Realização
SBEM 15 anos
SBEM PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

GEOMETRIA DINÂMICA E O ESTUDO DE TANGENTES AO CÍRCULO

Luiz Carlos Guimarães, Elizabeth Belfort e Leo Akio Yokoyama

Instituto de Matemática – UFRJ

lcg@labma.ufrj.br, beth@im.ufrj.br, leoakyo@yahoo.com.br

INTRODUÇÃO: CÍRCULOS, SECANTES E TANGENTES

Seja C(O, A) o círculo (ou circunferência) com centro no ponto O e passando pelo ponto A. Uma secante ao círculo C(O, A) é uma reta que contém algum ponto de C(O, A). A figura 1 mostra uma secante a C(O, A) passando pelo ponto P.

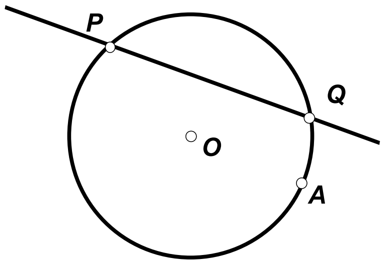


Figura 1: Reta secante a uma circunferência.

É evidente que pelo ponto P passa uma infinidade de secantes ao círculo. Para ver isto, basta tomar um outro ponto Q sobre C(O, A). Para cada ponto Q que escolhemos, a reta determinada pelos pontos P e Q é uma secante a essa curva.

Observações:

1. Por esta definição, uma secante intercepta um círculo no máximo em dois pontos.

2. A palavra secante é reservada, usualmente, apenas para retas que interceptam o círculo em exatamente dois pontos. No decorrer deste texto, vamos esclarecer nossas razões para a nossa escolha diferente da usual.

Suponha que mantemos fixo o ponto P, escolhemos um outro ponto Q sobre o círculo C(O, A), e construímos a secante que passa por P e Q. Podemos nos perguntar o que ocorreria se fizermos o ponto Q se aproximar mais e mais de P?

Podemos imaginar que um problema ocorre se levarmos Q a coincidir exatamente com P: são necessários dois pontos (distintos) para definir uma reta. No entanto, se tentarmos o experimento como fizemos com a figura construída na tela do Tabulæ, o problema, aparentemente, não se apresenta. (A explicação é que, devido à pouca resolução do mouse, é muito difícil colocar a ponto Q suficientemente perto de P).

Existe uma forma de reformular a construção da secante que não apenas elimina o problema, mas que também permite deduzir mais facilmente uma serie de propriedades úteis. Considere, na figura 2, o triângulo isósceles OPQ (quais são os lados iguais desse triângulo?).

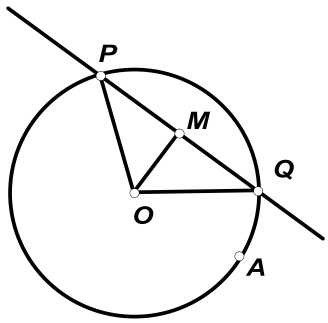


Figura 2: Ponto médio de uma corda PQ.

Se M é o ponto médio da base PQ, sabemos que OM será a altura correspondente a essa base (porque isso não vale, por exemplo, para o lado OP ?). Consequentemente, a reta PQ é perpendicular a OM. Assim, a secante que passa pelos pontos P e Q coincide com a reta que passa por M e é perpendicular à reta OM .

O que ganhamos com isto? Observe o que acontece quando Q se aproxima de P. O ponto médio M sempre existe, e coincide com P quando Q e P coincidirem. A perpendicular a OM, nesse caso, coincide com a perpendicular a OP. Podemos então dizer que essa reta (a perpendicular em P a OP) é o limite, quando Q tende a P, das retas PQ. Isto motiva uma definição de tangente que vai valer para todas as curvas:

Definição: Dada uma curva Γ, um ponto P sobre essa curva, mantido fixo, e um outro ponto Q, que se move livremente sobre Γ, se existir uma reta limite das retas secantes que passam por P e Q, quando Q se aproxima de P, diremos que essa reta é a tangente em P à curva Γ.

<u>Observação:</u> No caso particular em que Γ é o círculo C(O, A), a tangente em um ponto P sempre existe, e tem que ser perpendicular ao raio OP. Por outro lado, como essa perpendicular é única, podemos afirmar também que a perpendicular ao raio OP é a tangente a C(O, A) no ponto P.

CONSTRUÇÕES DE RETAS TANGENTES A UM CÍRCULO

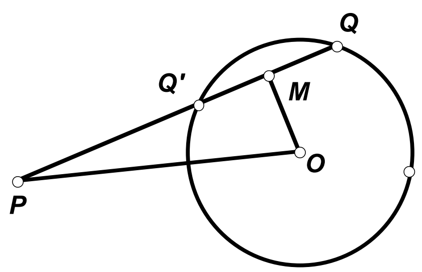
Agora suponha que temos dados um círculo C(O, A), e um ponto P, situado no exterior desse círculo. Vamos discutir três diferentes formas de resolver o seguinte problema:

Construir as tangentes a C(O, A) que passam pelo ponto P.

<u>Primeira Solução:</u>

Para ver a primeira, considere inicialmente uma secante a C(O, A), que passa pelo ponto P, e corta C(O, A) nos pontos Q e Q' (ver a tela “Tangentes por um ponto 1”, ilustrada na figura 3). Seja agora M o ponto médio de QQ'. Já vimos que OM é perpendicular à secante PQ, e portanto o triângulo OMP é retângulo em M, com hipotenusa OP.

Imagine todos os triângulos retângulos que se poderia construir, tendo OP como hipotenusa. Você poderia dizer qual é o lugar geométrico de todas as posições possíveis para o terceiro vértice M ?



<u>Figura 3</u>: Reta secante ao círculo pelo ponto P.

Esse lugar geométrico é um círculo, tendo OP como diâmetro (porque ?). Este círculo, como tem um ponto (P) fora de C(O, A), e outro (o ponto Q) no interior de C(O, A), intercepta C(O, A) em dois pontos, que chamaremos de T e T ', como ilustrado na figura 4.

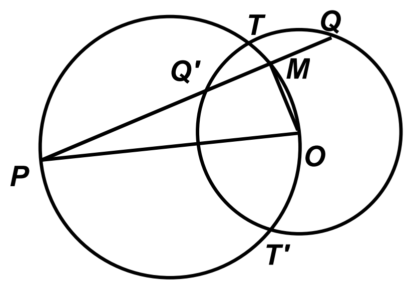


Figura 4: Determinação das retas tangentes ao círculo passando pelo ponto P.

Por que podemos afirmar que a reta PT é tangente à circunferência? Observe que as retas PT e PT' são tangentes a C(O, A) porque, pela construção, os triângulos OTP e OT'P são retângulos, em T e em T' respectivamente (veja a observação feita logo após a definição de tangente). Portanto, para construir as retas tangentes a C(O, A) que passam pelo ponto P, podemos proceder da seguinte forma: construa o círculo auxiliar que tem o segmento OP como diâmetro. Construa as retas que ligam P aos pontos de interseção T e T', desse círculo com C(O, A). Essas retas são as tangentes procuradas.

Podemos nos perguntar o que ocorre quando o ponto P é levado para o interior de C(O, A). Nesse caso, o círculo com OP como diâmetro fica inteiramente contido no interior de C(O, A), e não há intercessão com a circunferência. A construção feita no Tabulæ se comporta corretamente: não existem tangentes a C(O, A) que passem por um ponto em seu interior. Mas existe também uma posição intermediária: quando P está situado exatamente sobre a circunferência C(O, A). Vamos nos deter um pouco mais sobre este caso. Teremos então dois círculos, C(O, A) e o círculo com diâmetro OP, como ilustrado na figura 5. Seja O' o centro desta última, de modo que podemos denotá-la por C(O', P). Os pontos O, O', e P são colineares, porque OP é diâmetro. Portanto, a tangente em P a C(O, A) é também tangente a C(O', P) em P. A circunferência C(O', P) não toca C(O, A) em nenhum outro ponto além de P (por que?).

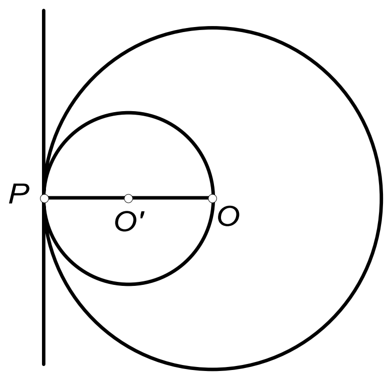


Figura 5: Determinação da reta tangente quando o ponto P pertence à circunferência.

Definição: dizemos que duas circunferências são tangentes em um ponto P (ou que se tocam em P) se a reta tangente em P a uma delas é também tangente à outra.

O raciocínio empregado para encontrar a segunda e a terceira solução para o problema de encontrar as tangentes a C(O, A) por um ponto dado P utiliza transformações: respectivamente, uma rotação e uma reflexão.

Segunda Solução:

Considere o ponto P, externo à circunferência C(O, A) (ver tela “Tangentes por um ponto 2”) . O segmento OP intercepta C(O, A) em um ponto Q. Como ilustrado na figura 6, Sabemos construir a tangente a C(O, A) pelo ponto Q: basta traçar a reta r, perpendicular a OP passando por Q. Sejam P' e P” os dois pontos em que r intercepta a circunferência C(O, P), com centro em O e passando por P. O ponto P” pode ser girado em torno de O, até que ele coincida com P.

Se, ao fazermos isto, imaginarmos a reta r também girando em torno de O, vemos que ela se mantém tangente a C(O, A), e vai passar por P quando P e P” coincidirem, isto é, teremos uma tangente a C(O, A) passando por P. Mas observe que esta mesma rotação leva OP em OP', e Q sobre um dos pontos de tangência procurados. Concluí-se que os pontos de tangência que buscamos são os pontos de interseção dos segmentos OP' e OP” com C(O, A).

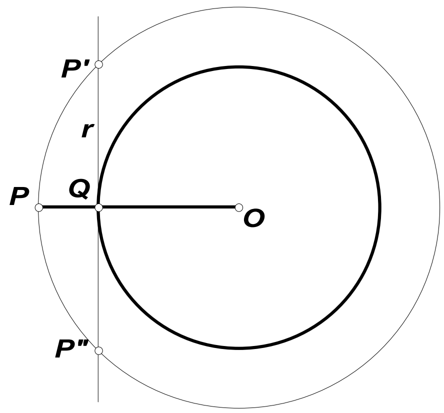


Figura 6: Reta tangente ao círculo passando pelo ponto Q.

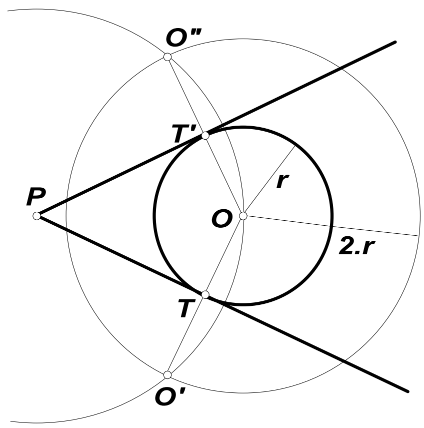
Para obter os pontos de tangência, basta ligar, na figura acima, o ponto O aos pontos P’ e P”. Os pontos de T e T’, interseções desses segmentos com C(O, A) são os pontos que determinam as tangentes a esse círculo passando pelo ponto P.

Terceira Solução:

Imagine o problema resolvido, seja T um dos pontos de tangência procurados, e seja PT a tangente correspondente (ver tela “Tangentes por um ponto 3”). Suponha que refletimos o ponto O com relação a PT, obtendo o ponto O'. O segmento OO' é perpendicular a PT, e T é o seu ponto médio. Consequentemente, O e O' estão à mesma distância de P, isto é, estão sobre a circunferência com centro em P e passando pelo ponto O.

Por outro lado, o ponto O', como é o resultado da reflexão de O com relação a PT, está também sobre a circunferência de centro O e raio 2r. Portanto, os pontos de interseção da circunferência de centro O e raio 2r com a circunferência de centro em P e passando por O, nos dão os pontos de tangência desejados, como ilustrado na figura 7.

Para obter os pontos de tangência: construa as círculos de centro P e passando por O, e de centro O e raio igual ao dobro da circunferência original. Obtenha os pontos de interseção O’ e O” dessas duas circunferências, e construa os segmentos OO’ e OO”. Os pontos de interseção desses dois segmentos com a circunferência original C(O, A) nos dão os pontos de tangência T e T’ procurados.



<u>Figura 7:</u> Terceira construção para as retas tangentes a um círculo

PROBLEMAS RESOLVIDOS UTILIZANDO GEOMETRIA DINÂMICA

<u>Problema 1:</u>

Suponha que são dadas duas retas r e r’, e um ponto P sobre r. Construa um círculo que passa por P, e é tangente simultaneamente a r e a r’.

Primeira solução:

Sabemos que o centro do círculo procurado está sobre a perpendicular à reta r traçada a partir do ponto P (porque?). Se as retas são concorrentes, o exercício 6, acima, nos diz que o centro do círculo procurado está também sobre uma das bissetrizes das retas r e r'. As interseções dessas retas com a perpendicular a r construída a partir de P nos dão os centros dos círculos procurados, como ilustrado na figura 9.

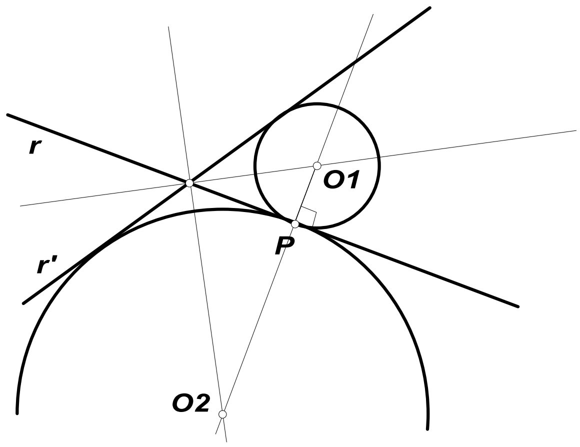


Figura 9: Primeira solução para o problema I.

Observe que se r e r' não são concorrentes, essa solução tem que ser modificada, levando em conta o exercício 7. Abaixo apresentamos uma outra solução, que se aplica para quaisquer par de retas r e r'.

Segunda solução:

Construa um círculo auxiliar, tangente a r em P (ver a tela "Problema 1"). Construa as duas tangentes a esse círculo, r1 e r2, que são paralelas a r' (exercício A. 5), como ilustrado na figura 10. Agora sejam Q, Q' e Q" os pontos em que a perpendicular a r' traçada a partir de P intercepta respectivamente r, r1 e r2. A razão h = PQ'/PQ define uma homotetia, com centro em P, que leva a reta r1 em r', e o círculo auxiliar em um dos círculos que buscamos (porque?).

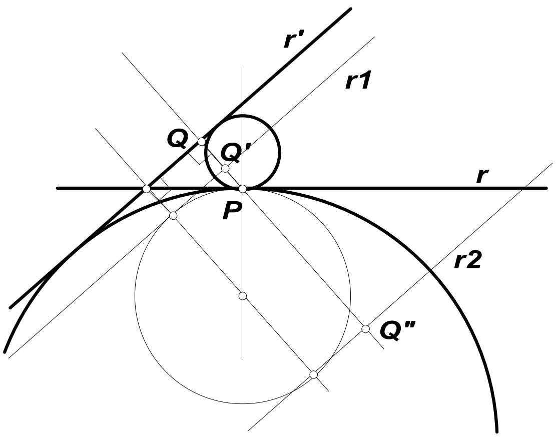


Figura 10: Segunda solução para o problema I

A razão h' = PQ"/PQ define uma segunda homotetia com centro em P, desta vez levando a reta r2 em r', e o círculo auxiliar no segundo círculo que buscamos (porque?). Discuta ainda porque essa construção é válida mesmo quando r e r' se tornam paralelas.

Problema 2:

Suponha que são dadas duas retas *r* e *r*', e um ponto *P* . Construa um círculo que passa por *P*, e é tangente simultaneamente a *r* e a *r*'.

Solução:

Construa um círculo auxiliar, tangente simultaneamente a r e a r'(abra a tela "Problema 1"). Existem dois casos possíveis, correspondendo a centros sobre cada uma das bissetrizes (ver figura 11). Agora sejam Q e Q' os pontos de interseção da reta OP com um desses círculos. As razões h =OP/OQ, e h'= OP/OQ' definem duas homotetias de centro P, que levam respectivamente Q e Q' sobre P. Cada uma dessas homotetias transforma o círculo auxiliar sobre um dos círculos procurados no problema.

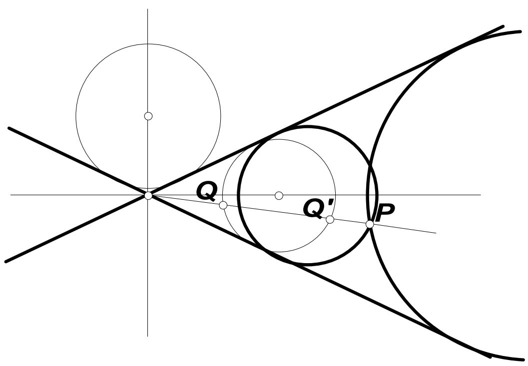


Figura 11: Solução para o problema 2.

Observação: discuta ainda porque essa solução não é válida no caso em que as duas retas são paralelas. Construa uma solução para esse caso.

Problema 3:

Suponha que são dadas três retas *r*, *r'* e *r*". Construa os círculos que são tangentes simultaneamente a essas três retas.

Solução:

Vamos desenvolver apenas o caso mais geral, em que as três retas se interceptam duas a duas em três pontos, determinando o triângulo ABC mostrado na figura 12. Observe que a tangência a duas das retas determina a condição de que o centro do círculo está sobre uma das bissetrizes destas retas.

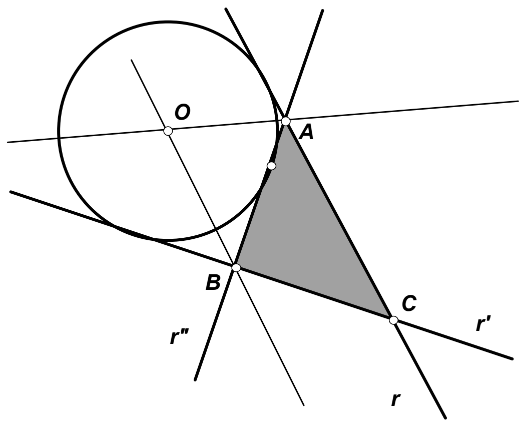


Figura 12: Solução para o caso mais geral do problema 3.

Considere agora uma dessas retas e a terceira, e teremos a posição de um dos centros: o ponto de interseção das duas bissetrizes determinadas pelos dois pares de retas. Isto vai nos dar, neste caso, quatro posições possíveis para o centro dos círculos buscados: uma delas é ilustrada na figura. Construa uma tela no Tabulæ com todas as soluções, e discuta os demais casos, dependendo da disposição relativa das retas.

Observação: este problema tem interesse também no estudo de triângulos. Os círculos que determinamos correspondem aos três círculos ex-inscritos, tangentes externamente a dois dos três lados (a figura ilustra um deles) e ao círculo inscrito ao triângulo.

Problema 4:

Suponha que temos dada uma reta r, e dois pontos A e B. Construa um círculo que passa por A e por B, e é tangente à reta r.

Solução:

Para proceder a análise do problema, considere o problema resolvido, como na figura 13 (ver também a tela “Problema 4”.). Sabemos que o centro do círculo buscado está sobre a mediatriz de AB (por que?), mas desconhecemos a posição do ponto de tangência T, que permitiria determinar a posição do centro O do círculo que buscamos.

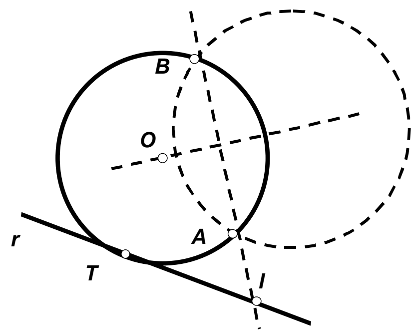


Figura 13: Solução para o problema 4.

Por outro lado, é fácil se convencer de que a mediatriz de AB é um eixo de simetria do problema: se refletirmos a reta r com respeito a essa mediatriz, a reta resultante deve ainda ser tangente ao círculo que buscamos. Podemos desta forma reduzir o problema ao problema 2: construa a mediatriz de AB, obtenha a reta r’, simétrica a r com respeito a essa mediatriz, e construa os círculos que passam por A e são tangentes a r e a r’.

PALAVRAS CHAVE: Geometria Dinâmica, Geometria, Tangentes.

REFERÊNCIAS

GUIMARÃES, L.C.; BELFORT, E. **Roteiros de Laboratório de Geometria**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1999.

GUIMARÃES, L.C.; BELFORT, E. **Geometria Dinâmica no Ensino Básico**. São José do Rio Preto, SP: SBMAC, 2003.

HADAMARD, J. **Leçons de Géométrie Elementaire** (2 volumes). Paris: Jacques Gabay, 1988

HEATH, Thomas L. **Euclid - The Thirteen Books of The Elements**. 2ª edição. New York: Dover. 1956.

LEGENDRE, A. M. **Elementos de Geometria** – Tradução da 5ª. edição francesa (1801, Paris: Librarie de Firmin Didot Frères). Rio de Janeiro: Imprensa Régia, 1809.