



## **O TRIÂNGULO E SUAS PROPRIEDADES: UM ESTUDO DE CASO COM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO**

*Gilmer Jacinto Peres<sup>1</sup>*

*PUC-MINAS*

*ISE-Anísio Teixeira*

[gilmerperes@terra.com.br](mailto:gilmerperes@terra.com.br)

### **Introdução**

A preocupação com o ensino da geometria escolar já nos direcionou para outras investigações (Zuin, 1997; Zuin, 2001a; Peres & Zuin, 2001). Esse olhar constante para o ensino da geometria, em geral, e das construções geométricas, em particular, nos levou a realizar uma outra pesquisa, tendo como sujeitos do nosso estudo estudantes do 3º ano do Ensino Médio.

Hershkowitz, Vinner & Bruchkheimer (1994) revelaram, através de uma pesquisa, que alunos e professores tinham o mesmo padrão de respostas ao identificarem triângulos retângulos em posições diferentes. Fonseca et al. (2001) indicam que “grande parte das pessoas” bem como professores em formação “só reconhecem como ‘triângulos’ os isósceles e os equiláteros e, muitas vezes, somente quando a base (nos isósceles) ou um dos lados (nos equiláteros) está na horizontal (ou paralelo à margem inferior do papel)” (p.58). Estes estudos nos levaram a acreditar que o nosso projeto de pesquisa, o qual tinha como objetivo investigar se os alunos que participariam da nossa pesquisa detinham conhecimentos básicos em relação ao estudo dos triângulos, poderia contribuir para a Educação Matemática.

---

<sup>1</sup> Professor do Departamento de Matemática e Estatística da PUC-Minas – Professor do Instituto Superior de Educação Anísio Teixeira - Professor efetivo da rede pública estadual do Estado de Minas Gerais - Especialista em Educação Matemática pela PUC Minas.

A revisão bibliográfica realizada indicou que pouquíssimos pesquisadores brasileiros têm desenvolvido trabalhos relacionados à ausência do ensino das construções geométricas no Ensino Fundamental e Médio, fato que torna importante trabalhos e pesquisas nesse campo. Constatamos que existem mais trabalhos voltados para a exclusão da Geometria dos currículos escolares. Dentre os quais, temos Lorenzato (1995) que, ao comparar o ensino de Geometria com o de outros conteúdos da Matemática escolar, verifica que a Geometria estava praticamente ausente da maioria das escolas, na época da sua pesquisa.

As orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos do Ensino Fundamental proposta pelos PCN (1998), ao tratar do Espaço e forma, destacam a importância de ensinar geometria aos alunos pois,

*“Situações cotidianas e o exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica etc., demandam do indivíduo a capacidade de pensar geometricamente. Também é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito deles, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno”.*(PCN, 1998, p.122).

Para o desenvolvimento da nossa pesquisa, tivemos como principais referências os estudos de Hershkowitz et. al. (1994), Lorenzato (1995), Pavanello (1999), Perez (1995) e Pereira (2001), Fonseca et. al. (2001) que tratam do Ensino da Geometria; Zuin (1997), Peres & Zuin (2001), que se voltam para a ausência das construções geométricas no Ensino Fundamental; além de Crowley (1994) tratando do modelo Van Hiele de pensamento geométrico.

Elaboramos testes para serem aplicados em estudantes de duas turmas do 3º ano do Ensino Médio. Nossa escolha se baseou na hipótese inicial de que, neste nível, os alunos já deveriam dominar diversos conceitos básicos da geometria, entre eles, o estudo dos triângulos.

Dentre as instituições, optamos por duas públicas que atendem alunos do Ensino Médio, localizadas em municípios da Grande BH: uma Escola Municipal, a qual denominaremos **Escola A**, e uma Escola Estadual a qual denominaremos **Escola B**. Participaram do nosso estudo, 19 alunos da escola A e 31 alunos da escola B, num total

de cinquenta estudantes. Destacamos que, na análise dos testes, os alunos não foram separados considerando a instituição a qual pertenciam, pois não era o nosso objetivo fazer um estudo comparativo entre as escolas.

Tanto para a elaboração como para a análise do primeiro teste nos pautamos nos níveis de compreensão de Van Hiele<sup>2</sup>; o segundo teste constava de questões que visavam a identificação e construção das cevianas e dos pontos notáveis do triângulo.

O primeiro teste, constituído por sete questões, as de 1 a 4 foram baseadas nos quatro primeiros níveis de conhecimento de geometria dos Van Hiele; as questões de número 5 e 6, centram-se na identificação da altura relativa a um dos lados do triângulo e, a questão 7, envolve o conceito de bissetriz interna referente a um dos ângulos de um triângulo. Ressaltamos ainda que, a análise das questões cinco e seis, foi realizada em conjunto. Optamos por uma análise de cunho qualitativo e quantitativo dos testes.

### **O declínio do ensino da geometria e das construções geométricas nas escolas do Ensino Básico**

Os estudos de Pavanello (1997) nos informam que o ensino da Geometria foi tendo pouco espaço ou foi mesmo excluído dos currículos escolares, principalmente a partir da década de 70 do século passado. O ensino das construções geométricas da Geometria Euclidiana Plana também foi colocado em segundo plano.

Lorenzato (1995), entende que o Ensino da Geometria está ausente nas salas de aula, ele destaca que “*vários trabalhos de pesquisadores brasileiros, entre eles Peres (1991) e Pavanelo (1993), confirmam essa lamentável realidade educacional.*”(p. 3). Muitas são as causas que levaram ao abandono do Ensino de Geometria nas escolas de Ensino Fundamental e Médio. O autor cita duas questões que atuam diretamente em sala de aula:

- a falta de conhecimento dos professores quanto aos conceitos geométricos;
- ao fato de no livro didático, a geometria ser apresentada

*“apenas como um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica; noutros a Geometria quase sempre é apresentada na última parte do livro, aumentando a probabilidade dela não vir a ser estudada por falta de tempo letivo.”*  
(Lorenzato, 1995,p.4)

Este autor considera que essas não são as únicas causas que levaram ao abandono do ensino de Geometria destacando, também, o currículo.<sup>3</sup>

Pavanello (1999) vai mais longe e relata a existência da dificuldade dos professores em estabelecer uma relação que aproxime a geometria prática, que é desenvolvida nas escolas, e a *“abordagem axiomática proposta.”* (p.34). Ela também questiona o fato de questões, como as relações que existem entre as diferentes formas e dimensões, assim como as possibilidades de localização e ocupação no espaço só foram úteis na humanidade antiga? Para mostrar que hoje, a geometria é tão útil quanto fora outrora, ela relata que

*“muitas situações escolares, entre as quais a leitura e a escrita, as atividades cotidianas e o exercício de diversas profissões, com a bioquímica, a cristalografia, a cirurgia, a escultura, a arquitetura e a coreografia, exigem o desenvolvimento de habilidades ligadas à percepção espacial: orientar-se no espaço, coordenar diferentes ângulos de observação de objetos, prever conseqüências de transformações. Além disso, no mundo moderno, em que a imagem é extremamente utilizada como instrumento de informação, é indispensável a habilidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito do mesmo.”*(Pavanello, 1999, p.34-35)

Embora a autora afirme que já existam progressos quanto ao “pensamento” sobre a importância do ensino de Geometria percebemos, em seus relatos, que professores ainda dão um maior enfoque à álgebra, e mais, que ela é desenvolvida sem ser relacionada com a geometria. Para que o ensino de Geometria seja realmente eficaz, Pavanello acredita que o objetivo do ensino da mesma não seja o da repetição de definições, enunciados, ou mesmo demonstrações, mas sim o de garantir situações em que os alunos explorem figuras, propriedades, enfim, que sejam capazes de construir de maneira sólida o seu conhecimento.

---

<sup>2</sup> Existem cinco níveis de conhecimento de geometria, que vai do nível 0 (visualização) ao nível 4 (rigor). Crowley (1994) destaca que, dificilmente, um aluno chega ao último nível (rigor). Optamos por não abranger este último nível.

Perez (1995), investigou a situação do ensino de Geometria nos níveis de Ensino Fundamental e Médio no Estado de São Paulo entre 1984 e 1990. Em sua pesquisa, ele procurou obter informações se a Geometria era parte integrante nas aulas ministradas pelos professores. Ele também entrevistou alunos da graduação em Matemática e relata que para estes

*“em geral, seus professores não se preocupavam em levá-los a pensar, raciocinar, aprender a resolver problemas, fazer deduções, preferindo um ensino por repetição, usando muitas fórmulas prontas (...) na universidade, seguiam-se reprovações, muitas disciplinas de conteúdo matemático (poucas de Geometria) e quase nenhuma oferecendo novas metodologias para serem exploradas no 1º e 2º graus.” (Perez, 1995, p.60)*

Pereira (2001) ao fazer uma reflexão sobre o ensino de Geometria aponta justificativas para o seu abandono.

São elas:

- *Problemas com a formação do professor;*
- *Omissão da Geometria nos livros didáticos;*
- *Lacunas deixadas pelo movimento da Matemática Moderna.*

Baseando nos pesquisadores citados podemos avaliar que o ensino da Geometria escolar está deficiente ou ausente das escolas do Ensino Básico, principalmente a partir da década de 70 do século passado.

É necessário esclarecer que, embora Geometria e Desenho Geométrico estejam estreitamente ligados, no Brasil, não podemos dizer que pesquisas relacionadas ao ensino de Geometria enfoquem também o estudo das construções geométricas. Em sua dissertação de mestrado, Zuin (2001) procura mostrar a relação entre estes dois conhecimentos, destacando que o ensino das construções geométricas é imprescindível para o desenvolvimento da construção do conhecimento em Geometria.

*"entendemos que não há garantias de que as escolas integrem as construções geométricas nas aulas de Matemática, mesmo porque muitos dos professores não estão habilitados a realizar esta prática. Isto porque vários cursos de licenciatura em Matemática não enfocam as construções geométricas com régua e compasso nos seus currículos. Além disso, a maioria dos professores também não teve acesso a esse saber na escola básica, pois pertence a uma geração que foi afastada do Desenho*

---

<sup>3</sup>Lorenzato utiliza o termo currículo como conjunto de disciplinas.

*Geométrico. Mesmo que as escolas sigam os PCN de Matemática, os conteúdos propostos para serem trabalhados com régua e compasso são muito restritos. Os alunos terão um conhecimento muito inferior se comparado com o das escolas que mantêm o Desenho Geométrico como uma disciplina escolar, principalmente naquelas em que são realizadas as devidas pontes com a geometria euclidiana. Mais uma vez, é comprovada a distância entre os currículos prescritos para diferentes classes sociais. Consta-se a hierarquização dos saberes escolares." (Zuin, 2001a, p. 164-165).*

Outro estudo de Zuin (1997) indica a pouca ênfase dada ao ensino das construções geométricas na prática escolar. Para ela, assim como a Geometria, o Desenho Geométrico “foi abandonado, literalmente, na maioria de nossas escolas, principalmente as públicas. Às vezes consta da grade curricular, mas, por falta de professores preparados, estas aulas são incorporadas às de Matemática [mas as construções geométricas não fazem parte do programa e, portanto, não são trabalhadas]”. Em sua pesquisa, a autora avaliou a situação dos alunos que ingressam na Universidade e, em particular, no curso de Engenharia e Arquitetura, utilizando-se de testes e questionários. Em outra etapa de sua pesquisa, Zuin analisou, também, as questões das provas de Matemática dos vestibulares da PUC-MINAS do primeiro semestre de 1994 ao segundo semestre de 1997. Seu objetivo, neste caso, foi o de levantar o número de questões que envolviam conceitos de Geometria. A autora enfoca que

*“esta análise, considerando todos os alunos que fizeram a prova do vestibular, e não apenas os do curso de Engenharia e Arquitetura, nos dá uma visão global de como está deficiente o estudo da Geometria, como um todo, nos ciclos fundamental e médio.” (Zuin, 1997)*

E como resultado de sua pesquisa, ela destaca que

*“Quanto aos testes aplicados: - 95% dos alunos não detêm conhecimentos de Desenho Geométrico, em nível do ciclo fundamental, - 80% dos alunos têm dificuldade para interpretar questões que envolvam conceitos de Geometria Plana (...) Feita a análise das provas do concurso do vestibular do primeiro e segundo semestres dos anos de 1994 e 1995, foi constatado que dentre as questões que tiveram o maior índice de acerto, aquelas que envolvem Geometria, apenas no 1º semestre de 1994 chegou a 33%, sendo que no 2º semestre de 95, foi de 6%.” (Zuin, 1997)*

Mas qual foi a trajetória do ensino das construções geométricas no Brasil? Zuin (2001b) considera que o ensino das construções geométricas começa a ser desprestigiado já em 1961, com a promulgação da LDB 4.024, quando “o Conselho Federal de Educação propõe o Desenho Geométrico como uma disciplina complementar obrigatória, entre

duas das quatro opções de currículo do 1º ciclo, e uma das três do 2º.” (p.163). Essa situação se agrava a partir de 1971, com a LDB 5692. A partir desta época,

*“O fato de o Desenho Geométrico não estar entre as disciplinas obrigatórias vai influenciar para que a mesma seja excluída das grades curriculares de muitas escolas. Isto se comprova com a queda na venda e publicação de livros didáticos nesta área, na década de 70 [do século passado].” (Zuin, 2001b, p.163)*

A autora também constatou que o ensino das construções geométricas continuou em algumas escolas na disciplina Desenho Geométrico ou na Educação Artística. No entanto, pelo fato de a LDB 5692/71 exigir a obrigatoriedade da Educação Artística nos currículos de 1º e 2º graus, muitas instituições, principalmente as públicas, excluíram o ensino das construções geométricas, porque o Desenho Geométrico passava para a parte diversificada do currículo, na qual a escola poderia fazer opção ou não desta disciplina entre outras.<sup>4</sup> Apesar de os PCN de Matemática darem importância às construções geométricas, esta situação se mantém até hoje.

Peres e Zuin (2001) também apontam o abandono do Desenho Geométrico nos níveis Fundamental e Médio, afirmando que, *“em Minas Gerais, o ensino das construções geométricas, em geral, não faz parte dos currículos das escolas públicas.”* Como projeto de iniciação científica, realizaram um estudo que foi conduzido em sala de aula com 35 alunos em duas escolas: uma que não adota o ensino de Desenho Geométrico, mas o incentiva através de atividades lúdicas, e outra que não o adota e nem o associa à disciplina de Matemática. A atividade constou de um teste que foi aplicado aos alunos pelo professor de Matemática das respectivas escolas. O teste constituiu-se de seis questões que tinham o objetivo de averiguar quais as habilidades apresentadas pelos alunos, o que lhes possibilitou identificar, através da análise das respostas, se o ensino das construções geométricas estaria contribuindo para a construção do conhecimento em geometria. Tendo em vista os resultados das duas instituições, eles sugerem que, além de atividades lúdicas que estimulem a formação do pensamento geométrico, seja incluído o ensino das construções geométricas com régua e compasso nos currículos escolares.

---

<sup>4</sup> Dentre as 16 matérias especificadas, para integrar a parte diversificada, na área de comunicação e expressão, está presente o Desenho, sendo que não existe nenhuma referência quanto à modalidade do Desenho – se do natural, decorativo, tradicional convencional ou geométrico. (Zuin, 2001, p.91)

Zuin (2001a) constatou que, em algumas escolas, a disciplina Desenho Geométrico não foi excluída depois de 1971. Encontramos a proposta dos PCN em trabalhar as construções geométricas com régua e compasso nas aulas de Matemática, muito possivelmente em virtude de

*“As pesquisas em torno do ensino de geometria, os questionamentos pelo abandono desse ramo do conhecimento em eventos científicos, periódicos e pelo NCTM – National Council of Teachers of Mathematics – entre outros, vão colaborar para que a geometria euclidiana e as construções geométricas sejam resgatadas.” (Zuin, 2001a, 111)*

É possível afirmar que as pesquisas destacadas demonstram a deficiência ou a ausência do ensino de geometria e das construções geométricas nas escolas do Ensino Básico, e a tentativa de um retorno dos mesmos, presentes nos PCN de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental. Estes fatos, também, nos conduziram a realizar nossa pesquisa.

### **Elaboração dos testes e investigação**

Depois de uma revisão da literatura, optamos utilizar a teoria de Van Hiele para nos apoiar no desenvolvimento dos testes.

Crowley (1994), ao fazer um estudo sobre o modelo Van Hiele de pensamento geométrico, destaca a existência de cinco níveis de compreensão. São eles: visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor.

No nível da **visualização**, ou **nível 0**, os alunos são capazes apenas de identificar a figura sem, no entanto, apontar propriedades próprias. A única forma de classificação neste nível é o reconhecimento da figura por sua forma física.

No nível da **análise**, **nível 1**, os alunos já são capazes de identificar características próprias de cada figura, destacando-a por partes.

No nível da **dedução informal, nível 2**, os alunos apresentam a capacidade de estabelecer relações de propriedades das figuras, sendo capazes de reconhecer classes de figuras elaborando argumentos informais.

No nível da **dedução formal, nível 3**, os alunos já são capazes de entender a geometria dentro de um aspecto mais dedutivo e axiomático, eles são capazes de trabalhar com demonstrações, compreendendo e fazendo distinções entre uma afirmação e a sua recíproca.

Já no nível **rigor, nível 4**, os alunos são capazes de compreender a geometria no plano da abstração, sendo aptos também para trabalhar com a geometria não euclidiana.

Decidimos pela aplicação apenas dos testes, não seguidos de entrevistas, pelo fato do tempo ser restrito. No entanto, apenas o primeiro teste elaborado foi aplicado porque, diante dos resultados apresentados pelo mesmo, verificamos que os alunos, possivelmente, não teriam condições/conhecimento para realizar o outro teste, referente à segunda etapa da nossa investigação.

Analisando os dados, optamos por agrupar os alunos de acordo com suas respostas nos testes, estabelecendo categorias. Como em nossa pesquisa não foi pedida a identificação dos alunos, optamos por criar uma maneira de identificá-los para melhor procedermos as nossas análises (A1, A2, A3, ..., A50).

Como uma mesma questão apresentou diferentes tipos de respostas, decidimos agrupá-los de acordo com suas respostas. Na primeira questão temos quatro grupos que vão da letra **A** até a letra **D**; na segunda questão, temos cinco grupos que vão da letra **E** até a letra **I**; na terceira questão, temos quatro grupos que vão da letra **J** até a letra **N**; na quarta questão, temos dois grupos, **O** e **P**; na quinta e sexta questões, temos três grupos que vão da letra **Q** a **S**, e para a sétima e última questão caracterizamos dois grupos, **T** e **U**. É necessário destacar ainda que os grupos são todos distintos.

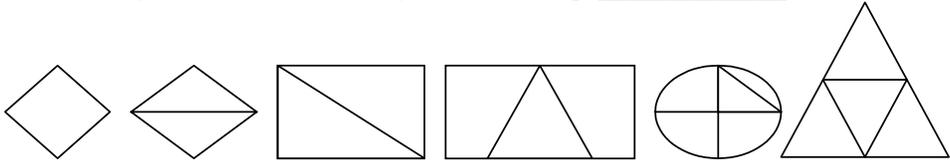
### O teste, dados e análises

O primeiro teste aplicado, centrava-se na identificação das propriedades de um triângulo, da bissetriz de um ângulo interno e da altura de triângulo relativa a um dos seus lados. Como já foi dito, anteriormente, o teste foi aplicado a cinquenta alunos do terceiro ano do Ensino Medio (19 alunos da escola A, e 31 alunos da escola B). O teste aplicado foi composto por sete questões que visavam avaliar o nível dos alunos com base no modelo dos Van Hiele.

Apresentaremos, a seguir, cada uma das questões e os respectivos resultados e análises.

**QUESTÃO 1**

1 – Quantos triângulos você encontra nas figuras abaixo: Resp. \_\_\_\_\_



Esta questão está embasada no **nível da visualização (0)**, com a qual procuramos avaliar se os alunos eram capazes de identificar diferentes tipos de triângulos. Ressaltamos que, nesta questão, os triângulos não foram apresentados como figuras isoladas, eles estavam “dentro” de outras figuras geométricas planas. Pedimos aos alunos que identificassem quantos triângulos eles encontravam nas figuras, colocamos 11 (onze) triângulos, e encontramos os seguintes resultados:

GRUPO A	GRUPO B	GRUPO C	GRUPO D
Encontraram onze triângulos	Encontraram dez triângulos	Encontraram menos de dez triângulos	Encontraram mais de onze triângulos
12%	52%	8%	28%

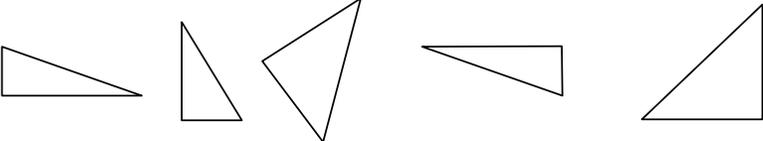
Inferimos que estes 52% que encontraram dez triângulos, apenas deixaram de perceber que o último, o 11º, é um triângulo formado por outros três triângulos. Os 8% que encontraram menos de onze apresentaram dificuldades em perceber que uma figura

geométrica pode conter uma outra figura. Os 28% que viram mais de onze triângulos tentaram, “possivelmente”, criar novos triângulos a partir das figuras apresentadas.

Crowley (1994) não aponta, em seus relatos, algum fato que direcione a situação encontrada por nós. Como 88% dos alunos não tiveram êxito nesta questão, entendemos que eles ainda não tiveram uma boa formação no nível 0, ou não entenderam a questão proposta.

**QUESTÃO 2**

2 – Analise todos estes triângulos abaixo, você acha que existe alguma característica comum? Qual?



A segunda questão foi baseada **no nível da análise (nível 1)** sendo pedido a identificação de uma característica comum nos triângulos apresentados. Os triângulos apresentados foram retângulos e escalenos. Obtivemos os seguintes resultados:

GRUPO E	GRUPO F	GRUPO G	GRUPO H	GRUPO I
Identificaram que os triângulos eram escalenos	Identificaram que os triângulos eram retângulos	Destacaram que a característica comum era os três lados	Não identificaram nenhuma propriedade comum	Apresentaram uma característica não procedente
20%	12%	24%	36%	10%

Apenas o aluno A18 caracterizou os triângulos como retângulo e escaleno. Cinco alunos apresentaram a seguinte resposta:

*“- Todos são escalenos.”*

Quatro alunos disseram:

*“ – Três lados diferentes.”*

A39 apresentou a seguinte resposta:

*“ – Sim, os lados dos triângulos não tem medidas iguais, em cada caso.”*

Entendemos que este aluno demonstrou um conhecimento desta característica (escaleno). Ele foi capaz de identificar esta propriedade comum nos triângulos e traduzí-la com suas próprias palavras.

No grupo F, quatro alunos apresentaram a seguinte resposta:

*“ – Todos são triângulos retângulo.”*

A11 disse,

*“- Sim, todos eles tem um ângulo de 90° graus.”*

Neste grupo, observamos que a maioria dos alunos apresentou um mesmo tipo de resposta e um aluno procurou apresentar esta característica enfatizando que o ângulo reto tem noventa graus.

No grupo G, que identificou os três lados como característica comum, obtivemos o mesmo tipo de resposta.

*“ – Todos tem três lados.”*

Seria precipitado afirmarmos que este último grupo não obteve êxito nesta questão já que, todos fizeram uma análise das figuras apresentadas e foram capazes de apontar uma equivalência na quantidade de lados. Entendemos que, talvez, falte para estes alunos, um entendimento das propriedades dos triângulos. Além disso, parece-nos que não é claro para estes alunos que obrigatoriamente todo triângulo tem três lados. Consideramos que eles podem não ter assimilado que os triângulos também são classificados quanto aos seus lados<sup>5</sup>. Inferimos ainda que, ou eles não estudaram esta definição nas séries anteriores ou esqueceram este tipo de classificação de triângulos.

Destacaremos, agora, as respostas do grupo I que identificou uma característica existente entre os triângulos que não era procedente.

*“ – Sim, todos são triângulos.” (A 40).*

---

<sup>5</sup> Equilátero = três lados iguais; Isósceles = dois lados iguais; Escaleno = três lados diferentes.

Acreditamos que este aluno não compreendeu bem a questão, pois as figuras já são apresentadas como triângulos no enunciado da questão.

O aluno A42 não apresentou nenhuma característica comum. Como não entrevistamos, posteriormente, os alunos, não conseguimos identificar quais fatos o levaram a marcar três triângulos e dizer que eles apresentavam alguma semelhança.

O aluno A43 percebeu que a questão apresentava alguns triângulos e que se fizesse rotações em alguns, conseguiria obter triângulos iguais e dispostos da mesma forma.

O aluno A44 percebeu que os dois triângulos eram congruentes, soube associá-los e percebeu que unindo dois triângulos pela sua hipotenusa, obteria uma nova figura. Entretanto, ele “errou” dizendo que esta nova figura seria um quadrado, na verdade esta figura seria um retângulo.

A41 respondeu

*“ – Sim, todos tem a mesma altura.”*

Este aluno não demonstrou ter um conhecimento sobre o que realmente é a altura de um triângulo porque, em seu teste, ele não identificou as alturas dos triângulos apresentados nas questões cinco e seis.

Avaliamos que os dezoito alunos que não responderam à questão número dois, possivelmente ainda não atingiram o nível 1. No entanto, poderiam não ter entendido o que seria “característica comum”.

Nosso objetivo inicial, nesta questão, era o de verificar se os alunos identificariam as duas características em conjunto. Entretanto, quando estávamos avaliando as respostas, percebemos que o enunciado da questão 2 não deixava explícita tal situação, dando margem a outra interpretação. Apesar disto, com base nos resultados poderíamos indicar

que, em relação à esta questão, 70% dos alunos não tiveram uma boa formação no nível 1.

### QUESTÃO 3

3- Utilizando suas palavras, como você definiria um triângulo?

A terceira questão foi baseada no **nível dedução informal (nível 2)**. Nela, pedimos aos alunos que definissem um triângulo com suas palavras, chegamos aos seguintes resultados:

GRUPO J	GRUPO L	GRUPO M	GRUPO N
Apresentaram uma definição apropriada	Definiram triângulo como uma figura que possui três lados	Definiram triângulo como uma forma geométrica	Não resolveram a questão
22%	40%	8%	30%

No grupo J, que apresentou uma definição apropriada, destacamos as seguintes respostas

“ – *É uma forma geométrica com 3 ângulos, sejam eles iguais ou não.*” (A 11)

“ – *Três retas concorrentes.*” (A 34)

“ – *Um triângulo são três pontos ligados.*” (A 36)

“ – *Conjunto de 3 retas interligadas entre si a pontos em suas extremidades.*” (A 50)

Neste grupo, pudemos observar que os alunos foram capazes de definir alguma característica do triângulo com suas palavras e todas são bem coerentes, embora incompletas e com uma linguagem pouco formal.

No grupo L, que caracterizou o triângulo como uma figura de três lados, encontramos 12 alunos que apresentaram o mesmo tipo de resposta.

“ – *Uma figura geométrica de três lados.*”

Na questão de número dois, o grupo G apresentou essa mesma resposta. Contudo, apenas seis alunos deste grupo apresentaram a mesma resposta na questão de número dois.

Os outros oito alunos definiram um triângulo como uma figura que possui três lados, foram mais além na determinação das características do triângulo. Quatro alunos disseram:

*“ – Todos os lados iguais.”*

A 41 escreveu:

*“ – Três lados, de medidas diferentes.”*

Este aluno definiu, com suas palavras, o triângulo escaleno.

A16 afirmou:

*“- Possui três lados iguais ou diferentes.”*

Este aluno apresentou a noção de triângulo equilátero e escaleno.

A17 respondeu:

*“ – Com 3 lados, sendo uma base e dois lados iguais ou não.”*

Este aluno definiu o triângulo isósceles e o escaleno, apresentando uma maturidade maior dentro de seu grupo ao enunciar estas características.

A 12 identificou como uma:

*“ – Figura geométrica contendo três lados.”*

Já o grupo M, que definiu o triângulo como uma figura geométrica, constatamos que todos responderam de maneira semelhante:

*“ – Uma figura geométrica.”*

Consideramos que estes alunos talvez não entendam que definir um triângulo significaria enunciar os atributos essenciais e específicos do mesmo, de tal forma que ele não possa ser confundido com outra figura. Estes alunos que também não souberam identificar as características dos triângulos, não distinguiram, possivelmente, nenhuma particularidade das figuras apresentadas, pois as respostas apresentadas por eles não caracteriza um triângulo.

Avaliamos que 50% dos alunos não tiveram êxito nesta questão.

#### QUESTÃO 4

4 - Você é capaz de determinar as características (propriedades) geométricas de um triângulo?

Esta questão foi baseada no **nível da dedução formal (nível 3)**, obtivemos o seguinte resultado:

GRUPO O	GRUPO P
Definiram de forma não procedente	Não fizeram a questão
12%	88%

Apresentamos, a seguir, as respostas dos seis alunos que responderam à esta questão:

“ – Tem 3 lados que podem ou não ser iguais.” (A 8)

“ – Linhas se ajuntando.” (A 13)

“ – Cateto adjacente, cateto oposto, hipotenusa.” (A 17)

“ – Seus 3 lados.” (A 38)

“ – Existe triângulo equilátero, isósceles, pirâmide, escaleno, etc.” (A 44)

“ – Isósceles, escaleno, etc.” (A 50)

Percebemos, pelas respostas, que estes alunos apenas classificaram os triângulos quanto aos lados. Apesar de A17 ter definido os lados de um triângulo retângulo, constatamos que ele não obteve êxito na questão número dois, na qual se pede que se identifique uma característica comum entre os triângulos que eram retângulos.

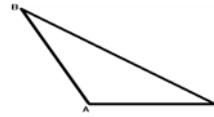
#### QUESTÃO 5

5 – Dado o triângulo ABC, trace a altura relativa ao lado  $\overline{BC}$ .



**QUESTÃO 6**

6 – Dado o triângulo ABC, trace a altura relativa ao lado  $\overline{AC}$ .



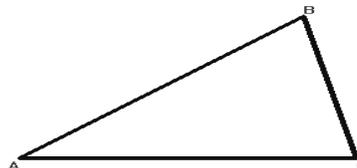
Nestas questões obtivemos os resultados:

GRUPO Q	GRUPO R	GRUPO S
Identificaram as duas alturas corretamente	Identificaram apenas a altura interna	Não resolveram as questões cinco e seis
6%	12%	82%

Apenas o aluno A18, do grupo Q, identificou que a altura é um segmento perpendicular ao lado. No grupo R, nenhum aluno destacou que a altura é um segmento perpendicular.

**QUESTÃO 7**

7 – Dado o triângulo ABC, determine a bissetriz interna relativa ao ângulo  $\hat{A}$ .



GRUPO T	GRUPO U
Resolveram a questão	Não resolveram a questão
2%	98%

Apenas o aluno A18 resolveu esta questão deixando claro, em sua resposta, que a bissetriz é um segmento que divide um ângulo em dois ângulos iguais.

Como a maioria dos alunos que não fez esta questão, inferimos que, provavelmente, eles não dominam dos conceitos necessários para resolver a questão ou não estudaram este conteúdo.

É necessário destacar, que nas questões 5, 6 e 7, nenhum dos alunos reclamou que não poderia fazer a questão por falta de instrumentos como a régua e o compasso. Os alunos que resolveram essas questões fizeram o traçado à mão livre.

Optamos, também por um outro tipo de análise no aspecto quantitativo, procuramos pontuar cada questão com um ponto, obtivemos o seguinte gráfico com as notas:

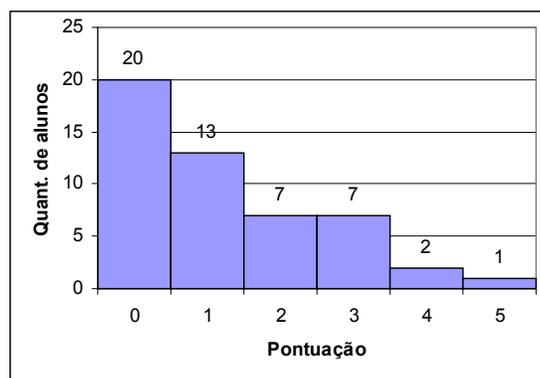


Gráfico 1

Os resultados apresentados por este gráfico chamam nossa atenção, pois, se considerarmos que foram bem no teste os alunos que tiveram, no mínimo, 50% de aproveitamento, teremos apenas 6% dos alunos. Se considerarmos que a média é 60%, apenas um aluno ficaria acima da média.

É necessário indicar que 40% dos alunos não responderam as questões do teste. Como já dissemos anteriormente, não fizemos uma posterior entrevista. Deste modo, não podemos fazer nenhuma inferência em relação a este dado, mesmo porque os alunos podem ter optado por não resolverem as questões porque sabiam que se tratava de uma pesquisa e, portanto, não era um teste aplicado pelo professor.

Preocupa-nos, no entanto, que os alunos que não resolveram o teste, podem não deter os conhecimentos necessários para responderem às questões. Preocupa-nos, igualmente o baixo índice de acerto nas questões dos alunos que estão cursando o terceiro ano do Ensino Médio. Esses dados podem revelar que o ensino de geometria, e em particular, o

estudo dos triângulos ou não estão sendo ensinados adequadamente para os alunos, ou este conteúdo não é significativo para os estudantes. Já nas quatro primeiras séries do Ensino Fundamental, o reconhecimento de figuras geométricas está presente. O triângulo é uma das figuras mais utilizadas, já que comparece no estudo do “Teorema de Pitágoras”, na trigonometria, nas relações métricas do triângulo retângulo, em diversos problemas de Física, conteúdos que constam obrigatoriamente dos programas escolares.

Lorenzato (1995) deduz que

*“(...)as questões [que envolvem a geometria] exigem uma leitura diferente da Aritmética ou Algébrica, na medida em que, para resolvê-las, é preciso ter percepção geométrica, raciocínio geométrico e linguagem geométrica, fatores estes essenciais na relação real/formal e que pouco têm sido desenvolvidos em nossas escolas devido à quase ausência do estudo da Geometria.” (p.5)*

Para ele muitos alunos que, ao se depararem com tais questões, ficam sem ação dizendo que é impossível resolver tais questões devido a ausência de números. Este também poderia ser um motivo pelo qual vários alunos não responderam ou não apresentaram êxito na resolução das questões.

Não foi nosso objetivo avaliar a instrução recebida por estes alunos ao longo do Ensino Básico. No entanto, podemos afirmar que os resultados da nossa investigação confirmam as conclusões das pesquisas realizadas por Zuin (1997), Perez (1995), Lorenzato (1995), Pavanello (1999) e Peres & Zuin (2001), quanto à deficiência no ensino da geometria nas escolas do Ensino Básico.

### **Considerações finais**

Entendemos que muito ainda precisa ser feito para a inserção do ensino de geometria e das construções geométricas nas escolas. Como dissemos anteriormente, inicialmente tínhamos por objetivo aplicar dois testes aos alunos. O primeiro avaliou o conhecimento dos alunos quanto as propriedades e características do triângulo e, o segundo, teria por objetivo verificar, especificamente, se os alunos possuem o conhecimento necessário para a construção e identificação das cevianas.

Diante dos resultados do primeiro teste, resolvemos não aplicar o segundo. Julgamos que, se os alunos do terceiro ano do Ensino Médio não foram capazes de identificar um triângulo em algumas situações; não souberam classificar os tipos de triângulos quanto aos lados; se eles não foram capazes de enunciar as características de um triângulo, mesmo que de forma informal; possivelmente não deteriam os conhecimentos necessários para realizar o segundo teste. Pois, através deste último, tínhamos como objetivo verificar se os alunos conheciam a definição de cevianas e pontos notáveis do triângulo (Baricentro, Incentro, Ortocentro e Circuncentro). Julgamos, também, que o primeiro teste nos forneceu muitos dados que nos permitiram tecer algumas considerações.

Atualmente, encontramos vários programas de geometria que são utilizados em laboratórios de informática. O *Cabri-Géomètre*, vem ganhando espaço em algumas escolas, sendo um programa que permite a utilização de vários recursos em geometria. Entretanto, entendemos que se os alunos tivessem um conhecimento prévio das construções geométricas com régua e compasso, eles utilizariam melhor todos os recursos do programa.

Para os Van Hiele a idade ou a maturidade do aluno está em segundo plano, o que é mais importante no avanço ao longo dos níveis é a instrução recebida (método, organização do curso, conteúdo, materiais utilizados) (Crowley, 1994).<sup>6</sup> Julgamos ser necessário associar as construções com régua e compasso aos novos recursos para que o ensino das construções geométricas retome o seu efetivo lugar nos currículos escolares, auxiliando no aprendizado da geometria, pois acreditamos que os traçados geométricos possibilitam ao aluno construir uma “imagem” da geometria que, às vezes, lhe parece muito abstrata. Peres & Zuin (2001) destacam essa necessidade em sua pesquisa, enfocando que apenas atividades lúdicas não são suficientes para desenvolver o pensamento geométrico. Uma intervenção mais efetiva com a utilização da régua e do compasso, associada à teoria da geometria, poderia contribuir para a construção do pensamento geométrico.

---

<sup>6</sup> “Os Van Hiele propuseram cinco fases seqüenciais de aprendizado: interrogação, orientação dirigida, explicação, orientação livre e integração. Afirmam que a instrução desenvolvida de acordo com essa seqüência promove a aquisição de cada um dos níveis.” (Crowley, 1994, p. 6)

Especificamente para o 3º ciclo os PCN de Matemática ressaltam que neste ciclo merece atenção “o ensino de procedimentos de construção com régua e compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro, transferidor, estabelecendo-se a relação entre tais procedimentos e as propriedades geométricas que neles estão presentes.” Sendo “importante que essas atividades sejam conduzidas, de forma que mantenham ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade.” Além disso, é recomendada a “resolução de situações-problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.” E, a “identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.”

Verificamos que os livros didáticos de Matemática mais recentes trazem os conceitos de geometria em todo o livro, e não mais nos últimos capítulos, inclusive com atividades que exigem a utilização da régua e do compasso.

Neste trabalho, tivemos como intuito tecer algumas reflexões e considerações que possam contribuir para o repensar dos professores sobre o ensino da geometria e as potencialidades do ensino das construções geométricas em sua prática educativa.

**Palavras-chaves:** Ensino de geometria; Construções geométricas; Desenho geométrico.

## **BIBLIOGRAFIA E REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

BIGODE, Antônio José Lopes. **Matemática** hoje é feita assim. São Paulo: FTD, 2000.

BOYER, Carl B.. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2. ed., 2001.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática - 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais PCN Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEF, 1999.

CATUNDA, Omar, et al. **As Transformações Geométricas e o Ensino de Geometria**. Salvador: Centro Editorial e Didático da UFBA, 1988.

CROWLEY, Mary L. O modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico. In: LINDQUIST, Mary. SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinando geometria**. Trad. Hygino H. Domingues, São Paulo: Atual, 1994. p.1-20.

DIAS, Mônica S. da Silva. A importância do desenho na construção dos conceitos geométricos. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 6, 1998, São Leopoldo. **Anais...** São Leopoldo, RS: SBEM/UNISINOS, 1998, v. 2, p. 399.

FONSECA, Maria da Conceição F. Reis et.al. **O ensino de Geometria na Escola Fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GIOVANNI, José Ruy. **Matemática – Pensar e descobrir**. São Paulo: FTD, 1996.

GUELLI, Oscar. **Matemática: uma aventura do pensamento**. São Paulo: Ática, 2002.

GRASSECHI, Marica Cecília C., et al. **Promat**: projeto oficina de matemática. São Paulo: FTD, 1999.

GRAVINA, Maria Alice Geometria dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7, Belo Horizonte, 1996. **Anais...** Belo Horizonte, 1996. p.1-13.

HERSHKOWITZ, Rina; BRUCKHEIMER, Maxim; VINNER, Sholomo. Atividades com professores baseadas em pesquisa cognitiva. In: LINDQUIST, Mary. SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinando geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994. p. 273-289.

LINDQUIST, Mary. SHULTE, Albert P. **Aprendendo e ensinando geometria**. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1994.

LORENZATO, Sérgio. Por que não ensinar Geometria? **A Educação Matemática em Revista**, SBEM, n.4., p.3-13. set./1995.

PAVANELLO, Regina M. De Matemática e educação: o caso da Geometria. In: ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA e SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2, 1997. Águas de São Pedro. **Anais...** Rio Claro: Cruzeiro/ Comitê Brasileiro de História da Matemática, 1997. p.327-332.

\_\_\_\_\_. A Geometria no Ensino Fundamental. **Teoria e Prática da Educação**, p. 33-41 mar./1999.

PERES, Gilmer J.;ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Avaliando o ensino das construções geométricas para a construção do conhecimento de geometria. REUNIÃO ANUAL DA SBPC, 53, 2001, Salvador. **Anais Nação e diversidade, patrimônio do futuro.** (CD-ROM), Salvador: Universidade Federal da Bahia, 2001.

SEVERINO, A. J.. **Metodologia do trabalho científico.** 22. ed. São Paulo: Cortez, 2002.

ZUIN, Elenice de Souza Lodron. Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do ensino fundamental e o ensino das construções geométricas, entre outras considerações. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED (Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação), 25, 2002, Caxambu. **Anais...** (CD-Rom), Caxambu, 2002.

\_\_\_\_\_. **Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil.** 2001a. 211 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

\_\_\_\_\_. Um saber escolar com régua e compasso In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2001, São Paulo. **Anais...** São Paulo, Programa de Pós-graduados em Educação Matemática / Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001b. p.161-166.

\_\_\_\_\_. **O Desenho Geométrico como disciplina escolar no Brasil.** In: IV Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, SP: UNESP/Rio Claro, 2000. p. 276-282.

\_\_\_\_\_. Geometria e Desenho Geométrico, por quê e para quê? In: CONGRESSO NACIONAL DE EDUCAÇÃO, 2, 1997, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais.