clara demonstração disto: acreditam seus seguidores que a articulação entre as

[6] Veja por exemplo a revisão histórica do Cálculo que é feita em (Rezende, 2003a).

abordagens numérica, algébrica e gráfica, através de atividades com softerwares matemáticos, resolveriam por completo os problemas de relativos ao ensino de Cálculo. Reflexos deste movimento podem ser percebidos recentemente em nossas universidades brasileiras: a construção de laboratórios informatizados e a introdução de softwares matemáticos no ensino de Cálculo têm sido a tônica das mais recentes propostas didáticas para esta disciplina.

Surgem assim duas questões diametralmente opostas em relação ao uso do computador no ensino de Cálculo: seria então o uso de computadores a redenção para o ensino de Cálculo? Ou seria o computador apenas um subterfúgio sofisticado e fascinante, imposto pelo discurso da modernidade, que mascara a origem das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo?

Primeiramente, é preciso que se diga que *"o uso de computador no ensino de..."* não é uma questão específica do Cálculo: a mesma questão tem sido feita para outras áreas do ensino de matemática. Além disso, precisamos avaliar com muita serenidade e equilíbrio essas questões. Não podemos perder de vista que o computador, assim como qualquer outra máquina, possui suas limitações, sejam estas de naturezas técnicas ou mesmo pedagógicas. Portanto, ao trabalharmos com tal instrumento, precisamos, assim como os cientistas em seus laboratórios de pesquisa, ter a noção exata do seu uso, de sua finalidade, de suas potencialidades e limitações. Todas essas variáveis aqui apresentadas em relação ao uso do computador devem estar dimensionadas por uma meta maior e exterior ao próprio uso do computador: o próprio conhecimento a ser ensinado – no nosso caso, o Cálculo. Logo, a questão que se apresenta não é se *"se deve usar ou não o computador no ensino de Cálculo"*, mas ***"como"*** e ***"quando"*** usar esta ferramenta. Assim colocada, diríamos que a resposta para esta questão é então outra questão, de caráter mais fundamental e já mencionada neste texto: qual é o projeto de Ensino de Cálculo que se tem, ou que se quer?

Outra corrente, muito expressiva na academia, procura justificar os problemas relativos ao ensino de Cálculo no âmbito da psicologia cognitiva: acreditam, em geral, que o problema é de natureza psicológica, isto é, os alunos não aprendem por que não possuem *estruturas cognitivas* apropriadas que permitam assimilar a complexidade dos conceitos do Cálculo. É o caso, por exemplo, do grupo de pesquisadores liderados por David Tall e que desenvolvem trabalhos na área de *"pensamento matemático avançado"*.

Sem desmerecer os grandes esforços que esse grupo tem realizado na busca da compreensão das dificuldades correlatas ao *"pensamento matemático avançado",* identificamos, no entanto, no desenvolvimento de suas pesquisas uma submissão da análise das questões de naturezas epistemológicas ao domínio da psicologia. Este "psicologismo" das análises epistemológicas tem dado ênfase ao par sujeito-aprendente/objeto do conhecimento em detrimento de outro par, não menos importante: professor/conhecimento.

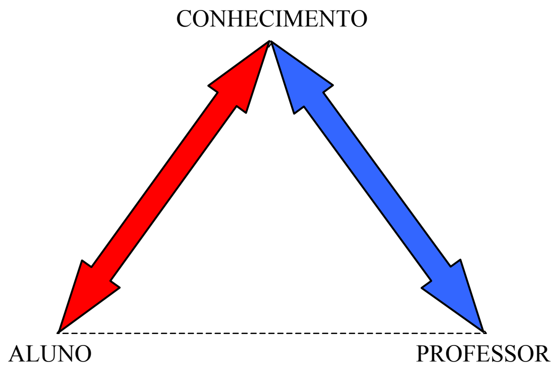


Figura 2 – Triângulo fundamental das análises epistemológicas

De fato, usando a alegoria geométrica anterior para representar as relações fundamentais entre os três elementos essenciais (Professor-Conhecimento-Aluno) de qualquer processo de ensino-aprendizagem, podemos dizer que as análises epistemológicas das recentes pesquisas sobre o ensino de Cálculo têm se caracterizado majoritariamente pela centralidade no par **Aluno/Conhecimento** e, pelo esquecimento total do eixo **Professor/Conhecimento**. Cremos que devemos focar, sem o habitual desprezo, o par Professor/Conhecimento. Afinal, não cabe ao professor o comando (ou orientação) do processo ensino-aprendizagem? Não é ele o responsável (direto ou indiretamente) pela escolha do programa, dos textos e instrumentos a serem utilizados, bem como forma como os alunos serão avaliados? É preciso que se diga que muitos cursos de Cálculos já se encontram "prontos" (na mente dos docentes responsáveis pela cadeira) antes mesmo da realização de sua primeira aula [7]. Torna-se, portanto, urgente explicitar esses pensamentos e promover uma franca discussão a respeito deles.

[7] Ainda com respeito à alegoria do triângulo, pode-se observar que o eixo Professor-Aluno, apesar de muito comentado nas pesquisas sobre o ensino de Cálculo, não é do âmbito específico do mesmo. A ênfase que se pretende dar neste artigo é exatamente sobre as questões de natureza **epistemológica e específica do ensino de Cálculo**. Esta reflexão de natureza epistemológica é, sem dúvida, uma das principais metas deste trabalho.

Isto posto, percebe-se que, na tentativa de investigar e de solucionar os problemas relacionados ao ensino de Cálculo, os encaminhamento e as pesquisas têm se realizado, em linhas gerais, nos terrenos da didática e da psicologia cognitiva. Não obstante, pensamos de forma diferente: acreditamos que grande parte das dificuldades de aprendizagem no ensino de Cálculo é essencialmente de **natureza epistemológica.** Pode-se dizer ainda mais: as raízes do problema estão *além dos métodos e das técnicas*, sendo inclusive *anteriores* ao próprio espaço-tempo local do ensino de Cálculo.

De fato, os resultados que encontramos em nossa tese de doutorado (Rezende, 2003a), ratificam este nosso pensamento. Neste trabalho realizamos, a partir do entrelaçamento dos fatos históricos e pedagógicos, um *mapeamento* [8] das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo e, como resultado desse procedimento, pôde-se observar a existência de um único lugar-matriz para as dificuldades estudadas. **O da omissão/evitação das idéias básicas e dos problemas construtores do Cálculo no ensino de Matemática em sentido amplo.**

De fato, a ausência das idéias e problemas essenciais do Cálculo no ensino básico de matemática, além de ser um contra-senso do ponto de vista da evolução histórica do conhecimento matemático, é, sem dúvida, a principal fonte dos obstáculos epistemológicos que surgem no ensino superior de Cálculo. Assim, fazer emergir o conhecimento do Cálculo do "esconderijo forçado" a que este está submetido no ensino básico é, sem dúvida, o primeiro grande passo para resolvermos efetivamente os problemas de aprendizagem no ensino superior de Cálculo.

Além disso, no próprio ensino superior de Cálculo também sentimos falta de certas idéias e problemas construtores do Cálculo. Em verdade, este esvaziamento semântico da disciplina de Cálculo é, ao mesmo tempo, causa e efeito da crise de identidade pela qual passa o ensino superior de Cálculo.

Assim, pode-se afirmar que o *lugar-matriz* das dificuldades de aprendizagem do ensino de Cálculo está presente em ambos os níveis de ensino. Façamos então uma breve análise a este respeito.

---

[8] A apresentação dos resultados propriamente ditos obtidos com o mapeamento das dificuldades de aprendizagem de natureza epistemológica do ensino de Cálculo será omitida neste artigo, mas pode ser vista com detalhes em (Rezende, 2003a e 2003b).

**O lugar-matriz no ensino básico**

Cabe destacar inicialmente que a maior parte do território do *lugar-matriz* das dificuldades de aprendizagem do ensino superior de Cálculo encontra-se no ensino básico. A evitação/ausência das idéias e problemas construtores do Cálculo no ensino básico de matemática constitui, efetivamente, o maior obstáculo de natureza epistemológica do ensino de Cálculo, e porque não dizer do próprio ensino de matemática. É incompreensível que o Cálculo, conhecimento tão importante para a construção e evolução do próprio conhecimento matemático, não participe do ensino de matemática. Se a geometria e a aritmética representam os "pés", isto é, a base do conhecimento matemático, o Cálculo é então, metaforicamente falando, a sua *espinha dorsal*.

É muito usual afirmar-se no meio acadêmico que o ensino básico de matemática é (ou pelo menos deveria ser) processado em três vias: a via da aritmética, a via da geometria e a via da álgebra. Uma pergunta que surge naturalmente dessa questão é "cadê a via do Cálculo?". No entanto, construir a quarta via (a via do Cálculo) no ensino básico de matemático contradiz a própria natureza epistemológica do Cálculo como elemento integrador na construção histórica do conhecimento matemático. Assim, o que propõe aqui está muito além de simplesmente construir a quarta via. O que se quer, isto sim, é possibilitar ao Cálculo exercer no ensino básico de matemática o mesmo papel epistemológico que ele realizou no processo de construção do conhecimento matemático no âmbito científico. Só que para que isto ocorra será também necessária uma articulação do ensino de matemática com outras áreas do conhecimento como, por exemplo, a física, mais precisamente, a mecânica. Desse modo, as três vias – a da aritmética (número), a da geometria (medida) e a da álgebra (variável) – juntas com a via da mecânica (movimento), devem ser articuladas e tecidas a partir das idéias e problemas construtores do Cálculo em benefício, não só de uma preparação de natureza epistemológica para um futuro ensino superior de Cálculo, mas, sobretudo, para a consolidação e construção das significações propostas no ensino básico tanto de matemática quanto de física.

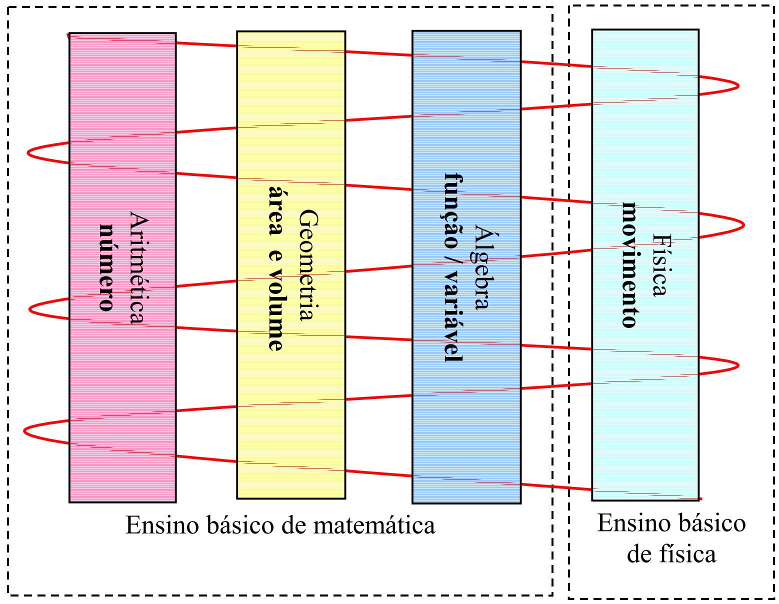



Figura 3

Por outro lado, é notório que estão presentes alguns resultados do Cálculo no ensino básico de matemática: cálculo de áreas de círculos e de volumes de sólidos de revolução, soma de uma progressão geométrica infinita, representação decimal dos números reais etc. O que não está presente é o Cálculo. As idéias e as soluções dos problemas do Cálculo estão, como já afirmamos, submersas, escondidas, e os seus resultados são na maioria das vezes ensinados de forma camuflada: a área do círculo e a soma de uma progressão geométrica infinita tornam-se simplesmente fórmulas algébricas, a transformação das dízimas periódicas em frações é realizada por uma regra da aritmética etc.

Assim, para essa emersão e preparação do Cálculo no ensino básico, duas linhas diretrizes se constituem naturalmente: o problema da variabilidade e o problema da medida – que são, efetivamente, as questões fundamentais do Cálculo. Há de se ressaltar, entretanto, que no problema da medida existem propriamente dois problemas distintos e intrinsecamente relacionados: o processo geométrico da medida (procedimento de cálculo de áreas e volumes) e o processo aritmético da medida (o valor numérico da medida, o número real). Em (Rezende, 2003a) são explicitados alguns dos conteúdos próprios de cada uma dessas linhas de inserção do Cálculo no ensino básico, bem como algumas sugestões de atividades didáticas de emersão de suas idéias e problemas construtores.

**O lugar-matriz no ensino superior**

A disciplina inicial de Cálculo, tal como está estruturada, se encontra, semanticamente, muito mais próxima da Análise do que do próprio Cálculo. Não é à toa que esta disciplina é considerada por um grande número de professores como uma pré-Análise, ou, mais especificamente, como uma abordagem "mais intuitiva" da Análise de Cauchy-Weierstrass em que se põe evidência nas técnicas de calcular limites, derivadas e integrais. Essa atitude predominante no ensino de Cálculo é caracterizada então por uma posição híbrida: por um lado, dá-se ênfase à organização e à justificação lógica dos resultados do Cálculo, e, por outro, realiza-se um treinamento exacerbado nas técnicas de integração, no cálculo de derivadas e de limites. Esta formatação analítica e algébrica da disciplina de Cálculo no ensino superior é, sem dúvida, uma das principais fontes da crise de identidade que mencionamos no início desta conclusão.

Assim, diante dessa crise de identidade do ensino de Cálculo, faz-se urgente redimensionar o paradigma de ensino de Cálculo: nem a preparação para um ensino posterior de Análise e nem a "calculeira desenfreada" [9] servem como meta para um curso inicial de Cálculo; precisa-se voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo, os seus significados, os seus problemas construtores e suas potencialidades. Tão importante quanto saber usar as regras de derivação e as técnicas de integração, é saber os seus significados, as suas múltiplas interpretações, sua utilidade em outros campos da matemática e em outras áreas do conhecimento.

Diante disso, é preciso "re-calibrar" a disciplina de Cálculo em relação ao par técnica/significado. Mas também é preciso "re-calibrar" a disciplina de Cálculo em relação ao par sistematização/construção. Isto é, em vez de se construir as resultados e conceitos do Cálculo no nível do conhecimento já sistematizado, deve-se ter em mente a construção das redes de significações das idéias básicas para, num momento posterior, buscar a sistematização dos elementos dessa rede.

[9] Com "calculeira desenfreada" queremos dizer: a excessiva ênfase dada às técnicas de cálculos de limites, de derivadas e de antiderivadas.

## 4. Considerações finais

Assim, ao final deste artigo, somos levados a acreditar que para superar a tão propalada crise do ensino de Cálculo faz-se necessário rediscutir o seu papel, re-calibrar a sua realização didática no ensino superior e, sobretudo, promover uma emersão das idéias básicas do Cálculo no ensino básico de matemática. O escondimento e a camuflagem das idéias básicas do Cálculo são, de fato, a principal fonte de obstáculos epistemológicos relativos às idéias básicas do Cálculo.

Pode-se afirmar que o problema do ensino de Cálculo transcende o espaço-tempo local do ensino de Cálculo. Assim, cremos que, ao permitir o Cálculo participar efetivamente da tecedura do conhecimento matemático do ensino básico, as dificuldades de aprendizagem do ensino superior de Cálculo serão em grande parte superadas - tanto quanto as do próprio ensino de matemática - e perceber-se-á, conforme nos disse certa vez Edgard Allan Poe, que *"É apenas por faltar algum degrau aqui e ali, por descuido, em nosso caminho para o Cálculo Diferencial [e Integral], que este último não é coisa tão simples quanto um soneto de Mr. Solomon Seesaw"*.

**Palavras-chave:** ensino de Cálculo; dificuldades de aprendizagem; epistemologia; ensino superior.

## Referência bibliográfica

ARTIGUE, M. & ERVYNCK, G. (Eds.) Seventh International Congress on Mathematical Education. Proceedings of Working Group 3 on Student´s Difficulties in Calculus. Québec: Collège de Sherbrooke,1992.

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 1999.

NASSER, Lilian. *Educação Matemática no ensino superior: questões a debater*. Mesa redonda "Educação Matemática no ensino superior" do VII ENEM. Rio de Janeiro: UFRJ, 2001.

REZENDE, Wanderley Moura. *A pesquisa em educação matemática e o saber matemático em sala de aula*. Mesa redonda de abertura do iv spem. Conservatória: sbem-rj, 2002.

**REZENDE,** Wanderley Moura. *O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica.* Tese de doutorado. São paulo: usp, 2003a.

REZENDE, W. M. *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica.* In Machado, N. & Ortegoza, M. Linguagem, conhecimento e ação. Coleção Ensaios Transversais, 23. São Paulo: Livraria Escrituras Editora, 2003b.

SIERPINSKA, A. *Humanities Students and Epistemological Obstacles Related to Limits.* Educational Studies in Mathematics, 18, p. 371-397, 1987.

TALL, D. e VINNER, S. *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity*. Educational Studies in Mathematics, 12, p. 151-169. 1976.

TALL, D. Inconsistences in the Learning of Calculus and Analysis. Focus on Learning Problems i n Mathematics, 12(3&4), p.49-63, 1990.

# EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR

Silvia Dias Alcântara Machado, PUC-SP, silviaam@pucsp.br

**RESUMO** :
Este texto apresenta sumariamente a atual situação da educação matemática no ensino superior no brasil, expondo a relação entre as comunidades de educadores matemáticos e de especialistas em matemática tanto no nível oficial quanto de convivência acadêmica. A seguir o texto passa à descrição do que se entende por pensamento matemático avançado, conhecido internacionalmente pela sigla atm, segue relacionando algumas questões ligadas à pesquisas de atm e à álgebra , terminando por situar as pesquisas de educação matemática sobre álgebra linear no panorama da atm.

**Palavras-chave :** ATM, pesquisas, Álgebra Linear

## A RELAÇÃO ENTRE OS MATEMÁTICOS E EDUCADORES MATEMÁTICOS

Não é novidade, a desconfiança que professores do ensino superior , principalmente aqueles que são pesquisadores de matemática "pura" ou "aplicada", nutrem em relação aos temas de Educação em geral e mais especificamente de Educação Matemática. Vêm daí as divergências, tantas vezes reveladas nos embates políticos, entre SBM e SBEM. Um exemplo de um desses embates ocorreu no caso da constituição da comissão incumbida de elaborar as Diretrizes Curriculares, para a licenciatura e bacharelado em Matemática, veiculadas em 2001 pelo parecer nº **CNE/CES** 1.302/2001 do Conselho Nacional de Educação / Câmara de Educação Superior do MEC, que admitiu somente um representante da SBEM. Certamente temos que levar em conta, que embora antes de 1980 tenha havido uma preocupação de grupos de pesquisa em Educação Matemática, muitas vezes isolados, a comunidade dos educadores matemáticos só se organizou oficialmente a partir do I ENEM, na década de 1980. Até essa época , quem era "ouvido" pelos órgãos governamentais e respondia oficialmente pelo ensino e pesquisa de Matemática, eram os especialistas em matemática, por meio da SBM, IMPA e outros Institutos de Matemática do país.

Ora, esses professores universitários, especialistas em matemática, não foram preparados para refletir sobre questões pedagógicas, didáticas e educacionais e geralmente utilizam métodos de ensino conservadores . Tradicionalmente, a responsabilidade pela aprendizagem é atribuída aos estudantes, e essa atitude parece permanecer entre os professores de Matemática de todos os cursos superiores, inclusive nos cursos de Licenciatura em Matemática, ainda hoje.

Mogens Niss expressou muito bem essa visão dos especialistas, quando descreveu que "(...) Esperava-se que os estudantes universitários de tópicos matemáticos assumissem toda a responsabilidade por seus próprios estudos, como também de seus sucessos ou fracassos. Estudantes que passavam nos exames tinham pré-requisitos necessários, talento matemático e diligência, porém, aqueles que fracassavam não tinham; e (...) não havia muito o que fazer a respeito. (...) Isto implicava que os professores de Matemática podiam se concentrar em dar aulas, pois a aprendizagem individual de cada estudante sobre o que era ensinado não era negócio do professor mas inteiramente do próprio estudante" (Niss, 1999).

Assim , a citação corrobora, que esse não é um fenômeno somente brasileiro. Ocorre inclusive, nas Universidades da Inglaterra, segundo nos assegurou Elena Nardi, pesquisadora da Grã Bretanha em recente palestra realizada na PUC-SP . Também na França, segundo Jean Luc Dorier, pesquisador francês , como mencionou no prefácio de sua autoria , no livro "L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question" , onde descreve que seus colegas especialistas em matemática : "lhe dizem , de uma ou outra forma, que eles acreditarão na didática quando ela permitir dar aos professores conselhos precisos e fáceis de serem seguidos." Isso mostra o desconhecimento desses especialistas sobre os princípios e a finalidade da Educação Matemática. Dorier comenta ainda que: "... é exatamente isso que não deve ser feito : aplicar receitas sem ter compreendido suas origens, pois isso conduz às piores aberrações (os exemplos não faltam). As melhores recomendações, as melhores instruções do mundo são, no máximo, totalmente ineficazes". (Dorier, 1997)

Se por um lado, para ensinar matemática é necessário possuir uma cultura matemática viva, a atual condição de ensino, mostra que isto não é suficiente, pois é preciso também possuir uma cultura didática viva, que não pode significar uma aplicação de receitas, ou uma rotina 'pomposamente' qualificada de experiência. Deve sim, estar embasada em conhecimentos de

Educação Matemática, os quais envolvem vários campos do conhecimento, que não somente os da Matemática propriamente dita.

Há indícios do aumento da preocupação dos especialistas em Matemática com a formação específica de seus alunos universitários e um desses indícios constitui-se no fato da realização de uma pesquisa, levada a efeito por um grupo de professores da UNICAMP, que teve início no 1º semestre de 1993 e estendeu-se até o final do 1º semestre de 1997. Tal pesquisa foi realizada a pedido da reitoria, com o intuito de identificar as disciplinas-problema da área de Matemática , designação dada àquelas disciplinas com alto índice de reprovação (maior que 20%) . Isto já mostra que há uma mudança de visão sobre a importância de atingir todos os alunos e não somente aqueles "dotados", isto é , implicitamente está se responsabilizando tanto professores, quanto alunos, no processo da aprendizagem matemática. Todavia, para resolver tais problemas, em geral os especialistas em matemática , não ouvem seus colegas educadores matemáticos, pois, para resolver as dificuldades dos alunos eles se baseiam, geralmente em sua intuição e experiência docente , isto é no "senso comum" , ignorando as teorias e resultados de pesquisa da Educação Matemática. Esse distanciamento entre os especialistas em matemática e os educadores matemáticos, é tão grande, que segundo vários depoimentos de professores de diferentes Universidades, que obtiveram seus títulos de pós-graduação em Educação Matemática, eles se vêem compelidos a exercer suas pesquisas e orientações em outros Departamentos, em geral nos de Educação, pois quando pertencem ao Departamento de Matemática, suas pesquisas não são valorizadas, sendo até mesmo "menosprezadas".

Essas considerações nos mostram, o quanto ainda teremos que caminhar para termos o reconhecimento de nossos colegas especialistas em matemática, reconhecimento este necessário, para possibilitar um trabalho conjunto que redunde numa melhoria do ensino e aprendizagem no nível superior.

Certamente, que uma das formas de obter-se a colaboração, e quem sabe até, a compreensão de nossos colegas, professores especialistas, é de envolvê-los como sujeitos de pesquisa, nos estudos sobre o pensamento matemático avançado. Sujeitos de pesquisa, no sentido não somente de analisar sua prática docente mas principalmente obter sua ajuda em investigações sobre as idéias matemáticas mais importantes, nas análises epistemológicas etc.

**ATM ou Pensamento Matemático Avançado**

Até poucos anos atrás, a área de Pensamento Matemático Avançado (AMT, sigla de Advanced Mathematical Thinking), contava com pouca produção de pesquisa no campo da Educação Matemática. No entanto, felizmente, estas vêm obtendo crescentemente a atenção de investigadores, que utilizam-se de abordagens sistemáticas em pesquisas de ATM.

Internacionalmente, a designação de pensamento matemático avançado ou ATM tem sido utilizada para qualificar o conjunto de competências, que se julga importante que o aluno adquira, no decorrer de sua aprendizagem matemática. É importante destacar, que esse estudo não se limita a investigar se os alunos apresentam um bom desempenho em tópicos específicos de Matemática, mas busca também pesquisar aquelas competências, comuns aos tópicos abordados em uma formação matemática de qualidade. Incluem-se entre essas competências a capacidade de reconhecer um objeto matemático em suas diferentes representações, representar objetos, relacionar diversas representações, efetuar generalizações e utilizar os critérios de verdade próprios da Matemática.

A pesquisa em "Pensamento Matemático Avançado" exige não só uma cultura matemática viva, isto é, conhecimento aprofundado da teoria matemática a ser tratada, como também, exige conhecimentos sobre todos os domínios de pesquisa da Educação Matemática, dentre os quais os relacionados por Mamona-Downs & Downs (2002) :"...como o aprendiz se defronta com essa teoria, pensa nela, e processa aquela massa de informações." Tais assuntos estão ligados às Teorias Cognitivas.

Diferentes Educadores Matemáticos , alguns da área da Psicologia Cognitiva, têm contribuído com teorias sobre a cognição em Matemática. Citamos a seguir algumas dessas teorias, que têm servido de base para o desenvolvimento de pesquisas de ATM. Raymond Duval , psicólogo cognitivista, trata em sua extensa produção principalmente do funcionamento cognitivo implicado, sobretudo, na atividade matemática, e nos problemas de tal aprendizagem. Realizou trabalhos sobre a utilização específica da língua materna nos procedimentos matemáticos, bem como sobre a compreensão de textos de matemática, e ainda sobre a aprendizagem de diferentes formas de raciocínio e argumentação . Duval estudou também as diversas representações mobilizadas pela visualização matemática. Ele desenvolveu um modelo de funcionamento cognitivo do pensamento, em termos de mudança de registros de representação semiótica, na obra "*Semiosis et Pensée Humaine*" (Duval , 1995). Suas idéias têm embasado muitas das pesquisas em ATM , algumas delas relatadas no livro por nós organizado "Aprendizagem Matemática: Registros de Representação Semiótica"(Machado, 2003).

Ed Dubinski , desenvolveu a teoria que denominou de Ação-Processo-Objeto-Esquema , de sigla APOS , visando subsidiar as análises do processo cognitivo em matemática.(Dubinski 1991). Essa teoria tem apoiado tanto suas pesquisas de ATM, sobre a aprendizagem em Cálculo, quanto a de outros pesquisadores da área da Educação Matemática, conforme pode ser conferido no livro leraning de Campbell e Zaskis intitulado "Learning and Teaching Number Theory" ( Capbell et, 2002). De acordo com Mamona-Downs e Downs (2002) a idéia da importância na matemática dos "processos se tornando objetos" está subjacente ao cerne dessa teoria.

Outras teorias, têm também, como pressuposto, o mesmo núcleo da APOS de Dubinski , porém sob diferentes pontos de vista. Esse é o caso da teoria de Regine Douady (1984) sobre a dialética ferramenta-objeto; e a de teoria de Anna Sfard, sobre a dupla natureza das concepções matemáticas (1991) e a teoria da Reificação, a qual utilizou em seu trabalho sobre a conceitualização de função.(Sfard, 1991 e 1994) Ambas as teorias de Douady e Sfard têm subsidiado várias pesquisas em ATM.

Certamente há teorias de outra natureza, que não aquelas focadas na cognição, que têm servido como suporte de várias pesquisas de ATM. Dentre essas teorias, não podemos deixar de citar as de Guy Brousseau sobre as Situações Didáticas (Brousseau, 1986), e as de Yves Chevallard sobre a Transposição Didática.(Chevallard, 1991)

Finalmente, é importante citarmos uma teoria, que tem subsidiado pesquisas em Educação Matemática em geral, e em ATM em particular, que é a teoria dos Campos Semânticos desenvolvida por Rômulo Lins, em sua tese de 1992.

**As pesquisas de ATM e a Álgebra**

As idéias expostas a seguir constam, em sua maioria, do projeto de pesquisa do grupo de pesquisa ao qual pertenço. O titulo de tal projeto é : **"**Qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática?" Ele foi apresentado no SIPEM de 2003, por Sonia Coelho.

Para a Álgebra, talvez mais do que para os outros ramos da Matemática, levantam-se questões de pertinência e relevância. Após o ganho de importância nos anos 60 - adquirido graças à valorização do formalismo, própria do movimento da Matemática Moderna -, a Álgebra pré-universitária veio paulatinamente perdendo espaço e é freqüentemente vista hoje como um amontoado de símbolos de valor indiscernível . Essa situação parece não mudar quando o aluno se torna universitário, pelo que mostram resultados de várias pesquisas.

Estamos atualmente num ponto crítico em que é desejável fazer um balanço do que tem sido descoberto e examinar o que a partir daí pode ser feito. O seguinte aspecto merece menção:

> Se por um lado, a Álgebra é o caminho para estudos futuros e para idéias matematicamente significativas, dada uma de suas dimensões – a de linguagem da matemática – por outro, ela é freqüentemente um obstáculo na trajetória educacional de muitos .

Destacamos a seguir a orientação para licenciatura de Matemática constante nas Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura:

> Os conteúdos descritos a seguir, comuns a todos os cursos de Licenciatura, podem ser distribuídos ao longo do curso de acordo com o currículo proposto pela Instituição de Ensino Superior: Cálculo Diferencial e Integral,
>
> Álgebra Linear, Fundamentos de Análise, Fundamentos de Álgebra, Fundamentos de Geometria e Geometria Analítica.
>
> A parte comum deve ainda incluir conteúdos matemáticos presentes na educação básica nas áreas de Álgebra, Geometria e Análise .

É importante notar que nada consta sobre a necessária articulação entre os saberes pedagógicos e específicos, aparentemente, pois as diretrizes consagraram a dicotomia entre os saberes , ignorando, que se tornou insuficiente conhecer os conteúdos específicos, e que é preciso compreender como esses conteúdos foram concebidos e transformados pela comunidade científica ao longo da história. Ensinar exige também entendimento sobre como o estudante constrói o conhecimento e como professor pode favorecer esse processo .

Entendemos serem necessários atualmente estudos integrados no atual quadro teórico da Educação Matemática, que – por conceber o conhecimento como processo de contínua (re)construção – exige investigações não apenas entre licenciandos e entre estudantes do ensino infantil e básico, mas também entre professores em formação continuada. E isso se dá principalmente através do Ensino Universitário e de Pós Graduação latu sensu ou stricto sensu.

Em geral, os cursos de formação de professores orientam as escolhas de conteúdo a partir das propostas de documentos oficiais e institucionais, e nossa análise teve idêntico procedimento.

O exame de tais documentos revelou as descontinuidades existentes entre o ensino de Álgebra - tal como está proposto - na educação básica e nas licenciaturas, e, no caso destas últimas, mostrou que dois assuntos são consenso: Álgebra Linear e Teoria dos Números. Aqui, como ilustração das investigações em ATM já realizadas dentro desse projeto , abordaremos as pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear.

**Pesquisas da Educação Matemática sobre a Álgebra Linear**

Dentre as pesquisas de Educação Matemática mundiais aquelas sobre o ensino / aprendizagem da Álgebra Linear no nível superior têm tido uma atenção crescente por parte dos pesquisadores. A importância dessas pesquisas repousa no fato de que a Álgebra Linear se encontra subjacente a quase todos os domínios da Matemática e até mesmo de outras áreas, como Ciência da Computação, Engenharia e Física, entre outros. Daí o fato de ser imprescindível que aqueles que pretendem trabalhar com as ciências que utilizam a Matemática, tanto como objeto de seu estudo quanto como instrumento, tenham domínio sobre seus principais conceitos. No entanto, esse domínio não é fácil de ser atingido, conforme atestam diferentes resultados de pesquisa.

Entre os pesquisadores que se preocupam com o tema encontra-se Jean-Luc DORIER, que editou em 2000 o livro "On the Teaching of Linear Algebra"[10] .Essa obra, de grande importância para tal contexto, apresenta na primeira parte resultados de pesquisas epistemológicas sobre a gênese da teoria dos espaços vetoriais, e na segunda parte levanta questões sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra linear em diferentes abordagens, realizadas entre 1987 e 2000. Na conclusão do livro, no item que trata das perspectivas para novas pesquisas, além de se referir a questões mais pontuais, os autores apontam os seguintes temas globais que merecem a atenção dos pesquisadores:

•*A Álgebra Linear está ligada aos conhecimentos prévios dos estudantes em vários campos da matemática. O que o pesquisador pode supor sobre o estado desses conhecimentos? É*

[10] Tradução: Sobre o ensino de Álgebra Linear.

*possível referir-se somente ao currículo oficial? Além disso, há uma mudança de "cultura" entre o ensino médio e o universitário. Como esse fato pode ser levado em conta nos temas de pesquisa? Robert introduziu a noção de "alavancas de conceitualização"* (alavancas meta)[11] *, de forma a abordar esse problema. Chartier aplicou-a em seu trabalho na relação entre geometria e álgebra linear. O que é geometria? O que o aluno conhece sobre isso? Isso tem o mesmo significado para os professores do ensino fundamental, médio e universitário? Quais são as conexões?*

•*Nos trabalhos de pesquisa em educação matemática em nível universitário, habitualmente o professor experimentador do projeto de pesquisa é um dos pesquisadores encarregado do projeto. Portanto, há um tipo de controle intrínseco de vários parâmetros locais. Isso deixa a questão aberta sobre a transmissão do projeto de ensino a outros professores, especialmente no que concerne a um projeto de ensino a longo termo, como o de álgebra linear."*

Dentre as primeiras pesquisas sobre ensino e aprendizagem em Álgebra Linear, empreendidas por Dorier e seu grupo francês na década de 80, consta um inventário das principais dificuldades encontradas pelos alunos franceses do primeiro ano do DEUG (primeiro ano universitário). O resultado dessa pesquisa mostrou que a forma abstrata e axiomática utilizada para tratar das primeiras noções da Álgebra Linear, como espaços vetoriais, base, etc., causa no aluno iniciante uma sensação de fracasso, impedindo que avance em sua aprendizagem. Este fenômeno foi chamado de "obstáculo do formalismo".

As dificuldades encontradas pelos alunos nessa disciplina não são recentes e muito menos limitadas a um número reduzido de alunos de uma única universidade. Dorier (2000), no prefácio de seu livro, escreve que já na década de 60, Plancherel, famoso matemático, declarou a ele que de todos os cursos que havia ministrado, aquele em que os alunos apresentavam maior dificuldade de apreensão, era o de Álgebra Linear.

Aline Robert, ao comentar a tese de doutorado de Jean-Luc Dorier, corrobora e aprofunda essa observação ao mencionar que o "(...) ensino da álgebra linear provoca a cada ano em muitos estudantes do primeiro ano da universidade um sentimento de fracasso, declarado ou ainda difuso, em particular no que diz respeito às primeiras definições ( ..)."

Outro grupo de pesquisadores dessa área é formado por Anna SIERPINSKA, Tommy DREYFUS e Joel HILLEL. Em um de seus artigos - Evaluation of a teaching design in linear

---

[11] Explicação da tradutora

álgebra: The case of linear transformations - de 1999[12], esses pesquisadores citam "....as bem conhecidas dificuldades dos estudantes no curso de álgebra linear no primeiro ano da universidade" (SIERPINSKA et al,1999), confirmando assim nossa afirmação de que os problemas com ensino / aprendizagem da álgebra linear são gerais.

No Brasil, o grupo da UNICAMP, que realizou a pesquisa citada anteriormente, com o intuito de identificar as "disciplinas-problema", concluiu que a Álgebra Linear, era uma dessas disciplinas pois apresentou alto percentual de retenção - de 25 a 50%.

Embora essa pesquisa tenha dado o "alarme" sobre a situação do ensino e aprendizagem da Álgebra Linear no Brasil, poucos foram os trabalhos em Educação Matemática levados a efeito sobre esse tema. Isso é corroborado pelos resultados da pesquisa de Marcos Roberto CELESTINO, que realizou uma pesquisa, do tipo estado da arte, sobre pesquisas brasileiras da década de 90, cujo tema tenha sido o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear.(2000)

CELESTINO encontrou apenas seis artigos sobre o tema, sendo quatro deles de uma mesma autora, Marlene Alves DIAS, que os escreveu enquanto fazia seu doutorado na França. Assim, concluiu que as pesquisas brasileiras na área de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear são recentes e apresentam um caminhar tímido; finaliza afirmando que, embora as pesquisas brasileiras nesse tema sejam escassas, seus resultados contribuem para a melhoria do entendimento do processo de ensino-aprendizagem da álgebra linear.

O panorama traçado acima demonstra a necessidade e urgência de levar a efeito, também aqui no Brasil, pesquisas sobre ensino-aprendizagem de álgebra linear.

Nessa perspectiva desenvolvemos algumas pesquisas.A primeira delas foi uma pesquisa diagnóstico, sobre a concepção de espaço vetorial, do aluno licenciando em matemática , após ter terminado um curso de Álgebra Linear. O referencial teórico utilizado para as análises foi a teoria de Anna SFARD (1992), que trata do dualismo apresentado pelas concepções matemáticas, focalizando o processo de transição de uma forma de pensamento matemático para outra e em seu modelo de 3-fases do desenvolvimento conceitual. Os autores, Silvia Machado e José Garcia Martins, concluíram que a maior parte dos estudantes pesquisados compartilhavam de uma concepção ainda interiorizada , poucos deles, de uma concepção condensada, e nenhum deles apresentou a concepção reificada.(2003)

---

12 *Avaliação de um Projeto de Ensino em Álgebra Linear :O Caso das Transformações Lineares* ,RDM vol19,no 1, pp. 7-40, 1999.

As outras pesquisas sobre Álgebra Linear, realizadas por membros de nosso grupo, objetivaram investigar as alavancas meta existentes, no sentido utilizado por Aline Robert, no desenvolvimento da noção de base de um espaço vetorial.

Claudia Araújo analisou a abordagem da noção de base nos livros didáticos de Álgebra Linear comumente indicados no ensino superior, investigando a existência de possíveis "alavancas meta" no discurso metamatemático utilizado pelos autores. Concluiu que no prefácio dos três livros analisados existem características promissoras quanto à existência de "alavancas meta" no corpo dos textos. No entanto, poucas situações puderam ser avaliadas como possíveis alavancas-meta no material analisado. As possíveis alavancas-meta evidenciadas por Araújo foram: no primeiro livro, quando na introdução de espaços vetoriais , comparam características de dois conjuntos aparentemente distintos para mostrar que possuem uma mesma estrutura algébrica; no segundo livro, surgem após a definição de dependência linear, quando se apresenta a equivalência entre as operações de adição e multiplicação por escalar dos vetores representados por segmentos orientados e as mesmas operações algébricas no espaço vetorial real $\mathbf{R}^3$**;** e, no terceiro livro, surgem quando utilizam o termo "vetor supérfluo" na abordagem da noção de dependência linear, o que, pode ajudar o aluno a perceber a vantagem de utilizar conjuntos mais econômicos e quando utilizam exemplos e contra-exemplos das noções abordadas. Assim, Araújo concluiu, que poucas oportunidades foram aproveitadas a fim de criar condições para que o discurso funcionasse como uma alavanca meta.

Zoraide Padredi investigou, quais as prováveis alavancas-meta emergiram do discurso de professores universitários de Álgebra Linear, quando discorreram sobre como geralmente desenvolvem a noção de base de um espaço vetorial, em aula. Ela entrevistou seis professores de universidades paulistas tradicionais. As análises apontaram não só os recursos meta relativos à noção de base como também aqueles recursos, de ordem mais geral, que surgiram ao longo das entrevistas com os professores. A noção de base foi destacada como prioritária para um primeiro curso de Álgebra Linear, pela maioria dos entrevistados.

Padredi evidenciou, três abordagens diferentes de base, no discurso dos professores, quais sejam : como um sistema de geradores minimal, como um sistema maximal linearmente independente e como uma justaposição de um sistema de geradores com um conjunto linearmente independente.A idéia de um sistema de geradores minimal pode gerar reflexões dos alunos sobre a vantagem de se conseguir um número mínimo de vetores para gerar o espaço, induzindo-os a compreender a necessidade de serem vetores linearmente independentes. A idéia de um conjunto maximal de vetores linearmente independentes pode gerar reflexões sobre a necessidade de se conseguir um conjunto linearmente independente suficientemente grande para dar origem ao espaço vetorial, surgindo daí naturalmente a noção de sistema de geradores. Tanto uma idéia como outra explicitam uma articulação, entre as duas noções, vetores linearmente independentes e sistema de geradores dando origem ao conceito de base. São recursos meta com possibilidade de se tornarem alavancas-meta.

A utilização de uma forma coloquial para a introdução de noções como a de base e de outras que estão intrinsecamente ligadas a essa, foi exemplificada através de analogias: "vetores bem comportados", "grau de liberdade", "colchinha de crochê", "ambiente", "lucro", "economia", "tijolos", "parede". Estas analogias podem se tornar alavancas meta para o ensino/aprendizagem de algumas noções e idéias da Álgebra Linear.

Outra possível alavanca-meta é o recurso de enfatizar as operações adição e multiplicação por um escalar, como as ferramentas que são inerentes à noção de espaço vetorial e que bastam para caracterizar um elemento genérico do espaço vetorial através de um número finito de vetores "bem comportados" desse espaço.Temos um discurso sobre a Álgebra Linear que ocorre desde o início do curso, procurando ocasionar reflexões por parte dos alunos e motivação para a noção de base .

Convém ressaltar também a utilização da passagem do antigo para o novo, sendo o antigo representado pela Geometria Analítica. Esse recurso faz parte das informações constitutivas do funcionamento matemático que auxilia o aluno quando a mudança de pontos de vista é necessária, integrando os conhecimentos precedentes aos novos conhecimentos, portanto, um recurso "meta" passível de se tornar uma alavanca-meta, utilizado por diversos livros didáticos e já destacado por Claudia Araújo em sua pesquisa de dissertação, conforme citado anteriormente. Além disso, a Geometria Analítica é utilizada como o concreto para gerar reflexões dos alunos sobre a noção de dependência linear, de sistema de geradores e de base. Assim como a forma coloquial e as analogias, já citadas acima, são utilizadas para criar a necessidade dessa noção.

Outro recurso "meta", que é caracterizado por Dorier como uma possível alavanca meta e que apareceu no discurso de todos os professores entrevistados , é o de fornecer informações sobre a natureza das noções a serem introduzidas, relacionando a Álgebra Linear com noções de outras disciplinas do curso (Geometria Analítica, Equações Diferenciais, Cálculo), com conceitos que serão explorados posteriormente (isomorfismos, transformações lineares) dentro do próprio curso ou ainda como extensões de conceitos já introduzidos (linearidade).

Atualmente, estamos levando a efeito mais duas pesquisas nesse assunto. A de Luis Carlos Barbosa de Oliveira, que investiga o discurso meta matemático de um professor de Álgebra Linear, ao desenvolver em sala de aula a noção de base de um espaço vetorial, e seu efeito para a compreensao dos alunos desse conceito . A segunda é de Carlos Eduardo da Silva que está investigando, nos diferentes cursos de ciências Exatas , quando e como é utilizada a noção de base nas disciplinas que tem como pré ou co-requisitos a Álgebra Linear.

Desta forma , acreditamos que estejamos contribuindo para os conhecimentos de ATM, especificamente da área de Álgebra Linear.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

**ARAÚJO, C. C. V. B.** *A metamatemática no livro didático de álgebra linear***.** São Paulo, 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Educação Matemática, PUC-SP.

**BROUSSEAU,G. (**1986**)** *Fondements et methods de la didactique des mathématiques*. Recherches en Didactique des Mathématiques, v.7, n.2,pp 33-116, Grenoble

**CAMPBELL, S. R. E ZAZKIS, R.** (2002), *Learning and Teaching Number Theory – Research in Cognition and Instruction*, Monograph Series of the Journal of Mathematical Behavior, vol. 2, Ablex Publishing, Westport, 2002.

**CELESTINO, M.R**,(2000) *Ensino - aprendizagem da Álgebra Linear : as pesquisas brasileiras na década de 90*, III Simposio de Educacion Matemática., CHIVILCOY, Argentina, 2000.

**CHEVALLARD,Y**.(1991) *LA TRANSPOSITION DIDACTIQUE : DU SAVOIR SAVANT AU SAVOIR ENSEIGNÉ* GRENOBLE, LA PENSÉE SAUVAGE..

**COELHO,S; MACHADO,S;MARANHAO,M.C.** (2003) *Projeto: qual a álgebra a ser ensinada em cursos de formação de professores de matemática?*. CD Rom do SIPEM.

**DORIER, J. L. et all** (1997) – *L'Enseignement de L'algèbre Linéaire en Question* - Ed. La Pensée Sauvage, Grenoble.

________________ (2000) – *On The Teaching of Linear Algebra*. Kluwer. N. York.

**DOUADY, R. (1984)** *Jeux des cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.* Tese, Universidade de Paris VII..

**DUBINSKY, E.** (1991) – Reflective abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D.O Tall (ed.), Advancet Mathematical Thinking, Kluwer: Dordrecht, 95-123

**DUVAL, R. (1995)** – *Sémiosis et pensée humane – Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel.* Bern: Peter Lang, 395 p.

**HILLEL, J.; SIERPINSKA, A .** (1994) – On one persistent mistake in linear algebra, in *Proceedings of the 18$^{th}$ International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* July 1994, Lisbon, Portugal, vol. III, 65-72

**LINS, R. C.** (1992) – *A framework for understanding what algebric thinking is –* Nottingham, PHD thesis University of Nottingham (Doctorate in Mathematics Education)

**MACHADO,S (org.)** (2003) – *Aprendizagem em Matemática* . Papirus. Campinas

**MACHADO,S ; MARTINS, J**.(2003) *Após um Primeiro Curso de Álgebra Linear , como c Licenciando Concebe um Espaço Vetorial?* . SIPEM, Santos.

**MAMONA-DOWNS, J; DOWNS, M** (2002) – Advanced Mathematical Thinking With a Special Reference to Reflection on Mathematical Structure, in *Handbook of International Research in Mathematics Education;* ed. Lyn English.USA

**NISS, M.** (1999) *– Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education –* Educational Studies in Mathematics, nº 40, p. 1-24.

**ROBERT, A** (1990) - *Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique* (Thèse de Doctorat présentée à l'Université Joseph Fourier, Grenoble I) - Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 10, pp. 368 - 373

**SFARD, A.** (1991) – *On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin*, Educational Studies in Mathematics 22(1), 1-36

**SFARD, A. e LINCHEVSKI, L.** (1994) – *The gains and pitfalls of reitification – the case of algebra*, Educational Studies in Mathematics 26(3), 191-228

**SIERPINSKA, A. et all** (1999) – *Evaluation of a teaching design in Linear Algebra: The case of linear transformations* – Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 19, nº1, pp. 7 - 40