Realização SBEM 15 anos SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DE FUNÇÃO LINEAR FUNDAMENTADA NA ABORDAGEM ANTROPOLÓGICA

Renata Rossini PUC-SP
renatars@uol.com.br

OBJETIVOS

Discutir as noções introduzidas na abordagem antropológica na Didática da Matemática e apresentar a dicotomia fundamental entre os dois tipos de objetos da Matemática: ostensivos e não-ostensivos. Além disso, o estudo procura mostrar como um professor pode utilizar essas noções para ensinar função linear, ativando determinadas praxeologias.

QUADRO TEÓRICO

Introdução

Considerando-se a Matemática como um componente da cultura humana, o estudo de seu desenvolvimento nas diversas sociedades pode ser abordado como uma faceta específica da antropologia cultural.

O enfoque antropológico na Didática da Matemática foi proposto por BOSCH e CHEVALLARD (1999), que afirmaram que o saber matemático é fruto da ação humana: é algo que se produz, se utiliza, se ensina, ou mais geralmente, se transpõe nas instituições. A noção essencial é aquela de organização praxeológica ou praxeologia, que é uma das formas de modelagem do conhecimento matemático.

Organização praxeológica

A palavra praxeologia é formada por dois termos gregos, *práxis e logos,* que significam, respectivamente, prática e razão. Ela lembra que uma prática humana, no interior de uma instituição, está sempre acompanhada de um discurso mais ou menos desenvolvido, de um *logos* que a justifica, a acompanha e que lhe dá razão.
As noções: (tipos de) tarefas, (tipos de) técnicas, tecnologia e teoria permitem modelar as atividades matemáticas. Em outras palavras, toda atividade humana consiste em executar uma tarefa t de determinado tipo T, por meio de uma certa técnica τ, a qual é justificada por uma certa tecnologia θ e a qual, por sua vez, é justificada por uma teoria Θ.

São exemplos de tarefas: montar uma escala, calcular o valor de uma função num ponto, construir o gráfico de uma função. As tarefas são expressas com a utilização de verbos. Tomando-se, por exemplo, o verbo calcular, podem ser montadas diversas expressões, que formam um tipo de tarefa.

Nos livros didáticos há diversos exercícios, tais como “construir o gráfico da função $f(x) = 2x$”. Analisando-se este exercício, sob a luz da organização praxeológica, tem-se:

A tarefa t : construir o gráfico da função $f(x) = 2x$.

A técnica τ: é a maneira usual de executar a tarefa proposta que, no caso, é formada pelas seguintes etapas: construção de duas retas perpendiculares, estabelecimento de uma escala em cada eixo, localização de dois pontos A e B no plano cartesiano de coordenadas $(x_1, f(x_1))$ *e* $(x_2, f(x_2))$ respectivamente e, finalmente, a construção da reta que passa pelos pontos A e B.

A tecnologia θ: O gráfico de uma função linear $f(x) = ax$ é uma reta que passa pela origem.

As teorias de suporte são as seguintes:

Θ_1: O conceito de função como correspondência $x \to 2x$.

Θ_2: Uma função f: R→ R pode ser representada graficamente do seguinte modo: considera-se num plano α um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais XOY e o conjunto G de todos os pontos de coordenadas $(x, f(x))$, com $x \in$ R. O conjunto G é denominado gráfico da função f relativo ao sistema de coordenadas XOY.

Θ_3: A demonstração sobre a condição de alinhamento dos três pontos (0,0), $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$.

Além disso, pode-se acrescentar a teoria
Θ_4: A função $f(x) = 2x$ é uma função contínua.

BOSCH e CHEVALLARD (1999) enfatizam que:

- toda prática institucional pode ser analisada sob diferentes pontos de vista e de diferentes maneiras num sistema de tarefas relativamente bem circunscritas, que se desenvolvem no fluxo da prática;
- a realização de toda tarefa resulta colocar em ação uma técnica;
- as condições e exigências que permitem a produção e a utilização de tarefas e técnicas nas instituições implicam na existência de um discurso descritivo e justificativo das tarefas e técnicas que se chama *tecnologia* da técnica. Toda tecnologia, por sua vez, precisa de uma justificativa, que se denomina *teoria* da técnica.

O bloco [tarefa/técnica] é considerado o *saber-fazer*, ao passo que o bloco [tecnologia/teoria] é considerado o *saber.* No exemplo apresentado, *saber* construir o gráfico da função linear é conhecer a praxeologia descrita.

Um conjunto de técnicas, de tecnologias e de teorias organizadas em torno de um tipo de tarefa forma uma organização praxeológica pontual. O amálgama de diversas praxeologias pontuais cria uma praxeologia local, ou regional ou global, caso os elementos do amálgama sejam, respectivamente, a tecnologia, a teoria ou a posição institucional considerada. Por exemplo, pode-se falar de: uma organização praxeológica pontual em torno da resolução de um determinado tipo de problema sobre proporcionalidade; de uma organização local em torno da resolução de diferentes tipos de problemas de proporcionalidade (isto é, o tema proporcionalidade); de uma organização regional em torno, por exemplo, da noção de função linear.

Objetos ostensivos e não-ostensivos

A abordagem antropológica modela o saber matemático em termos de objetos e de inter-relações entre eles e as investigações sobre a questão da natureza dos objetos matemáticos conduziu os pesquisadores ao estabelecimento de uma dicotomia fundamental ao distinguir dois tipos de objetos: os *objetos ostensivos* e os *objetos não-ostensivos*.

Os *objetos ostensivos* – do latim *ostender*e, que significa mostrar, apresentar com insistência – são todos os objetos que têm uma certa materialidade e que, por isso, adquirem para uma pessoa uma realidade perceptível: as palavras, os grafismos e os gestos.

Os objetos *não-ostensivos* são todos os “objetos” como as idéias, as intuições e os conceitos, que existem institucionalmente, mas que não podem ser vistos, percebidos ou mostrados por si mesmos. Eles só podem ser invocados ou evocados por uma manipulação adequada de determinados objetos ostensivos associados (uma palavra, uma frase, um grafismo, um gesto ou todo um discurso). Por exemplo, o conceito de “função” é um objeto não-ostensivo que é identificado e ativado, por exemplo, por meio da escrita “f(x)”, ou da palavra (escrita ou falada) “função”, ou por um gráfico, que são objetos ostensivos.

Os autores BOSCH e CHEVALLARD (1999) salientam que:

- os dois tipos de objetos (ostensivos e não-ostensivos) são sempre institucionais; a existência deles não depende da atividade de uma única pessoa;
- os dois tipos de objetos (ostensivos e não-ostensivos) são unidos por uma dialética que considera os “não-ostensivos” como emergentes da manipulação dos “ostensivos” e, ao mesmo tempo, como meios de controle dessa manipulação;

- os objetos ostensivos são manipuláveis pelo ser humano, ao passo que os não-ostensivos não são manipuláveis;
- a presença simultânea de diferentes registros ostensivos é um invariante da prática matemática.

COMIN (2000, p.146), analisando o quadro algébrico da linearidade, considera que os objetos ostensivos mais utilizados são as letras, os símbolos de operação, os parêntesis e as flechas. Além destes, o autor considera também as escritas de números com símbolos ou letras, as fórmulas e as equações do primeiro grau. Nas explicações das fórmulas aparecem as palavras ou expressões, tais como: variável, linear, função, operador, coeficiente, coeficiente de proporcionalidade.

Analisando um exercício em que se pede a determinação da lei de formação a partir de uma tabela de proporcionalidade de duas grandezas físicas, o autor (*ibid,* p.139) afirma que "y = f (x)" é um ostensivo moderno do conceito de função. Ele exprime uma relação de dependência com a idéia de causa e efeito que se interpreta em termos de correspondência. As variáveis x e y podem designar as grandezas e, ao mesmo tempo, suas medidas ou números. O ostensivo "y = ax" é um resumo[1] de uma tabela de proporcionalidade. Além disso, ele é uma explicação da dependência entre as grandezas x e y graças à relação entre suas medidas denotadas por x e y. Este ostensivo também permite a justificação das propriedades da linearidade utilizando a propriedade distributiva e a escrita de um algoritmo, que possibilita obter um valor de y conhecendo aquele de x e reciprocamente.

Pode-se observar que uma troca de ostensivos, de "y = f (x)" para "y = ax", ou vice-versa, acarreta mudanças nas explicações, ou seja, nas tecnologias e nas teorias. Em cada situação, um deles será mais forte que o outro para a resolução da tarefa.

Segundo BOSCH e CHEVALLARD (1999), acionar uma técnica significa manipular ostensivos, dirigidos pelos não-ostensivos e que todo discurso tecnológico ou teórico se efetua concretamente pela manipulação dos ostensivos, em particular, utilizando os

---

[1] Este resumo é denominado por CHEVALLARD (1999) de redução ostensiva.

discursivos e escritos, que permitem materializar as explicações e justificativas necessárias ao desenvolvimento das tarefas.

Retomando o exemplo - construir o gráfico da função $f(x) = 2x$, tem-se no enunciado os ostensivos: as letras, o número, o sinal de igual e os parêntesis, compondo um registro algébrico. Na resolução da tarefa, obter-se-á um registro gráfico. Durante a resolução deste exercício será necessário fazer um pequeno discurso oral, escrever uma tabela, fazer gestos para a escrita e para a confecção do gráfico. Como se pode observar, ativa-se, simultaneamente, uma técnica e manipulam-se os ostensivos.

Para BOSCH e CHEVALLARD (1999), a função semiótica dos ostensivos, isto é, sua capacidade de produzir um sentido, não pode ser separada de sua função instrumental, isto é, sua capacidade de se integrar nas manipulações técnicas, tecnológicas e teóricas. Além disso, o trabalho com os ostensivos deve ser, por sua vez, eficaz, legível e inteligível, o que contribui a dar aos ostensivos sua força instrumental e semiótica.

DIFICULDADES NO ENSINO E APRENDIZAGEM DE FUNÇÃO

Diversos pesquisadores têm elaborado estudos no sentido de mapear as dificuldades enfrentadas pelos professores e pelos alunos no processo de ensino e aprendizagem do conceito de função, como SCHWARZ (1995), PELHO (2003) e COMIN (2000).

O trabalho de SCHWARZ (1995) teve o objetivo de verificar a concepção de função de alunos ao final do 2º grau. Para isso, o autor aplicou, em 1994, testes em 40 alunos da 3ª série do 2º grau de uma escola pública da cidade de São Paulo. Fundamentando-se em SFARD[2], o autor concluiu que (*ibid* , p.124):

> "*A maior parte dos alunos por nós pesquisados, está adentrando no primeiro nível, justificando as observações da análise a posteriori, de*

---

[2] Segundo SFARD (1992), a longa história do conceito de função mostra a precedência do conceito operacional sobre o estrutural. A autora identifica um padrão que pode ser identificado na sucessiva transição da concepção operacional para a estrutural: interiorização, condensação e reificação (*reification*). A reificação do conceito de função é a passagem do processo para a concepção do que se considera objeto matemático e é um salto qualitativo.

> *que em alguns ainda persiste uma concepção* ***operacional elementar*** *de função (nível anterior ao da interiorização), outros estão francamente na 1ª fase da concepção de função*". (Grifo de SCHWARZ).

No estudo de PELHO (2003), foi aplicada uma seqüência didática, utilizando o software Cabri-Géomètre II, com o objetivo de favorecer a compreensão das variáveis da função. A autora fundamentou suas considerações na teoria desenvolvida por DUVAL[3] sobre Registros de Representação Semiótica. As funções estudadas foram lineares, afins e quadráticas. Os sujeitos da pesquisa foram 30 alunos de uma classe do segundo ano do ensino médio de uma escola particular da cidade de Araçatuba, interior de São Paulo, onde a autora constatou que, apesar de eles terem estudado funções no primeiro ano, ainda não compreendiam o assunto.Ao final da análise dos resultados, a autora (*ibid*, p. 118) afirma:

> "*Concluímos que o software Cabri-Géomètre II é uma ferramenta eficaz para introduzir o estudo de funções, pois possibilita a compreensão das variáveis e do relacionamento entre elas, bem como a conversão entre diferentes registros de representação de função*".

As funções tiveram sua origem no estudo das grandezas, com a idéia de que a variação de uma grandeza é dependente da variação de outra grandeza e que uma relação de proporcionalidade entre grandezas é modelada por uma função linear. Estes princípios estão presentes na tese defendida por COMIN (2000), que fez um profundo estudo dos conceitos de proporcionalidade e de função linear. Sua fundamentação teórica é a abordagem antropológica. A análise dos questionários aplicados a professores e alunos

---

[3] DUVAL (PME-2000) afirma que o conhecimento matemático tem um caráter paradoxal, pois o único caminho para alcançar o objeto matemático é usar signos, palavras, símbolos, expressões ou desenhos. Entretanto, os objetos matemáticos não podem ser confundidos com sua representação simbólica. Alguns sistemas semióticos possibilitam transformações específicas e intrínsecas de representações, as quais, DUVAL (2000) chama de "tratamento" e o sistema semiótico que a torna possível, de "registros de representação". Para cada representação de um objeto em um sistema, pode ser produzida uma outra representação deste objeto em um outro sistema. O autor denomina este tipo de transformação de "conversão". Assim, são exemplos de conversões, a construção um gráfico a partir de uma função dada por uma lei de formação, escrever a lei de formação de uma função a partir de um gráfico, traduzir uma expressão verbal em uma expressão literal ou em uma equação.

mostrou uma série de dificuldades no tratamento da proporcionalidade e na utilização de funções lineares. Ao fazer uma analise dos programas franceses, ele verificou o vazio deixado pela retirada do ensino de grandezas, de relações e de proporções e a substituição desses conceitos pelo ensino das representações “algébricas” de função linear que, nestas condições, não pode aparecer como uma abstração dos conhecimentos de proporcionalidade.

O autor criou uma seqüência didática, que foi aplicada em alunos do ensino fundamental. Trabalhando com grandezas, os alunos foram conduzidos a manipular medidas e relações, dando sentido às construções matemáticas elementares, o que permitiu uma primeira abordagem da idéia de função linear.

REFLEXÃO PARA OS PROFESSORES

A abordagem antropológica na Didática da Matemática, tratada por BOSCH e CHEVALLARD (1999) é uma proposta alternativa para facilitar o ensino e a aprendizagem de importantes conceitos matemáticos, como as funções, na medida em que estabelece uma análise integrada das manipulações técnicas, tecnológicas e teóricas.

A título de ilustração, um professor encontra-se diante da elaboração de um exercício sobre um corpo que se move com velocidade constante v,ou seja, a distância percorrida d é função linear do tempo: $t \rightarrow vt = d$.

O enunciado do exercício: “Para um determinado automóvel em movimento, com velocidade constante, sabe-se que a distância percorrida em 1 hora e meia é de 78 km; que a distância percorrida em duas horas e meia é de 130 km”.

Se for pedida a tarefa t_1: determinar a distância percorrida em 4 horas e a distância percorrida em 5 horas, ela poderá ser executada com uma das seguintes técnicas:

τ_1: A velocidade será obtida utilizando $v = \frac{d}{t}$. O resultado será v = 52 km/h. A seguir, completar-se-á a tabela abaixo:

t (horas)	4	5
d = vt (km)	208	260

A tecnologia se baseia no modelo linear de uma situação concreta de movimento retilíneo com velocidade constante. Além disso, necessita das noções de grandeza e de unidade.

τ'_1: A utilização da a propriedade distributiva: v(t + t') = vt + vt' e da propriedade associativa e comutativa dos números reais, obtendo v(kt) = k(vt).
A tecnologia se apóia sobre a estrutura algébrica dos números reais.

Uma outra técnica que poderia ser utilizada τ''_1: A construção do gráfico da distância em função do tempo e a posterior leitura. Aqui podem aparecer dificuldades na criação de unidades.
Por outro lado, pode ser pedida a tarefa t_2: Sem calcular a velocidade, determinar a distância percorrida em 4 horas e a distância percorrida em 5 horas.

A seguir, há uma descrição da técnica, que se apóia na utilização das propriedades da função linear: $f(x + x') = f(x) + f(x')$ e $f(kx) = kf(x)$.

τ_2 : Completar a última coluna das duas tabelas.

t	1,5	2,5	1,5 + 2,5 = 4
d = f(t)	78	130	78+130=208

t	2,5	2,5 × 2 = 5
d = f(t)	130	130 × 2 = 260

A mesma técnica, utilizando as escritas, é representada da seguinte maneira:

$$f(1{,}5 + 2{,}5) = f(1{,}5) + f(2{,}5) \text{ e}$$

$$f(2{,}5\times 2) = 2f(2{,}5).$$

A tecnologia se apóia sobre a seguinte definição: Uma função f: R→R é linear se estiverem satisfeitas as condições: a) $f(x + x') = f(x) + f(x')$

b) $f(\text{kx}) = \text{k}f(\text{x})$,

para quaisquer valores de x e x' em R e para todo k real.

Também poderia ser utilizada a técnica da representação gráfica, mas neste caso há uma limitação, pois as propriedades não são "visíveis".

Conclui-se que uma simples alteração de uma tarefa pode trazer muitas alterações nas técnicas e tecnologias, bem como nos ostensivos utilizados. O professor deve analisar previamente, quais são os elementos da praxeologia que são conhecidos pelos alunos, a fim de não ser surpreendido por erros na execução da tarefa.

No caso da tarefa t_2, as propriedades das funções lineares não são usualmente utilizadas no ensino médio; essas propriedades são apresentadas no 3º grau, na disciplina Álgebra Linear, no capítulo dedicado às transformações lineares, sem vínculos com uma situação concreta, como a apresentada no exercício. Estas considerações levantam a questão de saber se é possível, dentro da realidade matemática de uma classe do ensino médio, propor esta tarefa, com a compreensão da tecnologia que a acompanha.

As considerações expostas devem motivar o professor, ao introduzir o conceito de função linear, a preocupar-se com as seguintes questões:

- Quais tipos de tarefas devem ser propostas?
- Qual é o ostensivo mais indicado para a tarefa: y = ax ou f(x) = ax ?
- Quais técnicas são disponíveis para a execução desses tipos de tarefas?
- Qual é o alcance dessas técnicas?
- O que se pode fazer para melhorar essas técnicas?
- Quais tecnologias, induzidas por quais teorias, justificam e explicam estas técnicas e esses tipos de tarefas?
- Em que medida elas são conhecidas? O que se pode fazer para melhorar esses conhecimentos?

Estes questionamentos levariam os professores a refletirem sobre suas próprias práticas, ao trazerem à luz uma organização praxeológica.

CONCLUSÃO

A vantagem proporcionada pelo uso da abordagem antropológica no estudo de funções lineares consiste na sistematização obrigatória dos blocos "saber-fazer" e "saber". Com isso, o professor pode estabelecer uma série de relações estáveis, pelo menos numa determinada instituição, por um determinado período de tempo, dinamizando o aprendizado desse importante conceito.

A inserção do enfoque antropológico no *curriculum* dos cursos de formação de professores de Matemática, tanto nos programas iniciais quanto nos de educação continuada, significaria um avanço na formação desses profissionais, ampliando o rol de suas competências.

PALAVRAS-CHAVE: praxeologia, ostensivo, função linear

BIBLIOGRAFIA

BOSCH, Marianna & CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l' activité matemátique aux ostensifs. Objet d' etude et problematique. **Recherches en Didactique des mathématques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, v.19. n. 1, p. 77-124, 1999.

CHEVALLARD, Yves. L' analise des pratiques enseignantes en théorie antropologique du didactique. **Recherches en Didactique des mathématques**. Grenoble: La Pensée Sauvage-Editions, v.19.2, p.221-265, 1999.

CHEVALLARD, Yves.Organizer l' Etude. Strutures & Fonctions. In: 11[A] ECOLE D' ÉTÊ DE DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES. 2001. Curso... Grenoble, 2001.CD-ROM.

COMIN, Eugéne. **Proportionnalité et fonction linéaire. Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire**. 2000. Tese (Doutorado), Universite Bordeaux 1, Bordeaux, 2000.

DUVAL, Raymond. Basic Issues for Research in Mathematics Education. In: TWENTY-FOURTH ANNUAL MEETING OF PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION (PME 24), 2000, Hiroshima, Jp. **Trabalho apresentado ...** Hiroshima, JP, 2000. v-1, p.55-69.

PELHO, Edlweiss Benez Brandão. **Introdução ao conceito de função: A importância da Compreensão das variáveis**. 2003. Dissertação (Mestrado)- Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 2003.

SCHWARZ, Osmar. **Sobre as concepções de função dos alunos ao término do 2º grau**. 1995. Dissertação (Mestrado)- Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, PUC-SP, São Paulo, 1995.

SFARD, Anna. Operational origins of Mathematical objects and the quandary of reification – the case of function. In: **The Concept of Function**. **Aspects of Epistemology and Pedagogy**. Mathematical Association of America, MAA Notes and Reports Series Volume 25, 1992, p.59-84.