Realização SBEM 15 anos SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS POR DOBRADURAS ORIGAMI

Francisco Roberto Pinto Mattos
UERJ - CPII – COPPE/UFRJ
frpm@labma.ufrj.br
Leo Akio Yokoyama
CPII – COPPE/UFRJ
leoakyo@yahoo.com.br

Introdução

O estudo do método Origami tem apresentado um maior interesse por parte de matemáticos que vêem a possibilidade de, através deste, estabelecerem alternativas possíveis que incorporem o uso da dobradura de papel ao ensino de conteúdos matemáticos. Procuramos estabelecer resultados interessantes através do uso da geometria das dobraduras de papel para soluções de problemas de construções geométricas, realizadas por métodos Origami[1].

Dentre esses problemas, podemos citar as soluções gerais de equações cúbicas, a procura por soluções para trissectar ângulos quaisquer, a procura por soluções que possibilitem a duplicação de um cubo. Os pontos construídos neste ambiente serão definidos como pertencentes ao plano complexo que, por sua vez, irão conter os chamados números Origami. Desta forma, verificaremos que a aplicação do método Origami poderá tornar possível apresentar, por meio de dobraduras, resoluções de problemas e conceitos teóricos de distintas áreas da matemática, contemplando desde a geometria à álgebra abstrata.

Estabeleceremos, a princípio, um conjunto de seis axiomas a partir dos quais obtemos o corpo das interseções de cônicas, a extensão do corpo dos racionais acrescidos das raízes quadradas arbitrárias, raízes cúbicas e seus conjugados. Tudo isso

[1] Utilizaremos a formulação axiomática feita pelo matemático ítalo-japonês Humiaki Huzita, que a apresentou na Primeira Conferência Internacional sobre Origami na Educação e Terapias (COET91) [HH], sendo hoje o mais completo conjunto de axiomas que realizam as construções por dobraduras.

está intimamente ligado ao conjunto dos possíveis pontos construtíveis do plano, ou seja, aqueles que são acessíveis através dos instrumentos utilizados para construção.

Será de grande importância a conexão entre a dobradura Origami e as construções Euclideanas com régua e compasso, e sua extensão com régua marcada e compasso.

Problemas Clássicos: Origem e Aspectos Históricos

A duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo qualquer são dois problemas considerados clássicos da matemática grega que, juntamente com a quadratura do círculo, tiveram extrema importância para o desenvolvimento da geometria.

Duplicação do cubo

Existem duas versões sobre a origem desse problema. A primeira, quem nos apresenta é *Theon de Smyrna*, citando um trabalho feito por *Eratosthenes*:

> *``Eratosthenes, em seu trabalho intitulado Platonicus, relata que, quando o deus disse para os Delianos através de um oráculo que, para livrar-se de uma praga, eles deveriam construir um altar igual ao dobro daquele existente, os artesãos ficaram altamente perplexos com suas tentativas para descobrir como um sólido poderia ser o dobro de um sólido similar; eles então foram perguntar a Platão sobre a solução, e ele respondeu que o oráculo queria dizer que o deus não desejava um altar com o dobro da medida, mas que ele gostaria de, estabelecendo esta tarefa, envergonhar os Gregos por não darem a devida atenção à matemática e pelo seu desprezo por geometria." [Crhist]*

A praga relatada realmente foi um acontecimento relevante na história de Athenas e cerca de um quarto da população morreu por causa dela. [Crhist] Este fato aconteceu por volta de 430 A.C. Então, se confiarmos na veracidade deste relato, podemos considerar esta data, com razoável precisão, para o aparecimento do problema de duplicação do cubo. Isto é também consistente com uma das primeiras contribuições feitas para a solução do problema por *Hippocrates*.

Hippocrates mostrou que um cubo pode ser dobrado se duas médias proporcionais podem ser determinadas entre um número e seu dobro. Isto teve uma grande influência sobre as tentativas para duplicar o cubo e todos os esforços posteriores foram direcionados para os problemas de médias proporcionais.

O primeiro grande passo no problema de duplicação do cubo foi dado, como já mencionado, por *Hippocrates*, não muito depois do problema ter surgido. Ele reduziu o problema de encontrar um cubo cuja razão em relação a um cubo dado era o dobro ao seguinte problema: sendo dados dois segmentos, encontrar duas médias proporcionais entre eles. O moderno entendimento de razão nos faz concluir que ambas as formulações são equivalentes, isto é, dados a,b, encontrar x,y, tais que:

$$a/x = x/y = y/b,$$

$$a^3/x^3 = (a/x)^3 = (a/x)(x/y)(y/b) = a/b.$$

Embora muitos diferentes métodos tenham sido inventados para resolver o problema da duplicação de um cubo, e grandes descobertas e avanços tenham ocorrido por conta desta procura, na verdade a grande busca feita pelos antigos gregos era por uma solução utilizando apenas uma construção por régua e compasso. Hoje sabemos que essa solução nunca foi encontrada pois é realmente impossível de ser realizada [FM]. Por outro lado os antigos gregos não possuiam instrumentais matemáticos suficientemente desenvolvidos que lhes proporcionassem a prova da impossibilidade da construção somente por régua e compasso.

A prova da impossibilidade da construção por régua não marcada e compasso esperou pelos matemáticos até o século XIX. O argumento final foi colocado por *Pierre Wantzel* [FM], em 1837, quando publicou sua prova para um dos mais famosos problemas de todos os tempos no *Liouville's Journal*.

Trissectando um ângulo

Existem inúmeros motivos por que o problema de trissectar um ângulo qualquer difere dos outros dois problemas clássicos Gregos. Primeiramente, ele não possui nenhuma história acerca de seu aparecimento ou de como foi primeiramente estudado. Outro aspecto fundamental é o fato de existirem certos ângulos que podem ser trissectados por régua não marcada e compasso, enquanto os outros dois problemas clássicos não permitem nenhum exemplo de cubo duplicável ou círculo que possua quadratura conhecida através de uma construção que utiliza somente régua não marcada e compasso.

Pappus, em sua *Mathematical Collection*, escreve:

> “Podemos dizer que existem três tipos de problemas em geometria: os problemas `planos', os `sólidos' e os `lineares'. Aqueles que podem ser resolvidos por linha reta e círculos são chamados problemas `planos'(...). Aqueles problemas que são resolvidos por uso de uma ou mais seções do cone são chamados problemas `sólidos'. Para estes é necessário uma construção para usarmos as superfícies das figuras sólidas, isto é, cones. Existe ainda um terceiro tipo, que são os chamados problemas lineares. Para estes casos, as construções são de outras curvas diferentes das já mencionadas, curvas tendo uma origem mais variada e surgindo das supefícies mais irregulares e de movimentos complexos. (...). Como os problemas diferem deste modo, os primeiros geômetras não o sabiam resolver o problema sobre ângulo supra citado, pois este era por natureza sólido; por eles não terem ainda familiaridade com com as seções do cone, eles não sabiam como fazer. Mais tarde, no entanto, eles trissectaram o ângulo por meio das cônicas (...) " [Crhist]

Os antigos Gregos poderiam ter desejado dividir um ângulo numa razão qualquer, pois assim seria possível a construção de polígonos regulares com qualquer número de lados. A construção de polígonos regulares com régua e compasso foi certamente um dos maiores objetivos dos matemáticos Gregos e nenhum outro polígono foi descoberto até a descoberta de *Gauss* de que um polígono de 17 lados poderia ser construído por régua e compasso.

Embora seja difícil dar uma data precisão de quando o problema da trissecção de um ângulo tenha aparecido primeiro, sabemos que *Hipócrates* estudou o problema, o que nos remete ao período entre 470A.C. e 410A.C., que foi o período de vida de *Hipócrate*s.

Como já mencionamos, foi *Pierre Wantzel* quem, em 1837, publicou a prova da impossibilidade da trissecção de um ângulo por régua não marcada e compasso, no *Liouville's Journal*.

Construções por Dobraduras: Axiomas e Procedimentos

Definição: Um número α é dito construtível se, através de procedimentos baseados em uma geometria, podemos construir um segmento de reta de comprimento α. Se temos as construções Euclideanas tradicionais, α será construtível apenas se o segmento pode ser obtido com uso de régua e compasso. Se temos a geometria Origami, α será construtível apenas se o segmento pode ser obtido com uso de dobraduras no papel.

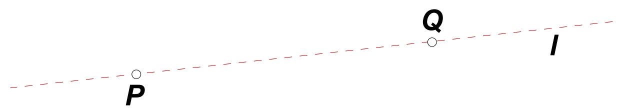
Os procedimentos referentes às construões Origami utilizando as dobraduras no papel tornam-se possíveis devido a um conjunto de axiomas, estruturados de modo a possibilitar as construções por dobraduras. Partimos de um conjunto menor de axiomas, e, ao adicionarmos cada novo axioma a um colocado anteriormente, isto implicará em novas construções geométricas que estarão relacionadas com o corpo algébrico envolvido, possibilitando assim estender o corpo anterior. Essas construções serão realizadas a partir do novo conjunto de números construtíveis [RA] formado pelo conjunto estendido.

Os axiomas estarão colocados obedecendo a uma sequência que começa com o corpo que definiremos como o dos números *Thalianos*, prosseguindo com os corpos dos números Pitagóricos, Euclideanos, até construirmos o corpo dos números Origami, obtidos nesta sequência por adição dos referidos axiomas. Assim, cada conjunto de números é obtido através dos axiomas que são acrescidos ao conjunto de axiomas já existentes. Procuramos, assim, descrever a relação existente entre a teoria algébrica que envolve a extensão de corpos e a geometria elementar.

Axiomas de Huzita para Construções por Dobraduras

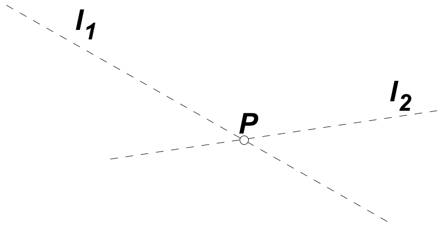
O conjunto de axiomas que segue permite-nos realizar as construções por dobraduras:

Axioma 1 : A reta *l* unindo dois pontos construtíveis por dobradura, **P** e **Q**, é uma reta construtível.



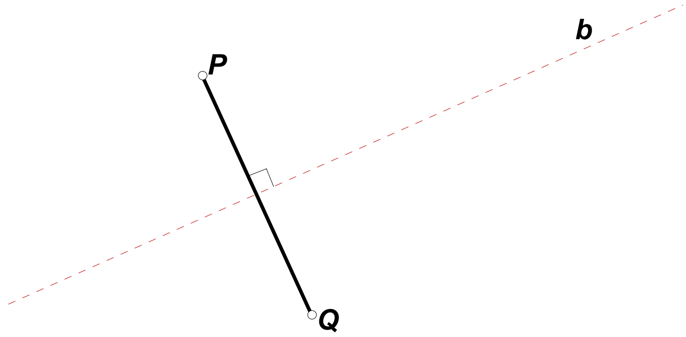
Axioma 1

Axioma 2 : O ponto **P** de interseção entre duas retas construtíveis l_1 e l_2 é um ponto construtível.



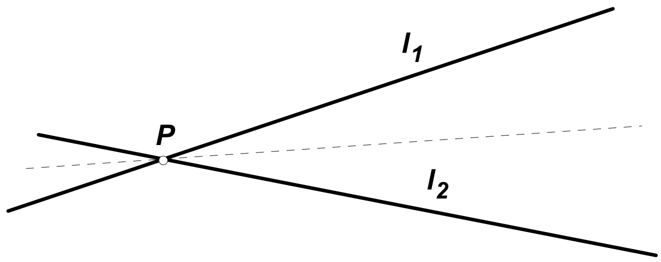
Axioma 2

Axioma 3: O bissetor perpendicular **b** do segmento que une dois pontos construtíveis, **P** e **Q**, é uma reta construtível (mediatriz).



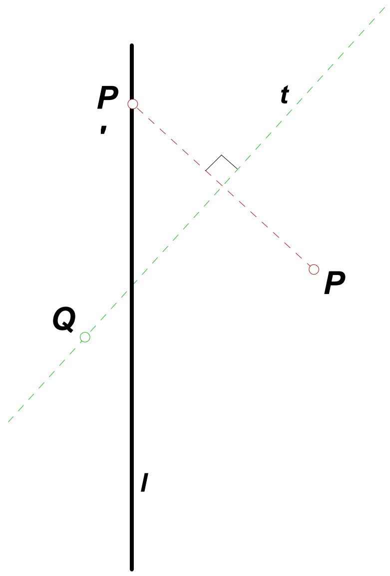
Axioma 3

Axioma 4: A reta bissetriz de qualquer ângulo construtível dado pode ser construída.



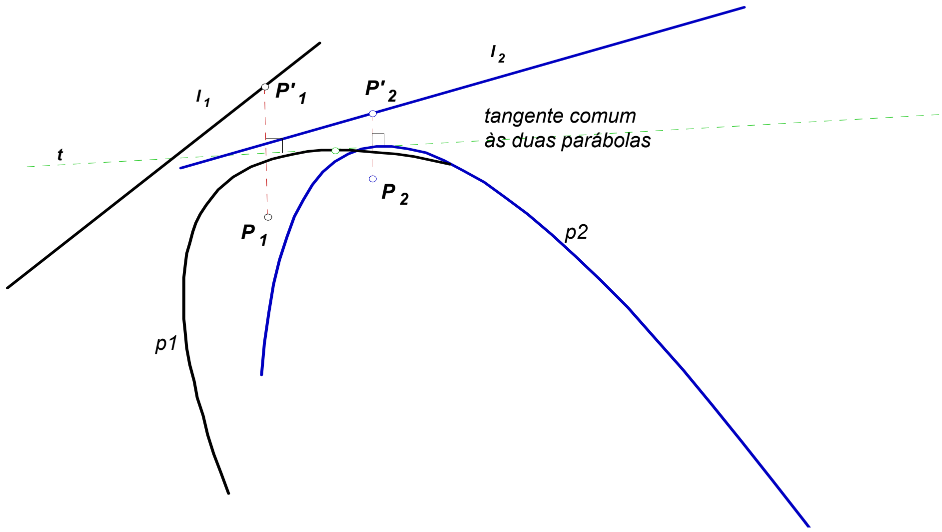
Axioma 4

Axioma 5: Dada uma reta construída *l*, e os pontos construídos **P** e **Q**, a reta que passa através de **Q**, refletindo **P** sobre *l*, se existir, poderá ser construída.



Axioma 5

Axioma 6: Dadas as retas construídas l_1 e l_2 , e os pontos construídos P_1 e P_2 , então a reta *t*, que reflete simultaneamente P_1 sobre l_1 e P_2 sobre l_2, se existir, poderá ser construída.



Axioma 6

Construções Geométricas e Corpos

Os axiomas (**1**), (**2**) e (**3**) são aqueles que determinam o que chamamos de construções *Thalianas*, não sendo muito fortes no conjunto total de axiomas, pois realizam somente construções de perpendiculares a segmentos conhecidos, formando mediatrizes, além da construção de retas e pontos. Este conjunto de três axiomas determina uma estrutura do corpo que denominamos *Números Thalianos*[2].

Com a introdução do axioma (**4**), que permite a bissecção de ângulos, completando num certo sentido o que poderíamos chamar de primeiro nível de axiomas, teremos construído os números Pitagóricos. Estaremos observando a relação existente entre esse conjunto de números com os números algébricos totalmente reais, em que fica estabelecida uma relação com as construções que utilizam a régua e escala unitária.

O axioma (**5**) já permite que promovamos uma ampliação em nossas construções, tornando possíveis as construções E*uclideanas*, sem para isso fazer uso do compasso mas utilizando a construção da envoltória de tangentes à parábola.

O axioma (**6**) permite as construções de raízes cúbicas, resolvendo o problema da duplicação do cubo, da mesma forma que os gregos o fizeram, usando para tal a interseção de parábolas. Ele ainda admite a construção de tangentes a duas parábolas como uma construção nova. Sua inclusão é forte o suficiente para permitir as soluções de equações de terceiro ou quarto grau, utilizando a idéia de interseção de cônicas.

Com o conjunto dos seis axiomas, (**1**) a (**6**), formamos precisamente o corpo dos números *Origami*, obtido por interseção de cônicas e da extensão dos racionais por acréscimos de raízes quadradas arbitrárias, e também raízes cúbicas e conjugadas, utilizando para tal os conceitos teóricos da geometria algébrica elementar, a teoria do feixe de cônicas e formas quadráticas.

Construções Cônicas e Números Origami

Tangentes simultâneas

A construção descrita no axioma (**6**), realiza uma dobra no papel que determina a reta que é tangente simultaneamente às duas parábolas, das quais conhecemos focos e diretrizes. Esse processo pode não ser sempre perfeitamente realizável por procedimentos práticos, bastando para tal que a reta procurada não exista

[2] Como definido em [FM], cap. 4, pág. 84.

necessariamente, ou seja, não esteja presente fisicamente no plano Origami. Este seria o caso de retas no infinito, que não podemos representar por dobraduras. [CR]

Como exemplo, vamos estudar a solução real para as seguintes cônicas (parábolas):

$$\left(y-\frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx, \quad y=\frac{1}{2}x^2.$$

Essas cônicas possuem focos e diretrizes que podem ser construídos usando operações envolvendo *a* e *b*. Uma tangente simultânea às duas parábolas é uma reta com inclinação *m* tangenciando essas curvas nos pontos (x_0 ,y_0) e (x_1,y_1), respectivamente. É importante observar que uma reta é construtível, se e somente se, sua inclinação é ou um número do corpo, ou ∞. Aplicando-o às equações dadas, podemos escrever:

$$(x_0, y_0) \in \left(y-\frac{1}{2}a\right)^2 = 2bx,$$
$$(x_1, y_1) \in y=\frac{1}{2}x^2.$$

Diferenciando implicitamente cada equação, para determinarmos a inclinação da tangente, e escrevendo as coordenadas dos pontos em função de *m*, *b*, *a*, podemos definir a inclinação *m* como solução da seguinte equação:

$$m^4 + mb + am^2 = 0 \Rightarrow m(m^3 + b + am) = 0$$
$$\Rightarrow m = 0 \ ou \ m^3 + b + am = 0$$

O problema de duplicação de um cubo foi resolvido por *Menaechmus* utilizando esse argumento, apesar de não ter conhecimento das técnicas de geometria analítica como as conhecemos hoje. Isso pode ser feito de modo simples, se utilizarmos as parábolas descritas acima, resolvendo a equação: $m^3 – 2 = 0$.

Esse procedimento nos permite mostrar que podemos também trissectar ângulos construídos, através da resolução de uma equação cúbica através de uma satisfatória substituição de variáveis, resolvendo equações como a que segue, conhecida como equação de *Chebyshev*[3].

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$$
$$para \ x=\cos\theta \Rightarrow 4x^3 - 3x = \cos 3\theta.$$

As raízes de equações complexas cúbicas, com coeficientes construtíveis, podem ser construídas. Isto pode ser visto pelas soluções explicitadas, a partir das fórrmulas de

[3] Como escrito por Roger C. Alperin em [RA], pag.129.

Cardano, para equações cúbicas que envolvem somente raízes quadradas e cúbicas [IH]. Em relação às resoluções de equações cúbicas $x^3+mx=n$, sabe-se que foi *del Ferro* quem primeiro as resolveu algebricamente, e *Tartaglia* quem adquiriu fama em disputas matemáticas comuns à época, resolvendo raízes cúbicas. *Tartaglia* teria mantido em segredo um método por ele descoberto, apesar de insistentes tentativas de *Cardano* para publicá-lo.

Desde que podemos bissectar e trissectar ângulos construídos, e tomar raízes quadradas e cúbicas reais, com a adição do axioma (**6**), as raízes cúbicas de um número complexo com coeficientes no conjunto dos números Origami, O.

Pontos cônicos[4] construtíveis

Definição: Os pontos cônicos construtíveis são aqueles pertencentes ao conjunto dos números complexos, e que são obtidos das interseções de retas ou cônicas com coeficientes no subcorpo dos números complexos origami reais O_P, cujos pontos podem ser construídos pelo uso dos axiomas (**1**) a (**6**).

Esta definição é equivalente à utilizada por *Videla* [CV], onde ele utiliza construtibilidade de diretrizes, excentricidade, focos, raios, etc., como condições de construtibilidade, a partir de uma caracterização algébrica para o conjunto dos pontos cônicos construtíveis.

Números Origami Harmônicos

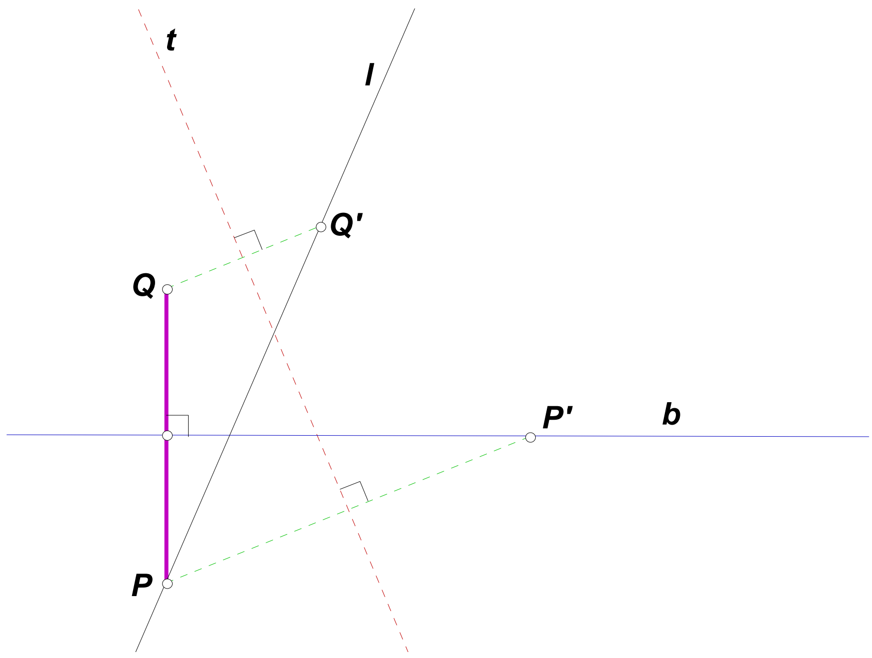
Considerado como um caso especial do axioma (**6**), introduzimos o axioma (**T**):

Axioma (T): *Dados os pontos construídos* **P** e **Q**, *e uma reta construída l que contenha* **P**, *então podemos simultaneamente dobrar* **Q** *sobre l e* **P** *sobre o bissetor* **b** *perpendicular de* **PQ**.

Este axioma forma o chamado corpo dos números harmônicos construtíveis. O procedimento que permite sua construção pode ser visto na figura abaixo. Este corpo é o menor corpo fechado para operações sobre $\sqrt{a^2+b^2}$, para a e b pertencentes ao corpo, e também fechado para a adição de qualquer número real que satisfaça a uma equação cúbica irredutível com três raízes reais e cujos coeficientes sejam números harmônicos reais. Por este axioma (**T**), é possível realizar a trissecção de ângulos quaisquer. Um inteiro harmônico é da forma 2^a3^b, nome atribuído por *Phillip de Vitry*, um teórico musical do século XIV, estudando relações para música [RA1].

---

[4] Obtidos por meio de construções envolvendo cônicas [CV].



Axioma T

Geometria do Origami

Uma vez definido o plano Origami, nele estaremos realizando as construções a partir de números Origami.

A partir de uma folha de papel, podemos realizar dobras sobre o plano determinado por ela. As dobras formam vincos que representarão as retas no plano Origami. A interseção de vincos distintos sobre o papel determinarão os pontos deste plano. Através da combinação destes procedimentos simples, estabeleceremos todos os passos para as construções realizadas no Origami. Estes procedimentos formarão a base de todas as construções Origami. No plano Origami, temos a construção de retas como os elementos fundamentais, estando esta para o plano Origami como o ponto está para as construções no plano Euclideano. Isso leva em consideração que, para realizar qualquer construção no plano Origami, sempre começaremos por construir um vinco, que irá determinar uma reta. Assim, as retas e a interseção destas, que nos dão os pontos do plano, serão consideradas como os elementos fundamentais de todas as construções realizáveis por dobraduras no papel.

Os procedimentos gemétricos do Origami serão apresentados como o fez *Geretschläger*[5].

---

[5] Robert Geretschläger apresenta no artigo [RG] uma sequência de procedimentos elementares, todos justificados pelo conjunto de axiomas que permitem as construções Origami.

Relacionando os Procedimentos Euclideanos com o Origami

Teorema: Toda construção que pode ser feita por métodos Euclideanos, utilizando somente régua não marcada e compasso, pode também ser efetuada por métodos que utilizam os procedimentos elementares das dobraduras Origami.

Demonstração: A prova para este teorema, pode ser encontrada em [FM],Cap. 6, pag133.

Problemas Clássicos Resolvidos por Dobraduras

Apresentamos uma solução para a trissecção de um ângulo e para a duplicação de um cubo através do método axiomático por dobraduras Origami, adicionando ainda aquele que pode ser considerado o quarto[6] problema da antiguidade: construir um heptágono regular.

Exercício: *Fazer a trissecção de um ângulo qualquer por dobraduras Origami*.

Solução:Este método de trissecção foi realizado por *H. Abe* [PM]. Desenvolveremos essa prova apresentando mais detalhes em [FM] Cap. 7, pags 192-198.

Tomamos inicialmente um pedaço de papel retangular **ABCD**. Sem perda de generalidade, considere o ângulo agudo determinado entre o segmento **AB** e uma reta s que passa pelo vértice inferior do retângulo, como indica a fig. 1. Este ângulo será denominado $\angle$ **RAB**, onde **R** é a interseção de s com a borda superior do retângulo que determina o segmento **DC**.[TH]

(a) Dobre o lado **AB** do papel, de modo a se formarem duas retas paralelas. Podemos dizer que l_1 é a paralela média entre a borda inferior do papel e l_2.

(b) Com as dobras realizadas construímos o ponto $P_2 = l_2 \cap \overline{AD}$. Aplicando o axioma (**6**) ao conjunto de pontos e retas construídas, construímos a dobra t, de modo que P_1 é levado em P'', como indica a fig. 2. Denominaremos por **U** e **V** os pontos construídos pelas interseções de t com os segmentos que definem as bordas.

(c) A reta l_3 produzida é também o prolongamento de l_1 dobrada pela aba formada, como indica a fig. 2. Esta conterá ainda, o ponto **A** após desfazermos a aba formada. Seja **W** = $l_3 \cap$ **DC** construído por dobradura. Teremos assim, por construção, as seguintes relações entre os ângulos:

$$\angle WAB = \frac{2}{3}\angle RAB \Rightarrow \angle RAW = \frac{1}{3}\angle RAB.$$

[6] São considerados como os três problemas da antiguidade: duplicação do cubo, trissecção de um ângulo qualquer e quadratura do círculo.

Esta relação é trivialmente verificavel pelos triângulos congruentes: **AP'$_2$ J'**, **AP'$_1$J'**, **AP'$_1$Q**.

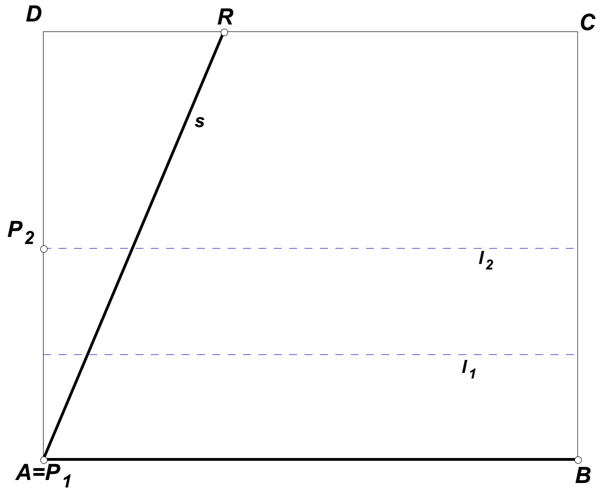


figura 1

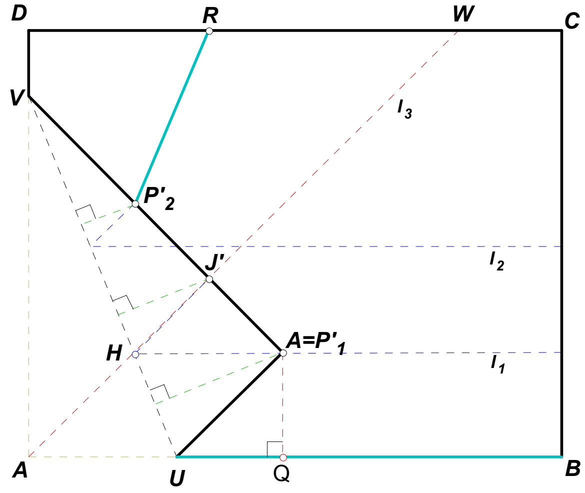


figura 2

Exercício 2: Construir um cubo com volume duplicado.

Solução: Para a solução deste exercício, estaremos construindo $\sqrt[3]{2}$, o que implica em resolver uma equação cúbica. A construção por dobraduras aqui apresentada é baseada na solução apresentada por Rabinowitz[7], e aprofundada em maiores detalhes em [FM]Cap. 7, pags 200-208 .

(a) Partindo de um pedaço de papel com a forma de um quadrado **ABCD**, dobre-o como na fig. 3, de modo a dividi-lo em três faixas iguais, construindo as retas paralelas l_2 e l_3.

(b) Podem ser construídos os pontos $P_1 = \overline{AB} \cap \overline{BC}; P_2 = l_3 \cap \overline{BC}, e\, seja\, l_1 = \overleftrightarrow{AD}$.

(c) Usando o axioma (**6**), vamos realizar uma dobra única, *t*, que leva P_1 em l_1 nos dando P_1', e P_2 em l_2 nos dando P_2' , como mostra a aba dobrada na fig. 4. Chamando [**P$_1$'D**] = x e [**AP$_1$'**] = y, por construção: $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{2}$.

[7] Proposto por *Peter Messer* [PM] em 1985 , o problema 1054, como era conhecido, foi solucionado por *Stanley Rabinowitz*, e publicado em 1986 [SR].

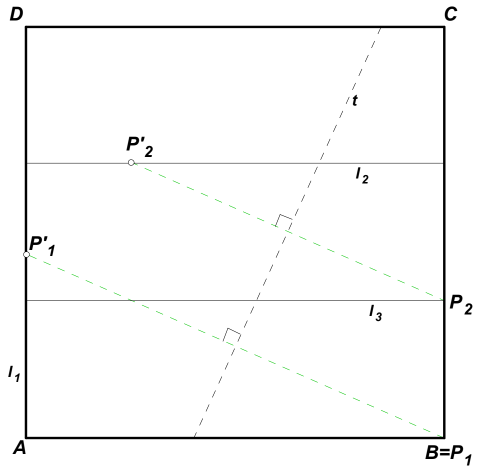


figura 3

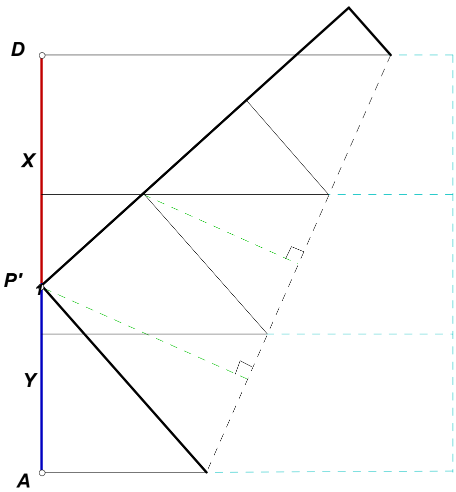


figura 4

Exercício 3: <u>Construir um heptágono regular</u>.

Solução: Este problema é considerado por muitos como o quarto problema da Antiguidade. Como vimos anteriormente, polígonos com 3, 4, 5, 6 lados e todos os seus derivados (por exemplo um octógono pode ser construído facilmente bissectando-se um quadrado) podem ser construídos com relativa facilidade.

Para a construção do heptágono, a divisão do círculo em sete partes iguais vai envolver a solução de uma equação[8] ciclotômica da forma $z^7-1=0$.

A construção realizada abaixo é baseada na solução apresentada por *Gleason* [GA]. Em [FM], Cap. 7, pags 208-223, encontramos uma descrição detalhada do processo de construção de um heptágono regular por dobraduras no papel.

Palavras-chave: dobraduras, construções geométricas, corpos numéricos.

[8] Um polinômio ciclotômico é da forma $\Phi(n)=\Pi(x-\lambda)$, onde este produto é tomado sobre todas as raízes n-ésimas primitivas da unidade. Consideremos o polinômio x^n-1, como um elemento de $\mathbb{C}[x]$ onde $\mathbb{C}$ é o corpo dos números complexos. Em $\mathbb{C}[x]$, $x^n-1=\Pi(x-\lambda)$, onde este produto é estendido a todo λ que satisfaz $\lambda^n=1$.

Referencias Bibliográficas

[BM] BIRKOFF, G., MACLANE, S. **Álgebra moderna**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois S.A., 1980. 485p.

[CR] RUPP, C.A. ``On a Transformation by Paper Folding'' **American Math. Monthly**, volume 31, University of Texas, novembro 1924, pp.432-435.

[Crhist] O'CONNOR, J.J., ROBERTSON, E. F **The Mac Tutor History of Mathematics Archive**, School of Mathematics and Statistics, University of St. Andrews, Scotland. Disponível em <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/HistTopics/>. Arquivo consultado em 2001.

[CV] VIDELA,C. R. "On points construtible from conics", **Mathematical Intelligencer**, volume 19, número 2, 1997, (1997), pp. 53-57.

[FM] MATTOS, F. R. P., **Números Construtíveis por Dobraduras de Papel ou Reflexões**, Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada), Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Novembro 2001, 295p.

[GA] GLEASON, A. M. ``Angle Trisection, the Heptagon , and the Triskaidecagon", **American Math. Monthly**, Harvard University, vol 95, march 1988, pp. 357-371.

[HH] HuzitAxio HUZITA, H. ``Understanding Geometry through Origami Axioms", **Proceedings of the First International Conference on Origami in Education and Therapy (COET91)**, J. Smith ed., British Origami Society,1992, pp. 37-70.

[IH]HERSTEIN, I. N. **Topics in Algebra**, University of Chicago, Blaisdell Publishing Company, 1964, 342p.

[PM] MESSER, P. "Problem 1054", **Crux Mathematicorum**, M.D., Mquon, Wisconsin, USA, 1985, p.188.

[RA] ALPERIN, R.C. ``A Mathematical Theory of Origami Constructions and Numbers", **New York Journal of Mathematics**, volume 6, 2000, pp.119-133.

[RA1] ALPERIN, R.C. "Mathematical Origami: Another View of Alhazen's Optical Problem" **3OSME**, march 2001, Departament of Mathematics and Computer Sciencies, San Jose State University, California, 10 p.

[RG] GERETSCHLAEGER, R. "Euclidean Constructions and the Geometry of Origami" **Mathematics Magazine**, volume 68, número 5, 1995, pp. 357-371.

[RH] HARTSHORNE, R. Companion to Euclid, **A course of geometry, based on Euclid's Elements and its modern descendants**, Lecture Notes,Berkeley Mathematics, American Mathematical Society, Berkeley Center for Pure and Applied Mathematics, volume 9, Berkeley, 1999, 362p.

[SR] RABINOWITZ, S. "Solution of Problem 1054", **Crux Mathematicorum**, Digital Equipment Corp., Nashua, New Hampshire, volume 12, nº 10, 1986, pp. 284-285.

[TH] HULL, T. "Origami and Geometric Constructions', **Origami Math pages**, Department of Mathematics at Merrimack College, North Andover. Disponível em <http://web.merrimack.edu/~thull/geoconst.html>. Arquivo consultado em 2001.