EXPLORANDO A GEOMETRIA ATRAVÉS DA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E DA ETNOMATEMÁTICA

Maria Terezinha Gaspar – UnB – mtjg@terra.com.br[1]

Suzeli Mauro –UNESP – Rio Claro/SP – suzelim@rc.unesp.br[2]

ÍNDICE

PREFÁCIO **3**
1. As Simetrias na Cultura dos Indígenas Brasileiros e dos Siona Erro! Indicador não definido.
1.1. Introdução ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.2. Alguns Povos Indígenas ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.3. O Conceito de Simetria ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.4. Simetria em Relação a uma Reta ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.5. Simetria em Relação a um Plano ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.6. Simetria em Relação a um Ponto ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.7. Isometrias do plano ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.8. Translação ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.9. Rotação ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.10. Reflexão ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.11. Reflexão-deslize ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.12. Exercícios ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.13. Índice de Figuras ..... **Erro! Indicador não definido.**
1.14. Bibliografia ..... **Erro! Indicador não definido.**
2. A Área do Círculo no Antigo Egito **4**
2.1. Introdução 4
2.2. A Civilização Egípcia 4
2.3. O Método Egípcio 8
2.4. Explicações para a Fórmula Egípcia 9
2.5. Exercícios 16
2.6. Índice de Figuras 17
2.7. Bibliografia 17
3. Trapézio Isósceles e a Antiga Índia ..... Erro! Indicador não definido.
3.1. Introdução ..... **Erro! Indicador não definido.**
3.2. A Civilização Indiana ..... **Erro! Indicador não definido.**

---

[1] Doutora em Educação Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro/SP.

[2] Doutoranda em Educação Matemática pelo Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Unesp de Rio Claro/SP.

3.3. Área de um Trapézio ..... **Erro! Indicador não definido.**
3.4. Construção de Trapézios ..... **Erro! Indicador não definido.**
3.5. Considerações Finais sobre o Trapézio: ..... **Erro! Indicador não definido.**
3.6. Índice de Figuras ..... **Erro! Indicador não definido.**
3.7. Bibliografia ..... **Erro! Indicador não definido.**
4. O Teorema de Pitágoras na Antiga Babilônia ..... Erro! Indicador não definido.
4.1. Introdução ..... **Erro! Indicador não definido.**
4.2. A Civilização Mesopotâmica ..... **Erro! Indicador não definido.**
4.3. O Conteúdo da Tábula Plimpton 322 ..... **Erro! Indicador não definido.**
4.4. Problemas Teóricos e Práticos ..... **Erro! Indicador não definido.**
4.5. Descobrindo o Teorema de Pitágoras ..... **Erro! Indicador não definido.**
4.6. Exercícios ..... **Erro! Indicador não definido.**
4.7. Índice de Figuras ..... **Erro! Indicador não definido.**
4.8. Bibliografia ..... **Erro! Indicador não definido.**
5. O Volume da Pirâmide e do Tronco de Pirâmide na Antiga China Erro! Indicador não definido.
5.1. Introdução ..... **Erro! Indicador não definido.**
5.2. A Civilização Chinesa ..... **Erro! Indicador não definido.**
5.3. Os Sólidos Elementares e seu Volume ..... **Erro! Indicador não definido.**
5.4. O Método Utilizado por Liu Hui ..... **Erro! Indicador não definido.**
5.5. Volume do Tronco de Pirâmide ..... **Erro! Indicador não definido.**
5.6. Exercícios ..... **Erro! Indicador não definido.**
5.7. Índice de Figuras ..... **Erro! Indicador não definido.**
5.8. Bibliografia ..... **Erro! Indicador não definido.**

PREFÁCIO

Este livro foi escrito para servir como texto de apoio para o mini-curso intitulado *Explorando a Geometria através da História da Matemática e da Etnomatemática*.

Considerando a importância da utilização da dimensão histórica e da Etnomatemática no ensino-aprendizagem da Matemática nos propomos a apresentar alguns conteúdos geométricos inseridos na cultura de alguns povos.

Esperamos que o conteúdo deste livro desperte o interesse de professores de matemática e alunos de licenciatura para um estudo mais aprofundado dos diversos conteúdos geométricos estudados no ensino fundamental e médio em diversos contextos sócio-culturais.

Este trabalho tem como texto base a tese de doutorado intitulada *O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico em Algumas Civilizações do Mundo e a Formação de Professores* de autoria de Maria Terezinha Jesus Gaspar.

2. A Área do Círculo no Antigo Egito

2.1. Introdução

O círculo é uma das formas geométricas que aparece em várias civilizações e sociedades associada a rituais religiosos, a astronomia, a arquitetura ou tecelagem. Ele é considerado por alguns historiadores da matemática como o símbolo mais antigo desenhado pelo homem e sua origem remonta à pré-história.

Com relação ao cálculo da área do círculo são encontrados vários métodos e fórmulas nas antigas civilizações chinesa, babilônica, egípcia e indiana. Algumas destas fórmulas são exatas e outras aproximadas.[3]

Neste capítulo faremos uma análise e discussão da fórmula egípcia para calcular a área do círculo e de como esta pode ser utilizada no estudo do círculo no ensino fundamental e médio.

2.2. A Civilização Egípcia

O Egito está situado no nordeste da África, entre os desertos do Saara e da Núbia. É cortado pelo rio Nilo no sentido sul-norte, formando duas regiões distintas: o vale, estreita faixa de terra cultivável, apertada entre desertos, denominado Alto Egito e o delta, em forma de leque, com maior extensão de terras aráveis, pastos e pântanos; denominado Baixo Egito. [Figura 1].

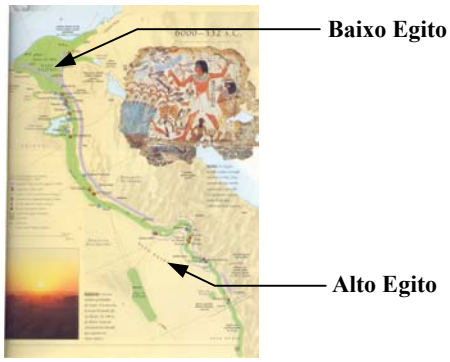

Figura 1

Como as enchentes do Nilo eram regulares e previsíveis, os egípcios não precisavam de trabalhos de recuperação de terras. Além disso, a proteção natural dos

[3]Maiores informações podem ser encontradas em Gaspar, M. T. J., "O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico em Algumas Civilizações do Mundo e a Formação de Professores".

desertos e das montanhas mantinha este povo em isolamento, livre de invasões estrangeiras e vivendo pacificamente.

A agricultura no vale do Nilo surgiu a partir de 6000 a.C. e, por volta de 4000 a.C. os primeiros egípcios se fixaram às margens do Nilo e iniciaram o cultivo do trigo, cevada, linho e a domesticação de animais.

Por volta de 3100 a.C. o Egito foi unificado dando início ao chamado Antigo Império cuja capital era Mênfis. Durante este período seis dinastias governaram o país, cada uma delas encabeçada por uma linhagem de faraós que eram venerados como um deus e considerados um intermediário entre os deuses e os mortais. Este papel nutriu o desenvolvimento da monumental arquitetura egípcia incluindo as pirâmides, a construção de sepulturas reais e de grandes templos como os de Luxor e Karnak. O poder absoluto dos faraós atingiu o auge durante a IV dinastia cujos faraós Quéops, Quefren e Miquerinos mandaram construir enormes pirâmides.

Com o término do Antigo Império seguiu-se uma fase intermediária na qual três dinastias governaram o Egito. Após esta fase foi instaurado o Médio Império, com capital Tebas, que durou de 2000 a.C. a 1700 a.C. aproximadamente. Considerado um período de maior responsabilidade social, durante a XII dinastia além do grande desenvolvimento intelectual realizaram obras públicas que beneficiaram toda população, como por exemplo, a construção de uma grande represa para armazenamento das águas.

O período intermediário que se seguiu foi marcado por uma rebelião de camponeses e escravos e pela ocupação do delta pelos hicsos, povo de origem asiática, iniciando uma fase que durou cerca de um século e meio.

O Novo Império teve início com a expulsão dos hicsos por volta de 1580 a.C. e durou até aproximadamente 1087. Neste período o país foi governado por três dinastias de faraós e a política dominante não era mais pacífica. Foi um período de grande expansão territorial que chegou até o rio Eufrates na Síria.

O Novo Império começou a se desmoronar a partir de uma decadência social com sinais de desorganização interna e da invasão de bárbaros, e se acelerou com o poder crescente dos sacerdotes. Ao mesmo tempo, os próprios egípcios pareciam ter perdido a criatividade. Em 670 a.C. o Egito é conquistado pelos assírios, em 662 a.C. readquirem sua independência que leva ao renascimento cultural, mas em 525 é conquistado pelos persas e em 332 cai nas mãos do exército de Alexandre Magno e a antiga civilização egípcia não mais se recupera.

Os egípcios desenvolveram sua primeira forma de escrita no período pré-dinástico. Este sistema conhecido como hieroglífico compunha-se, do mesmo modo da escrita babilônica em seu começo, de sinais pictográficos para representar objetos. Ele foi evoluindo e no início do Antigo Império compreendia três tipos de caracteres: pictográfico, silábico e alfabético.

Esta escrita foi gradualmente desenvolvida pelos escribas[4]. Eles se encarregavam de arrecadar os impostos, dirigiam gigantescos exércitos de trabalhadores, desempenhavam trabalhos judiciais). Os escribas utilizavam a matemática para resolver questões relativas à medição de terras, especialmente depois das inundações do Nilo, ao cálculo de impostos e contribuições, ao cálculo da capacidade dos depósitos de provisões, à projeção de obras arquitetônicas, etc. Estes assuntos aparecem nos principais papiros matemáticos encontrados.

O conhecimento que temos hoje da matemática egípcia provém de cinco papiros, dos quais os mais importantes são o papiro Rhind e o papiro Moscou. Estes dois documentos datam provavelmente do século XVIII a.C. mas seu conteúdo trata de documentos ainda mais antigos. Além destes papiros existem outros, documentos jurídicos por exemplo, que possuem informações sobre a posição social da matemática.

O papiro Rhind foi descoberto por volta de 1850 provavelmente nas ruínas de uma pequena construção próxima ao templo mortuário de Ramssés II em Tebas. Foi trazido para Luxor por Alexander Henry Rhind. Após a morte de Rhind o papiro foi comprado pelo Museu Britânico em 1865. Hoje ele é formado por um rolo contendo 14 folhas de papiros com cerca de 40 cm de largura e 23 cm de altura, coladas em um de seus lados perfazendo 513 cm de comprimento mas parece que o rolo original continha 20 folhas. Também é conhecido como papiro Ahmose ou papiro Ahmes em razão de ter sido copiado por volta de 1650 a.C. pelo escriba Ahmose segundo o qual é a cópia de trabalhos mais antigos. Provavelmente trata-se de um registro dos conhecimentos de Imhotep, o lendário físico e arquiteto da época do faraó Djozer da 3ª. Dinastia. Ele contém 87 problemas e suas soluções e é considerado a fonte da matemática egípcia mais compreensiva.

O Prof. Jaroslav Cerný apresenta fatos e figuras de partes do papiro na versão publicada de sua conferência feita em 1947 na University College London que o coloca na época do Médio Reinado e do período imediatamente posterior quando o papiro foi feito.

---

[4] profissionais da administração do estado pertencentes à sociedade dominante e exploradora.

O papiro Moscou é considerado o segundo papiro matemático mais importante, data do Médio Império e é um pouco mais antigo que o papiro Rhind. Foi comprado em 1893 por V. S. Golenishchev (- 1947). Um fragmento dele encontra-se bem preservado no Museu das Finas Artes em Moscou formado por folhas de 8 cm de comprimento por um quarto de altura. Escrito cerca de 1850 a.C. por um escriba desconhecido, este papiro contém 25 problemas e nele estão dois resultados notáveis da matemática egípcia: a fórmula para o volume do tronco de pirâmide e a solução para um problema que alguns acreditam tratar-se da área de um hemisfério.

O caráter prático da geometria egípcia levou alguns comentaristas a questionarem se ela pode ser propriamente descrita como geometria mas, segundo Joseph, esta é uma visão restrita. Para ele, a própria palavra geometria vem de duas palavras gregas que significam "terra" e "medida" indicando que o assunto tinha sua origem na medição de terras e outras aplicações práticas, e foi da necessidade de calcular áreas de terrenos e volumes de silos[5] e pirâmides que emergiu a geometria egípcia com seu peculiar caráter prático.

Problemas de medidas sobre volumes e áreas das figuras planas e dos sólidos mais familiares foram, em sua maioria, trabalhados corretamente. Calculavam com precisão áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles, provavelmente pelo método de decomposição e recomposição de figuras, análogo ao da geometria chinesa como veremos; obtiveram valores aproximados para π, possuíam métodos para calcular o volume da pirâmide, do cilindro e talvez a área de um hemisfério.

Como alguns dos celeiros ou depósitos de provisões egípcios tinham a forma de um **cilindro circular reto,** eles conheciam um método para calcular do volume de um cilindro e este era análogo ao modo como fazemos hoje: como o produto da área da base pela altura e era o mesmo que eles utilizavam para determinar o volume de um bloco retangular ou paralelepípedo.

Recipientes cilíndricos são utilizados ainda hoje para armazenar alimentos, grãos, combustíveis, etc. Assim, determinar a capacidade de recipientes cilíndricos era uma necessidade dos antigos egípcios e continua sendo necessária em nossos dias.

Como a base de um cilindro circular reto é um círculo conhecer um método que permitisse determinar a área do círculo era uma necessidade prática. Assim, é nos problemas relativos ao cálculo de capacidades de celeiros cilíndricos que encontramos o

[5] Locais onde eram armazenados o excedente da colheita.

método que os egípcios utilizavam para calcular a área do círculo. Este método aparece nos problemas 41, 42, 43, 48 e 50 do papiro Rhind.

2.3. O Método Egípcio

Os problemas 48 e 50 são muito interessantes do ponto de vista matemático e eles podem dar uma pista de como os egípcios chegaram à fórmula para o cálculo da área do círculo.

Problema 48:

Compare a área do círculo com a do quadrado circunscrito.

Este é o único entre os 87 problemas do papiro Rhind em que a solução contém uma ilustração geométrica. [Figura 2].

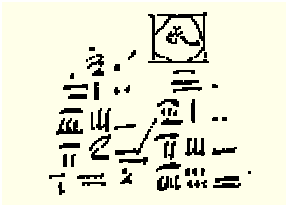

Figura 2

Problema 50:

"Exemplo de um corpo redondo de diâmetro 9. Qual é a área?

Neste problema o escriba inclui um círculo com inscrições hieráticas. [Figura 3].

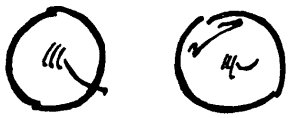

Figura 3

Solução apresentada pelo escriba:

Remova 1/9 do diâmetro, o restante é 8.

Multiplique 8 por 8; perfaz 64. Portanto, a área é 64.

Assim, podemos inferir que o método usado pelo escriba para calcular a área do círculo pode ser:

"Subtraia do diâmetro sua nona parte e eleve o restante ao quadrado. Esta é sua área."

Em outras palavras o escriba estaria usando a fórmula

$$A = \left(d - \frac{d}{9}\right)^2 = \left[\left(\frac{8}{9}\right)d\right]^2$$

onde **d** é o diâmetro do círculo.

Isto leva a seguinte aproximação para π:

$$\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 \quad \rightarrow \quad \pi = 4\left(\frac{8}{9}\right)^2 \cong 3{,}160493$$

O erro é de apenas 0,0189.

Os problemas 41-43 são aqueles que estão relacionados diretamente à questão do cálculo da capacidade de celeiros e é onde encontramos a aplicação da fórmula egípcia.

No problema 41 a base circular do celeiro cujo volume é encontrado tem diâmetro 9. A área da base de acordo com a regra egípcia é 64 e como a altura é 10, seu volume é 640.

O problema 42 também é sobre o volume de um celeiro cilíndrico mas o diâmetro da base é 10 ao invés de 9.

O problema 43 apresenta uma regra relacionando as fórmulas para calcular o volume de um cilindro em duas unidades de medida de volume distintas.

Observe que em todos os problemas o diâmetro do círculo é igual a 9 [exceto o 42] e esta escolha provavelmente ocorreu por uma questão aritmética conveniente e não por se tratar de um dado obtido na prática. No entanto o raciocínio envolvido na solução apresentada pelo escriba independe do diâmetro ser 9.

Para refletir: A solução que acabamos de discutir é dada para um valor particular do diâmetro (**d**). No entanto, a partir desta solução foi possível chegar a uma fórmula geral que independe de qual seja o valor de **d**. Como você avaliaria e encaminharia o trabalho de um aluno que ao apresentar como solução para o problema de determinar a área de um círculo de diâmetro **d** qualquer, escolhesse um valor particular para **d** e a partir da solução apresentada por ele você percebesse que seria possível inferir uma fórmula geral para o problema ?

Não sabemos como os egípcios chegaram a fórmula

$$A = \left[\left(\frac{8}{9}\right)d\right]^2$$

para o cálculo da área de um círculo de diâmetro **d**, mas existem várias explicações que aparecem em alguns textos de história da matemática e de etnomatemática.

2.4. Explicações para a Fórmula Egípcia

As diversas explicações encontradas nos textos de história da matemática e de etnomatemática, baseadas no conhecimento sobre a cultura egípcia, fornecem uma

quantidade de materiais e métodos que podem ser utilizados em sala de aula na discussão do cálculo da área do círculo. Veremos a seguir algumas delas.

1ª. Explicação

Os egípcios para decorarem as paredes das construções cobriam tanto a parede como o modelo a ser utilizado com malhas quadriculadas e transportavam cada parte do modelo proporcionalmente para o local correspondente na parede.

Considere agora o desenho da figura 2 feito pelos egípcios e o fato deles usarem malhas quadriculadas.

O octógono inscrito no quadrado sugere naturalmente o desenho de uma malha formada por 9 quadrados. [Figura 4].

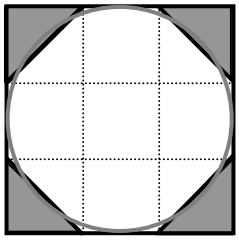

Figura 4

Inserindo na figura o círculo inscrito no quadrado, observamos que algumas regiões do octógono são exteriores ao círculo, e algumas do círculo exteriores ao octógono. Além disso "parece que" a área da região do octógono exterior ao círculo é "igual" à área da região do círculo exterior ao octógono. Isso nos leva a concluir que o círculo e o octógono devem ter aproximadamente a mesma área.

Mas se **d** é o diâmetro do círculo – que é igual ao lado do quadrado – temos que a área do octógono é igual a:

$$d^2 - 2\left(\frac{d}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}d^2 = \frac{63}{81}d^2 \cong \frac{64}{81}d^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

que é a fórmula egípcia.

2ª. Explicação

Observe também que a área do octógono é igual a área do quadrado menos 4 vezes a de um dos triângulos hachurados.

Dividindo cada um dos quadrados da malha em 9 quadrados menores de mesma área, isto produz uma malha que cobre o quadrado maior contendo 81 destes quadrados menores. [Figura 5a].

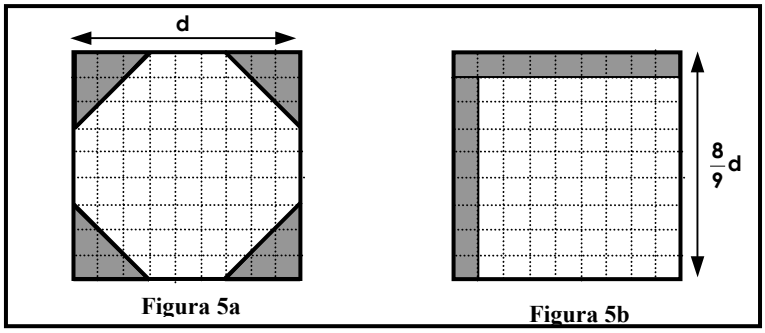

Figura 5a Figura 5b

A região hachurada pode ser reorganizada de acordo com a figura 5b.

Observe que:

- os dois triângulos hachurados no topo do quadrado juntos [Figura 5a] têm a mesma área do retângulo hachurado no topo do quadrado [Figura 5b];
- analogamente, os dois triângulos hachurados na base do quadrado juntos [Figura 5a] têm a mesma área do retângulo hachurado no lado esquerdo do quadrado [Figura 5b].

Assim, a área do octógono é igual à área do quadrado de lado $\frac{8}{9}d$ menos a área de lado $\frac{1}{9}d$.

Portanto, a área do círculo de diâmetro **d** é dada aproximadamente por:

$$A = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 - \left(\frac{1}{9}d\right)^2$$

$$= \left(\frac{8}{9}d\right)^2 - \frac{1}{81}d^2 \cong \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

que é a fórmula egípcia.

Observe que esta dedução independe da medida **d** do diâmetro do círculo.

3ª. Explicação

O fato dos pedreiros egípcios cobrirem seus desenhos e paredes com malhas quadriculadas e a tentativa experimental de desenhar um círculo de mesma área que um quadrado sugerem uma outra explicação para a fórmula egípcia.

Ao tentar desenhar um círculo de mesma área que um quadrado podemos chegar experimentalmente à figura 6.

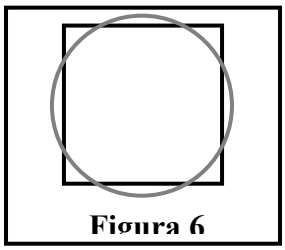

Figura 6

Esta figura sugere a divisão do lado do quadrado em quatro partes iguais [Figura 7a] e permite encontrar uma relação entre o diâmetro do círculo e o lado do quadrado utilizando o teorema de Pitágoras.

Se **d** é o diâmetro do círculo e **a** é o lado do quadrado então pelo teorema de Pitágoras:

$$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{16} = \frac{5a^2}{16} \quad \rightarrow r = \frac{\sqrt{5}a}{4} \quad \rightarrow d = 2r = \frac{\sqrt{5}a}{2} \quad \rightarrow a = \frac{2}{\sqrt{5}}d\,.$$

Por outro lado, os pontos resultantes da divisão do lado do quadrado em quatro partes iguais podem servir para a construção de uma malha quadriculada. [Figura 7b].

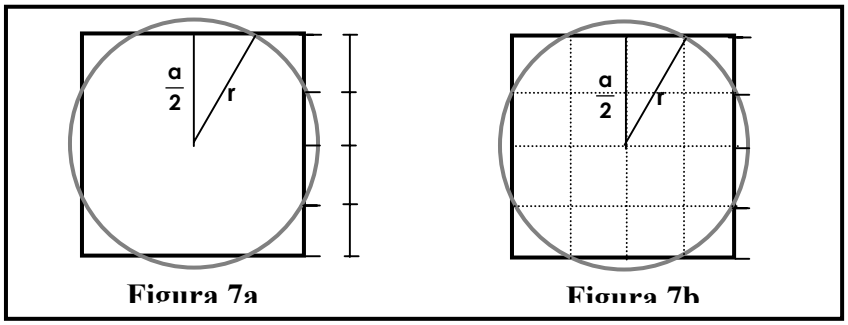

Figura 7a **Figura 7b**

A malha possibilita um modo de obter uma relação entre o lado do quadrado e o diâmetro do círculo.

Dividindo cada quadrado da malha em 16 quadrados menores de mesma área obtemos para o quadrado maior uma malha formada por 256 quadrados menores. [Figura 8a].

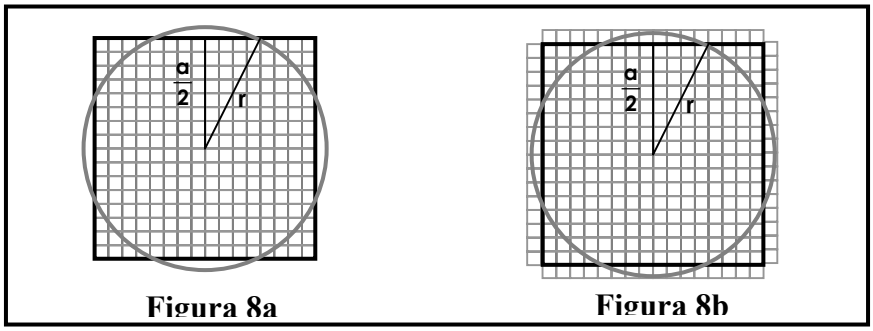

Figura 8a **Figura 8b**

Completando a figura 8a de modo a cobrir todo o círculo com a malha quadrada [Figura 8b] encontramos a seguinte relação entre **a** e **d**:

$$a = \frac{8}{9}d\,.$$

O erro relativo ao considerar para **a** o valor acima e não o valor $\frac{2}{\sqrt{5}}d$ é menor do que 0,62% e quase imperceptível para um diâmetro grande. Além disso, ao utilizar para a área do círculo a fórmula $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}d\right)^2$ ao invés de $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ o resultado será menos preciso.

4ª. Explicação

O jogo de tabuleiro *mancala* - que significa "transferir" em árabe – considerado por muitos historiadores como o jogo mais velho do mundo é o nome genérico para mais de 200 jogos semelhantes entre si, originários do Antigo Egito. Todos simbolizam a época da plantação e colheita e possuem de 3500 a 7000 anos. Tais jogos são muito populares na África e seu objetivo é transferir as peças de uma das casas do tabuleiro para as outras até que todas fiquem vazias. Como peças utiliza-se sementes quase esféricas, seixos ou grãos.

Segundo Gerdes, por se tratar de um jogo de estratégias seria natural que um dos participantes enquanto esperasse pelo término da jogada do outro, brincasse com suas peças podendo dentre outras coisas "formar", "transformar" e "contar" padrões geométricos.

Por exemplo, é possível construir com 10 peças circulares do jogo um triângulo eqüilátero e depois transformá-lo em um retângulo. [Figura 9].

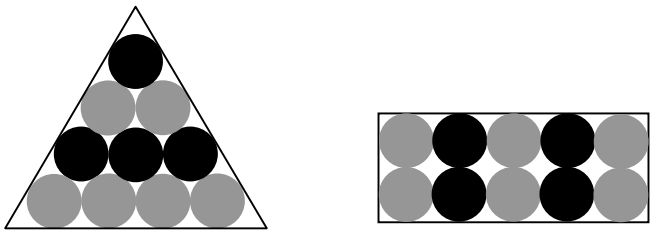

Figura 9

A área "aproximada" destas duas figuras seria a mesma.

É possível também "construir" círculos usando peças circulares do jogo (círculos menores) e, um modo simples de fazê-lo é construir anel por anel. [Figura 10].

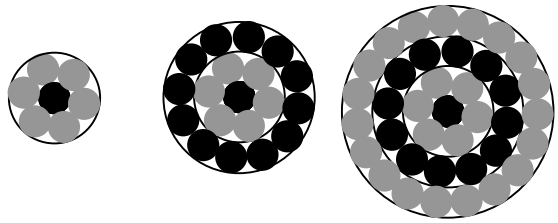

Figura 10

Sejam **d** o diâmetro do círculo maior e **D** o diâmetro do círculo menor.

Podemos considerar D = 1. Assim, as áreas dos círculos da figura são respectivamente 7 e 19.

Usando o método descrito acima é possível construir novos círculos com o acréscimo de novos anéis.

A área de tais círculos aparece numa tabela e pode ser verificada experimentalmente.

d	**Área do círculo**
1	1
3	1 + 6 = 7
5	1 + 6 + 12 = 19
7	1 + 6 + 12 + 19 = 38
9	1 + 6 + 12+ 19 + 25 = 63
11	1 + 6 + 12 + 19 + 25 + 31= 94

Se A(d) e A(D) são respectivamente as áreas dos círculos de diâmetros **d** e **D** então, observe que a área do círculo de diâmetro d = 9 é igual a

$$(1 + 6 + 12 + 19 + 25) \times A(D) = 63 \times A(D).$$

Assim,

$$A(d = 9) = 63 \times A(D) \cong 64 \times A(D).$$

Mas 64 é um quadrado perfeito

$$64 = 8^2$$

e é a área de um quadrado de lado 8. Portanto, é possível com os 64 círculos de diâmetros D = 1 cobrir um quadrado de lado 8. [Figura 11].

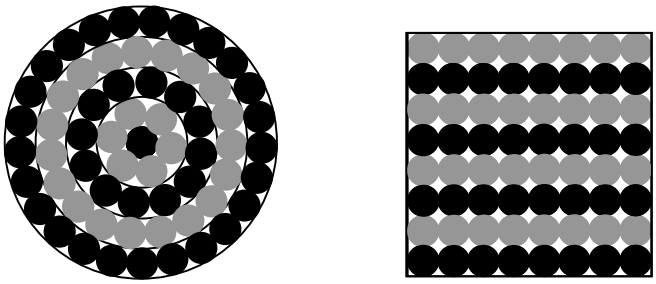

Figura 11

Logo,

$$A(d = 9) = 64 = 8^2 = \ell^2$$

onde ℓ é o lado do quadrado.

$$\begin{matrix} \ell = 8 \\ d = 9 \end{matrix} \quad \rightarrow \frac{\ell}{d} = \frac{8}{9}$$

$$\ell = \frac{8}{9}d \quad \rightarrow A(d) = \ell^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

que é a fórmula egípcia.

5ª. Explicação

Curvas do tipo espirais são utilizadas em alguns países da África para simbolizar serpentes. Estas curvas são gravadas em portas de madeira e aparecem naturalmente como resultado final da construção de esteiras e cestos. [Figura 12].

Figura 12

Este padrão espiral era um motivo comum na decoração de paredes de "locais de funeral". Ele também aparece no formato do tabuleiro do "jogo serpente" do Antigo Egito e do pão real.

O jogo Mehen ou jogo da serpente era um dos jogos de tabuleiro favoritos do Velho Reinado e é considerado, um dos mais antigos jogos de tabuleiro do mundo. Ele era jogado sobre um tabuleiro que tinha a figura de uma serpente enrolada e seu corpo dividido em quadrados. [Figura 13].

Figura 13

Formato semelhante ao do tabuleiro do "jogo da serpente" aparece na construção de esteiras espirais de sisal.

O processo de construção de tais esteiras sugere um outro modo para explicar a fórmula egípcia para o cálculo da área do círculo.

Este processo consiste em enrolar a corda em torno de um ponto fixo e costurar ao longo das espirais determinadas pelas laterais da corda. A extremidade final da tira é cortada e costurada de modo a dar à esteira a forma de um círculo. [Figura 12].

Supondo que os antigos egípcios sabiam fazer esteiras semelhantes, e que uma corda de sisal pode ser considerada como um retângulo, a área do círculo construído utilizando uma corda de sisal pode ser calculada como a área de um retângulo cujas dimensões lineares são o comprimento e largura da corda.

Podemos considerar como unidade de medida a largura da corda. Sejam ℓ o comprimento da corda necessária para construir um círculo de diâmetro **d**.

A tabela a seguir fornece o comprimento da corda e o diâmetro do círculo em função do número de voltas completas (**V**) dadas pela corda e pode ser verificada experimentalmente. [Figura 14].

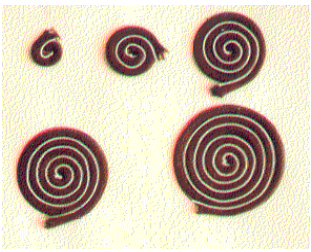

Figura 14

V	2	3	4	5	6
ℓ	7	20	39	64	95
D	3	5	7	9	11

Observando os resultados obtidos vemos que para d = 9, a área do círculo de diâmetro **d** é A = 64 = 8^2. Isto é, a área do círculo de diâmetro **d** é igual a área de um quadrado de lado n = 8.

Assim, temos:

$$\begin{matrix} d = 9 \\ n = 8 \end{matrix} \rightarrow \frac{n}{d} = \frac{8}{9} \rightarrow A = \ell = n^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2$$

que a fórmula egípcia.

Esta explicação e a anterior podem dar indícios da razão pela qual o escriba escolheu o valor d = 9 para resolver o problema do cálculo da área do círculo.

As tiras de sisal utilizadas pelos africanos podem ser substituídas por outros materiais encontrados facilmente em cada região do país como por exemplo cordas de sisal, de nylon, de algodão, etc. Materiais concretos podem ser criados para facilitar a construção da espiral e a medição do comprimento das tiras.

2.5. Exercícios

Exercício 1: Verifique experimentalmente os dados das tabelas das explicações 4 e 5. Escolha para isso um material adequado.

Exercício 2: Escreva atividades sobre o cálculo da área do círculo a serem aplicadas no ensino fundamental utilizando cada uma das explicações discutidas neste capítulo.

Exercício 3: Discuta quais conceitos e propriedades geométricas podem ser exploradas a partir do estudo deste capítulo.

Exercício 4: Neste capítulo foi discutido o uso da fórmula $\left(\frac{8}{9}d\right)^2$ para calcular a área do círculo que é uma solução aproximada para o problema. Discuta com seus colegas a importância de utilizar fórmulas aproximadas para resolver problemas geométricos. Quando isto deve ser feito, como e em que momento os alunos devem abandonar as soluções aproximadas substituindo-as por soluções exatas?

Exercício 5: Vimos neste capítulo que o problema do cálculo da área do círculo no Antigo Egito estava associado ao problema prático de determinar a capacidade de celeiros cilíndricos. Prepare uma lista de problemas, levando em conta a realidade de seus alunos, cuja solução envolve o cálculo da área de círculos e a capacidade de cilindros.

2.6. Índice de Figuras

Figura 1: Mapa do Antigo Egito. HAYWOOD, J. p. 27 25
Figura 2: GILLINGS, R J. p 140 28
Figura 3: GILLINGS, R J. p 139 28
Figura 4: 30
Figura 5: 31
Figura 6: 31
Figura 7: 32
Figura 8: 32
Figura 9: 33
Figura 10: 33
Figura 11: 34
Figura 12: Foto de artesanato brasileiro 35
Figura 13: Tabuleiro do jogo da serpente . Antigo Egito.
http://www.scit.wlv.ac.uk/~in7019/egypt/enter.htm 35
Figura 14: Foto de material construído com barbante de algodão 36

Palavras Chaves: História da Geometria, Ensino de Geometria, Etnomatemática.

2.7. Bibliografia

BOYER, C. B. TRAD. GOMIDE, E. **História da Matemática** 2a. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 1996. 496 p.

BUNT, L. N. H. & JONES, P. S. & BEDIENT, J. D. **The Historical Roots of Elementary Mathematics** 1a. Dover ed. New York: Dover Publications Inc., 1988. 299 p.

BURNS, E. M. TRAD. GARSCHAGEN, D. **História da Civilização Ocidental** 40a. ed. São Paulo: Globo, 2000. 401 p. v. 1.

CAJORI, F. **History of Mathematics** New York: Chelsea Publishing Company, 1991. 524 p.

ENGELS, H. Quadrature of the Circle in Ancient Egypt **Historia Mathematica**, v. 4, p. 137-140, 1977.

EVES, H. TRAD. DOMINGUES, H. H. **Introdução à História da Matemática** Campinas: UNICAMP, 1997. 843 p. (Repertórios.)

FAUVEL, J. & GRAY, J. (ED.). **The History of Mathematics . A Reader** Hong Kong: Macmillam Press/The Open University, 1993. 628 p.

GERDES, P. **Sobre o Despertar do Pensamento Geométrico** 1986. Tese de Doutorado - Instituto Superior Pedagógico "Karl Friedrich Wilhelm Wander" de Dresden (RDA).

GERDES, P. Three Alternative Methods of Obtainting the Ancient Egyptian Formula of the Area of a Circle. **Historia Mathematica**, v. 12, p. 261-268, 1985.

GILLINGS, R J. **Mathematics in the time of the Pharaohs** New York: Dover Publications Inc., 1972. 288 p.

JOSEPH, G. G. **The Crest of The Peacock** 2a. ed. USA: Princeton University Press, 2000. 455 p.

KATZ, V. J. J. Egyptian Mathematics *In:* HISTÓRIA E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 1996, Braga. **História e Educação Matemática. Proceedings. Actes. Actas. v. I.** Braga, 1996. p. 45-53.

KATZ, V. J. J. **A History of Mathematics. An Introduction** 2a. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc., 1998. 856 p.

KNORR, W. R. **The Ancient Tradition of Geometric Problems** New York: Dover Publications Inc., 1993. 410 p.

PENNICK, N. TRAD. FELTRE, A. **Geometria sagrada. Simbolismo e intenção nas estruturas religiosas** 9a. ed. São Paulo: Pensamento, 1999. 146 p.

ROBERTS, J. M.; TRAD. ALVES, L. & REBELLO, A. **O Livro de Ouro da História do Mundo: Da Pré-História à Idade Contemporânea** 1a. ed. Rio de Janeiro: Ediouro, 2000. 816 p.

ROBINS, G. & SHUTE C. **The Rhind Mathematical Papyrus. An Ancient Egyptian Text** 1a. ed. New York: Dover Publications Inc., 1987. 60 p.

SEIDENBERG, A. The Ritual Origin of Geometry **Archieve for History of Exact Sciences.**, p. 488-527, 1963.

SEIDENBERG, A. On the Volume of a Sphere **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 39, n. 2, p. 97-119, Dezembro 1988.

SEIDENBERG, A. The Origin of Mathematics **Archive for History of Exact Sciences**, Berlin, v. 18, n. 4, p. 301-342, Junho 1978.

WUSSING, H. **Lecciones de Historia de las Matemáticas** Madrid: Siglo XX de España Editores S. A., 1998. 345 p.

Observação: Aqui apresentamos somente parte do material do mini-curso (capítulo 2), pois além dele exceder a quantidade máxima de caracteres estipulada pela comissão científica, possui aproximadamente 11.000Kb no formato Word, em razão da grande quantidade de figuras e desenhos. Acreditamos que com este capítulo seja possível obter uma idéia de como tratamos o tema. Consideramos que quaisquer cortes que fizéssemos, estes implicariam em reduzir as atividades. Na forma como o texto se apresenta na íntegra, ele poderá ser plenamente realizado em 5 horas, que é o tempo previsto para os mini-cursos.

Quanto à metodologia de trabalho a ser adotada durante o mini-curso, haverá momentos de apresentação expositiva dos ministrantes, com as atividades a serem realizadas pelos participantes (algumas individualmente e outras em grupo), seguidas de discussões gerais.