Realização
SBEM 15 anos
SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, SOFTWARE GRÁFICO E DETECÇÃO DE LACUNAS NO CONHECIMENTO DA LINGUAGEM ALGÉBRICA

Norma Suely Gomes Allevato
Unesp - Rio Claro/SP
normallev@uol.com.br

1 - Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns resultados de uma pesquisa de doutorado, cujo fenômeno de interesse é o ensino da Matemática através da resolução de problemas utilizando computadores. A pesquisa foi desenvolvida com alunos da disciplina Matemática, ministrada no primeiro ano de um curso superior de Administração de Empresas.

Inicialmente são apresentadas as justificativas apoiadas, especialmente, na literatura de pesquisa. Alguns estudos são apontados nos quais são analisados aspectos relacionados à resolução de problemas no ensino de Matemática. Também são apresentadas pesquisas realizadas sob a perspectiva da utilização dos computadores no ensino de Matemática, onde foram analisados aspectos como geração de imagens, experimentação, visualização e o papel da Álgebra nesse contexto.

Segue-se uma breve apresentação dos procedimentos metodológicos adotados na condução da pesquisa. Em seguida é apresentado um conjunto de dados escolhido por possibilitar a obtenção de significativos resultados a respeito de aspectos e conteúdos algébricos que foram percebidos quando da utilização, pelos alunos, do *software* gráfico *Winplot*, na resolução de problemas relacionados ao estudo de funções.

Finalmente, são feitas análises dos dados à luz da literatura de pesquisa apresentada inicialmente.

2 - Suporte Teórico

2.1 - A resolução de problemas na Educação Matemática

Nesta seção apresento algumas pesquisas já desenvolvidas sobre resolução de problemas, no âmbito da Educação Matemática. O estudo da literatura relacionada a esse tema trouxe à tona alguns aspectos que procurarei destacar a seguir.

Embora o termo "problema" esteja bastante presente no dia-a-dia de pessoas que trabalham com Matemática, percebe-se que, ainda hoje, nem sempre seu uso vem acompanhado de um consciente posicionamento sobre o seu significado. Trago aqui as compreensões de Onuchic (1999) sobre o que é um problema: "[...]é tudo aquilo que não se sabe fazer mas que se está interessado em resolver" (p.215). Deste modo, uma questão será um problema se o aluno ainda não conhece os meios necessários à sua resolução, mas deseja resolvê-la.

Concepções atuais sobre resolução de problemas têm se apoiado em idéias construtivistas para o ensino de Matemática. Sob esta ótica, Santos (2002) relaciona a resolução de problemas aos processos históricos de construção do conhecimento científico e afirma que

> "esse modelo coloca o aluno na situação de alguém que precisa resolver um certo problema mas que não possui a ferramenta necessária (ou mais econômica) para fazê-lo; nessa situação, não existe outra solução, para o sujeito, que [não seja] construir essa ferramenta que permite a resolução de seu problema, numa situação análoga àquela vivida no processo de construção dos conceitos científicos." (p.14).

Em um texto intitulado *Ensino através da Resolução de Problemas*, Van de Walle (2001) trata da resolução de problemas como estratégia de ensino. A partir desse ponto de vista, ele afirma que tarefas ou problemas podem e deveriam ser propostos para envolver os estudantes em atividades para pensar sobre e para desenvolver a Matemática importante que eles precisam aprender.

Defendendo que o ambiente de sala de aula de Matemática deva propiciar aprendizagem com sentido, Schoenfeld (1989) apresenta algumas experiências de outros pesquisadores, realizadas com alunos, envolvendo resolução de problemas. Um dos aspectos que considera ao desenvolver suas análises está apoiado no que chamou a natureza da Matemática. Ele supõe que, no centro dessa natureza, fazer Matemática não só pode como deveria ser um ato de fazer sentido e, além disso, que os fatos e procedimentos que os alunos aprendem no ensino da Matemática deveriam ser um meio para um fim e não um fim em si mesmo. Um exemplo, tão típico quanto genérico, é o das longas listas de problemas, propostas pelos professores aos alunos, sobre um determinado assunto matemático. Muitas vezes se verifica que os alunos automatizam procedimentos de tal modo que se, entre tantos, um determinado problema exigir deles um encaminhamento diferente, eles não são capazes de perceber. Os alunos simplesmente repetem, naquele problema, os mesmos procedimentos que vinham utilizando nos anteriores e produzem resultados incorretos; não param para pensar sobre cada problema individualmente, não atribuem sentido ao que lêem e ao que fazem.

Não raro, dificuldades têm sido apontadas para a implementação da resolução de problemas no ensino. A esse propósito, Noddings (1989) realizou um estudo em que analisou alguns aspectos que dificultam a resolução de problemas. Ela, em geral, exige do aluno o domínio de algumas sub-habilidades. Para esse autor tais sub-habilidades correspondem a pré-requisitos matemáticos que, normalmente, estão relacionados à realização de cálculos. Porém ele argumenta que a constatação dessa falta não deve ser usada como argumento para submeter os alunos a exaustivas listas de exercícios repetitivos, até que atinjam um determinado nível de competência, antes de lhes apresentar a possibilidade de resolver problemas. Exercícios prévios de cálculo podem ser realizados a fim de que os alunos desenvolvam competências necessárias à compreensão de certos conteúdos. O problema é realizá-los tanto, que se tornem um fim em si mesmos, configurando-se aos alunos como, verdadeiramente, sem sentido.

Segundo Noddings (1989), a percepção do tipo de sub-habilidades necessárias exige do professor uma visão à frente, uma análise dos problemas e dos novos conceitos que serão trabalhados, de modo que as sub-habilidades básicas possam ser identificadas e ensinadas ou revisadas eficientemente. Então, quando o professor chegar ao "grande tópico", os alunos perceberão o que é mais importante e o que é auxiliar ou secundário.

Também Campbell (1996) trata desse aspecto, colocando que é importante o professor procurar determinar os conhecimentos anteriores de que o aluno dispõe, a fim de saber o que precisa de menor atenção e que "lacunas" de conhecimento existem que precisam ser preenchidas. Ela enfatiza que a constatação da falta de conhecimentos anteriores não deve ser usada como justificativa para limitar a oportunidade de os alunos aprenderem algo mais.

Em seu texto, dirigido especialmente para professores, Van de Walle (2001) afirma, concordando com outros autores, que é difícil ensinar através da resolução de problemas. Entretanto ele apresenta algumas razões que justificam o esforço e, entre elas, a de que a resolução de problemas fornece, ao professor, dados de avaliação que lhe permitem tomar decisões sobre o ensino e ajudar os estudantes a terem sucesso com a aprendizagem. Assim, também Van de Walle (2001) valoriza o potencial avaliativo da resolução de problemas. Segundo ele, essa atividade é uma fonte segura de valiosas informações que permitem ao professor, entre outras coisas, planejar as próximas aulas, ajudar os estudantes individualmente e avaliar seu progresso.

2.2 - A UTILIZAÇÃO DOS COMPUTADORES NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Ao empreender atividades de ensino com os computadores, é preciso tentar compreender o papel desse recurso nos ambientes em que se insere e qual é sua relação com a atividade que será realizada com sua mediação. Vale afirmar, assim, que para utilizar eficientemente o computador para aprender (ou ensinar) Matemática, os alunos (ou o professor) precisam ter conhecimento do que estão fazendo ou pretendem que o computador faça. Eles precisam saber Matemática embora, muitas vezes, uma Matemática diferente da que era necessária quando da ausência dos computadores nos ambientes de ensino.

Tall (1989) comenta que, em geral, os matemáticos acreditam que a natureza dos objetos com que trabalham é determinada por conceitos imutáveis, cuja realidade independe de fatores culturais. É notório que em Matemática, historicamente, elementos conceituais têm conquistado supremacia sobre os observáveis. Entretanto, o caráter observável dos objetos produzidos ou processados pelas tecnologias informáticas (TI) está, cada vez mais, ganhando destaque.

Segundo esse autor, o que ocorre é que forças culturais se configuram quando novas idéias são introduzidas e as TI, em geral, as têm colocado em ação. Essas forças movem elementos de uma cultura a outra por um processo de difusão. Por vezes ocorre uma lacuna cultural em que os novos elementos levam algum tempo para se tornar parte da cultura; e algumas vezes há uma resistência cultural quando novos elementos definitivamente não são aceitos em substituição aos velhos.

Alguns novos elementos que nos foram trazidos pela chegada das TI, como os *desktop*, telefones celulares e internet, já foram incorporados e rapidamente se tornaram parte da nova cultura. Outros, tais como o uso do computador para auxiliar ou mesmo promover a aprendizagem, estão sujeitos à lacuna cultural e à resistência por parte das comunidades de ensino. Verifica-se ainda, destaca Tall (1989), por vezes, uma complexa mistura que resulta da fusão do "velho" com o "novo".

Encontramos na pesquisa desenvolvida por Villarreal (1999) um extenso estudo sobre visualização que, embora seja um processo bastante privilegiado pelo ambiente computacional, é, muitas vezes, menosprezado dentro da Educação Matemática. Os episódios apresentados pela autora evidenciam, entre outros elementos, o pensamento matemático de suas estudantes em relação a esse processo. Em alguns deles foram percebidos conflitos entre o conceito de derivada da função e a reta tangente ao gráfico da função, e os relatos e análises dos episódios sugerem que a abordagem visual proporcionada pelo computador não era natural para as alunas. Elas recorriam, com freqüência, ao lápis e papel para resolver tais conflitos. Entretanto, as imagens fornecidas pelo computador permitiram questionar suas concepções e, a partir daí, foi possível pensar nos conceitos de maneira mais ampla.

Na realidade, o computador privilegia o pensamento visual sem, contudo, implicar na eliminação do algébrico. No Cálculo pode-se empregar informações gráficas para resolver questões que também podem ser abordadas algebricamente e relacioná-las: é o caso da representação geométrica da função derivada que possibilita interessantes análises sobre o comportamento e os extremos das funções. Além disso, a abordagem visual tem demonstrado facilitar a formulação de conjecturas, refutações, explicações de conceitos e resultados, dando espaço, portanto, à reflexão. Pesquisadores salientam que visualização e manipulação simbólica devem complementar-se para que se obtenha uma compreensão matemática mais abrangente e profunda. (BENEDETTI, 2003; BORBA; PENTEADO, 2001; PIERCE; STACEY, 2001; TALL, 1989; VILLARREAL, 1999)

Borba e Penteado (2001) relacionam, a esses fatores, o enfoque experimental que o computador possibilita: "o enfoque experimental explora ao máximo as possibilidades de rápido *feedback* das mídias informáticas e a facilidade de geração de inúmeros gráficos, tabelas e expressões algébricas" (p.43). A partir da investigação e da experimentação os alunos formulam, reformulam e rejeitam hipóteses; lançam novas questões e apresentam dúvidas em contextos não previstos pelo professor e que não surgiriam em outro ambiente. As explorações implementadas conduzem-se, por vezes, por caminhos inesperados configurando uma forma de aprender e pensar como "rede", tornando possível estabelecer conexões e novas relações de significados na aprendizagem. (BENEDETTI, 2003; VILLARREAL, 1999)

Somam-se a esses novos elementos, algumas novas dificuldades que podem surgir quando da utilização dos computadores no ensino de Matemática. Pierce e Stacey (2001) apontam as seguintes: possíveis confusões entre a notação matemática convencional e a sintaxe própria dos *softwares,* notadamente os *softwares* algébricos, e o problema de reconhecer quando o computador está errado. Alguns alunos, ou mesmo professores, podem incorrer no erro de considerar o computador como uma autoridade. A literatura de pesquisa nesta linha, em geral, mostra que, contrariamente a uma crença inicial de que a chegada dos computadores "atrapalharia a aprendizagem" dos alunos, o conhecimento de conteúdos matemáticos se torna imprescindível no monitoramento das atividades realizadas e dos resultados obtidos com ele.

Tal conhecimento refere-se, por vezes, a conteúdos que não seriam necessariamente considerados ou valorizados no ensino sem a inclusão dos computadores. Decorre, portanto, que as características e possibilidades oferecidas pelos ambientes de ensino dito informatizados sugerem reestruturação ou, pelo menos, uma revisão dos conteúdos tratados em classe.

3 - O CONTEXTO E ALGUNS ASPECTOS METODOLÓGICOS

A pesquisa desenvolveu-se através de observação participante, em aulas de Matemática ministradas para alunos de Administração de Empresas. O professor responsável pela turma fundamenta seu ensino em resolução de problemas e, para atender aos propósitos desta pesquisa, propôs-se a dividir suas aulas realizando metade delas na sala de aula convencional e a outra metade no laboratório de informática.

O software utilizado foi o *Winplot*[1], que é um software gráfico, gratuito, muito eficiente no estudo de funções de uma ou duas variáveis, derivadas, integrais, equações diferenciais e outros assuntos. É especialmente fácil de ser utilizado e disponível em português.

Para o registro dos dados foram utilizados três recursos: gravações, documentos elaborados pelos alunos e diário de campo. Os diálogos entre os alunos e o pesquisador, durante as atividades de resolução de problemas, com a utilização do computador ou não, foram gravadas; tais diálogos foram transcritos para posterior análise. Todos os problemas resolvidos eram entregues pelos alunos, ao professor, por escrito; estes documentos me foram cedidos, constituindo-se também em fonte de dados. Um diário

[1] http://math.exeter.edu/**rparris**/winplot.html.

de campo foi elaborado após cada observação. As notas de campo constituem um relato escrito do que o investigador ouve, vê e pensa durante e após a coleta de dados; contém idéias, reflexões, impressões e percepções, bem como padrões que emergem dos dados. Segundo Bogdan e Biklen (1994) "as notas de campo são fundamentais para a observação participante" (p.150). Por isso optou-se por constituir um diário; ele complementa o que foi obtido das gravações e dos documentos.

4 - OS DADOS

O professor da turma propôs aos alunos um trabalho contendo vários problemas sobre funções para que fizessem em casa, utilizando o *Winplot*, e o entregassem impresso. Os problemas apresentados no decorrer deste texto foram retirados deste trabalho. Iniciarei pelos problemas que compõem o grupo 07, que foi enunciado assim:

Grupo 07

Objetivos:

Construir e interpretar gráficos de funções raiz quadrada
Determinar os pontos de encontro com os eixos.

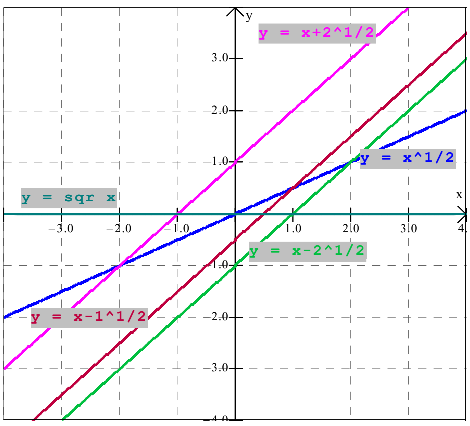
1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema de eixos.

a) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{x} \\ f_2(x) = \sqrt{x-1} \\ f_3(x) = \sqrt{x-2} \\ f_4(x) = \sqrt{x+2} \end{cases}$	b) $\begin{cases} f_1(x) = \sqrt{1-x} \\ f_2(x) = \sqrt{2-x} \\ f_3(x) = \sqrt{2-2x} \\ f_4(x) = \sqrt{2-3x} \end{cases}$

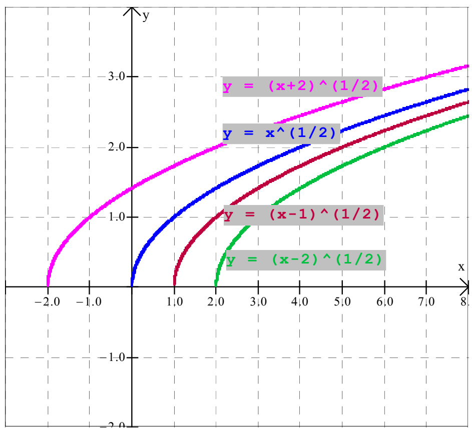
A sintaxe apropriada, no *Winplot*, para a raiz quadrada é *sqr(x)*. Também pode ser empregada a forma de potência correspondente, x elevado a meio, ou seja *x^(1/2)*. Observei que foram muito freqüentes os erros causados pela falta dos parênteses ou pela sua colocação no lugar errado, ao digitar a expressão no *Winplot.* A tabela a seguir refere-se às funções do item (a):

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$\sqrt{x}$	*sqr x*	0	*sqr(x)*
$\sqrt{x} = x^{1/2}$	x^1/2	$\frac{x^1}{2}$	x^(1/2)
$\sqrt{x-1} = (x-1)^{1/2}$	x-1^1/2	$x - \frac{1^1}{2} = x - 0{,}5$	(x-1)^(1/2)
$\sqrt{x-2} = (x-2)^{1/2}$	x-2^1/2	$x - \frac{2^1}{2} = x - 1$	(x-2)^(1/2)
$\sqrt{x+2} = (x+2)^{1/2}$	x+2^1/2	$x + \frac{2^1}{2} = x + 1$	(x+2)^(1/2)

Os gráficos apresentados nos trabalhos dos alunos foram os seguintes:



Sem os parênteses



Com os parênteses

O que aconteceu no caso registrado na primeira linha da tabela apresentada é que, quando é digitada alguma expressão que não corresponde à sintaxe do *software,* ele "ignora" aquela parte da expressão e considera somente o restante. Foi assim que ocorreu todas as vezes que os alunos digitaram *sqr x* sem colocar os parênteses no x. Vê-se que o gráfico apresentado, na realidade da função f(x) = 0, foi obtido como se o aluno tivesse colocado a expressão *sqr* x + 0, em que *sqr x* foi ignorado. Nos demais casos, da forma como os alunos digitaram a fórmula da função, eles as transformaram em funções afim. Os gráficos apresentaram-se como retas, e não como partes de parábolas, conforme deveria ocorrer.

Este tipo de erro também foi observado em outros grupos de problemas do trabalho, conforme veremos a seguir:

Grupo 08

Objetivos:

a) Construir gráficos de funções hiperbólicas.
b) Determinar as assíntotas
c) Determinar os pontos de encontro com os eixos

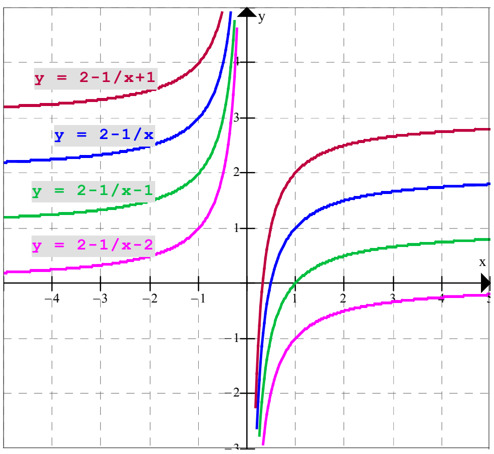
1. Construir os gráficos das funções no mesmo sistema cartesiano.
2. Determinar as assíntotas e os encontros com os eixos.

a) $\begin{cases} f_1(x) = \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$	b) $\begin{cases} f_1(x) = 2 - \dfrac{1}{x} \\ f_2(x) = 2 - \dfrac{1}{x+1} \\ f_3(x) = 2 - \dfrac{1}{x-1} \\ f_4(x) = 2 - \dfrac{1}{x-2} \end{cases}$

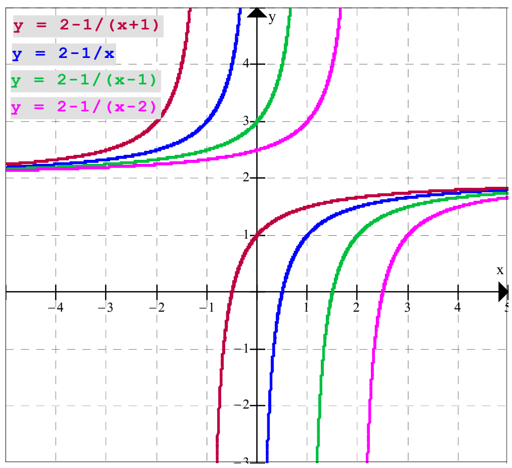
Novamente, a colocação dos parênteses no lugar errado, ou sua falta, foram as principais causas dos erros detectados nas resoluções apresentadas nos trabalhos, para os problemas do grupo 08. A tabela a seguir, referente às funções do item (b), mostra que o que ocorreu foi o seguinte

Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$2-\dfrac{1}{x+1}$	2 - 1 / x+1	$2-\dfrac{1}{x}+1=3-\dfrac{1}{x}$	2 - 1 / (x+1)
	2 - (1 / x+1)	$2-\dfrac{1}{x}-1=1-\dfrac{1}{x}$	
Enunciado e forma equivalente	Digitado pelos alunos	O *Winplot* executou	Forma correta
$2-\dfrac{1}{x-1}$	2 - 1 / x-1	$2-\dfrac{1}{x}-1=1-\dfrac{1}{x}$	2 - 1 / (x-1)
	2 - (1 / x-1)	$2-\dfrac{1}{x}+1=3-\dfrac{1}{x}$	
$2-\dfrac{1}{x-2}$	2 - 1 / x-2	$2-\dfrac{1}{x}-2=\dfrac{1}{x}$	2 - 1 / (x-2)
	2 - (1 / x-2)	$2-\dfrac{1}{x}+2=4-\dfrac{1}{x}$	

Em virtude destes erros, os gráficos obtidos pelos alunos apresentaram-se do seguinte modo:



Sem os parênteses



Com os parênteses colocados corretamente

Uma primeira alusão a esses exemplos apresentados refere-se a que, conforme já se tem percebido com freqüência no ensino de Matemática, a repetição de um procedimento, de um mesmo tipo de problema, etc, não leva, necessariamente, à compreensão do conteúdo ou do conceito envolvido na atividade. Neste caso específico, a forma como foram elaborados os problemas fez com que os alunos repetissem as instruções dadas ao *Winplot* e esboçassem muitos gráficos sem, contudo, compreender o que estavam fazendo. Neste grupo de funções representadas graficamente com a utilização do *software*, os alunos não perceberam, por exemplo, que constantes positivas adicionadas ou subtraídas da variável independente x provoca translações para a esquerda ou para a direita, respectivamente, nos gráficos das funções; e no grupo 7, os alunos não associaram corretamente as expressões que digitavam com o formato do gráfico das funções, entre outras coisas.

Houve uma aluna que, tendo começado a fazer este trabalho com antecedência, percebeu a necessidade de pensar mais cuidadosamente sobre a colocação, ou não, dos parênteses e me procurou para esclarecer algumas de suas dúvidas a este respeito. Trarei aqui uma parte de nosso diálogo sobre o item 1.c) do grupo de problemas 1:

Grupo 01

Objetivos:
a) Construir e interpretar gráficos de funções constantes.
b) Conhecer a imagem de pontos de funções dadas.
c) Determinar os pontos de encontro com os eixos.

1. Construir o gráfico, no mesmo sistema cartesiano, das seguintes funções:
   a) $y = 2$ b) $y = 3$ c) $y = \sqrt{2}$
   d) $y = -2$ e) $y = \sqrt[3]{10}$ f) $y = \text{sen}\,\frac{\pi}{4}$
   O que é que os gráficos das funções anteriores têm em comum?

2. Seja a função dada por $y = \pi^2$, utilizando a função "Traço" verifique e marque os pontos da função no gráfico para:

x	Y
-2	
-1	
0	
1	
$\sqrt{2}$	

No diálogo a seguir, Pe refere-se ao pesquisador; [...] indica supressão de parte do diálogo, por não ser conveniente ou relevante no contexto de análise em questão; e [texto] indica inclusão de comentário meu nos diálogos, por ser conveniente ou relevante esclarecer ao leitor o significado das falas.

Aluna: – Olha só. Grupo 1... Letra c; essa aqui. Como é que ficou...olhe. Ficou assim. Agora, eu não sei se eu coloco isso entre parênteses.

[...]

Pe: – Dois elevado a meio...

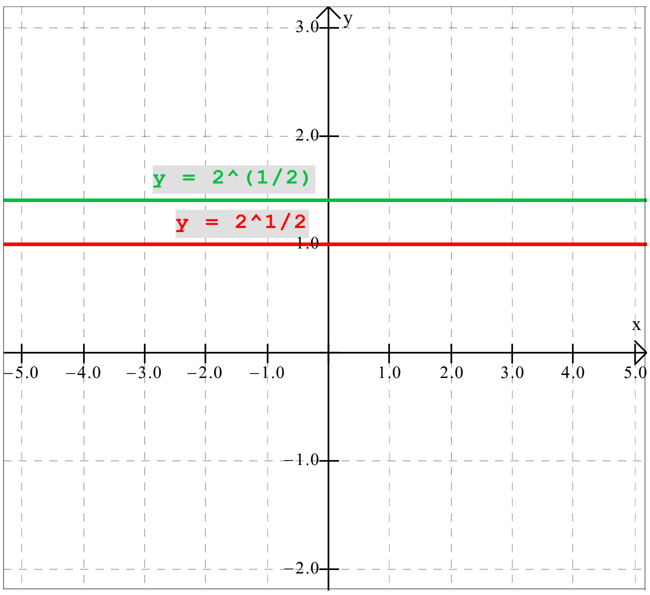
Aluna: – Está vendo que dá diferente se eu colocar entre parênteses? É o que a gente estava discutindo. Eu fiz assim só pra senhora ver que... que dá, na expressão, isso...

Pe: – Uma coisa dá diferente da outra?

Aluna: – É. Então, se eu puser sem parênteses fica diferente, que é essa de cima, dessa de baixo.

Pe: – Ta...

Ao tentar esboçar o gráfico da função $y = \sqrt{2}$, a aluna considerou a forma de potência, x elevado a meio, mas ficou em dúvida se deveria colocar o expoente $\frac{1}{2}$ entre parênteses, x^(1/2), ou não, x^1/2. Ela digitou as duas expressões no *Winplot*, para comparar os gráficos, e observou que eram diferentes:



Pe: – Então vamos na...

Aluna: – E como é que eu vou saber, mesmo?

A aluna não sabia qual era o gráfico correto e nem sabia a que recorrer para decidir-se sobre colocar ou não os parênteses.

Pe: – ...então vamos à Matemática? Você sabe quanto vale, aproximadamente, a raiz de dois?

Aluna: – É zero vírgula...alguma coisa, não é?

Pe e aluna: – Não.

Pe: – É um ...

Aluna: – Um vírgula...

Pe: – ...quatro. [...] é aproximadamente um vírgula quatro. Ele [o professor] podia ter escrito assim!

Escrevi a fórmula da função no papel, do seguinte modo: y = 1,4.

Pe: – Se em vez de ele ter dado assim [$y = \sqrt{2}$], ele apresentasse aquela [y = 1,4] pra você, qual seria o gráfico certo, então?

Aluna: – De um vírgula quatro... Seria esse, o verdinho!

Pe: – Exato!

Aluna: – É! Entendi agora.

Segui o diálogo para ajudar a aluna a entender porque o outro gráfico obtido por ela estava incorreto.

Pe: – Ta. Então vamos ver o que é que está errado aqui? [...] Quando você digitou: 2...elevado...a 1...barra...2, ele entendeu: 2 elevado a **1**; e tudo isso...

Aluna: – ...dividido por 2.

Pe: – Que dá quanto?

Aluna: – Um. É verdade!

O que ocorreu quando a aluna digitou a expressão sem os parênteses, 2^1/2, é que o *Winplot* executou $\frac{2^1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Pe: – Por isso ele desenhou o gráfico passando pelo 1.

Aluna: – Aqui é esse de cima. Entendi.

Pe: – Agora...?

Aluna: – Então tem que pôr [os parênteses].

5 - ANÁLISE DOS DADOS E RELAÇÃO COM A LITERATURA

Vários detalhes deste conjunto de dados me fizeram repensar sobre esta dificuldade dos alunos em reconhecer se é necessário ou não colocar parênteses na digitação da fórmula de uma função. Inicialmente fui levada a este aspecto pelas dúvidas apresentadas pelos alunos, em vários momentos, um dos quais acabei de relatar. Em cada momento em que a dúvida surgia, eu tentava levar o aluno a pensar sobre as características e propriedades da função envolvida no problema, de modo que fosse possível decidir sobre a necessidade dos parênteses naquele caso. Foi o que tentei fazer, também, no episódio retratado pelo diálogo anterior: estimar o valor da $\sqrt{2}$ seria uma maneira de saber onde o gráfico da função $y = \sqrt{2}$ está localizado no plano cartesiano. Tal procedimento resolveu a dúvida neste caso específico. Este aspecto nos remete à

Pierce e Stacey (2001), uma vez que destacam a importância do conhecimento matemático no monitoramento do que se faz com o computador.

Algumas vezes os alunos digitavam a expressão da função, ou das funções, de várias maneiras, isto é, com e sem parênteses, e com estes colocados em lugares diferentes na expressão. Representavam graficamente e comparavam os gráficos. Se os gráficos se mostravam iguais, então, concluíam que os parênteses eram dispensáveis. Trata-se da experimentação, procedimento bastante utilizado pelos alunos na presença do computador. Em virtude do rápido *feedback* (BORBA; PENTEADO, 2001) e das possibilidades de visualização de gráficos (VILLARREAL, 1999; TALL; 1989) os alunos testam seus resultados e conjecturas continuamente.

Ao dizer: "–Tá vendo que dá diferente se eu colocar entre parênteses? É o que a gente estava discutindo." , a aluna mostrou que se lembrou que esta questão já havia sido tratada anteriormente e, de fato, havia mesmo. Em cada caso discutido buscávamos algum recurso específico àquele caso para nos apoiarmos na decisão sobre a utilização dos parênteses. Porém, a dúvida continuava a aparecer em outros momentos, em outras funções, e a aluna ainda não tinha condições de resolver este problema.

A pergunta feita, em seguida, pela aluna: "– E como é que eu vou saber, mesmo?" me leva a refletir sobre dois aspectos. Primeiramente, ela indica que colocar ou não os parênteses era sim, um problema, apesar de não estar explicitamente enunciado no roteiro do trabalho elaborado pelo professor. Tampouco estava entre os objetivos inicialmente definidos para os grupos de problemas propostos. Mas era um problema; afinal, não só a aluna participante do diálogo, mas os alunos em geral estavam diante de um dificuldade que precisavam e queriam resolver, mas não tinham os recursos imediatamente disponíveis para a resolução. Assim entendem Onuchic (1999) e Santos (2002). Um segundo aspecto que considerei é que a presença das expressões "como saber, mesmo" na pergunta da aluna, reforçada pela recorrência da dúvida, sugere que ela estivesse precisando de uma referência mais genérica ou, no mínimo, mais abrangente para utilizar nesses casos. Talvez uma regra, um processo, uma forma mais eficiente e geral sobre a colocação dos parênteses nas fórmulas das funções.

Ressalto que este problema surgiu porque os alunos estavam utilizando o computador. Assim, o problema inicial que consistia em esboçar gráficos de funções empregando o *Winplot* desencadeou um novo problema relativo à colocação dos parênteses na expressão que precisava ser, agora, digitada para obter o gráfico correto.

Esta também é uma característica dos ambientes informatizados: muitas vezes surgem questões em contextos que não eram previstos pelo professor e a aprendizagem se configura por caminhos inesperados (BORBA; PENTEADO, 2001; BENEDETTI, 2003).

O que seria necessário, então, para encaminhar a resolução? Entender melhor a "linguagem do computador" ou a linguagem do *software*? Será que o conhecimento dessa linguagem, aparentemente diferente da linguagem escrita, era a referência mais abrangente de que os alunos estavam precisando? Penso que as respostas a estas questões possam estar relacionadas às "confusões" entre a notação matemática convencional e a sintaxe do software, conforme nos advertem Pierce e Stacey (2001).

Foram essas indagações que me levaram a analisar com mais vagar as resoluções apresentadas pelos alunos, nos trabalhos. Fui buscar entender porque o *software* havia executado daquela maneira os comandos dados pelos alunos ao digitarem as expressões das funções da forma como fizeram, e que gráficos eram aqueles mostrados pelo computador. Embora nesta seção eu tenha trazido ao leitor os casos das funções raiz quadrada (Grupo 07) e das funções hipérbole (Grupo 08), em vários outros grupos de problemas ocorreu fato semelhante: a falta e a colocação inadequada dos parênteses geraram gráficos que não correspondem à representação da função solicitada no trabalho. Todos eles somaram subsídios às minhas análises.

Retomarei apenas uma função de cada um dos grupos de problemas apresentados anteriormente, começando por uma do grupo 07. Quando os alunos digitaram a expressão $2-3x\text{^}1/2$, o *Winplot* mostrou o gráfico de uma reta porque ele executou primeiro a potência x^1, em seguida multiplicou este termo pelo número -3, dividiu o resultado por 2 e, finalmente, a isto somou 2. Deste modo, o gráfico que exibiu foi o da função $y=2-\frac{3x^1}{2}$. Inserindo a expressão com parênteses (2-3x)^(1/2), a primeira operação considerada pelo computador seria a multiplicação de x pelo número -3, a este produto somaria 2 e elevaria tudo isso ao expoente $\frac{1}{2}$. O gráfico exibido seria, neste caso, o da função realmente solicitada no problema que era $y=\sqrt{2-3x}=(2-3x)^{1/2}$.

No caso do grupo de problemas 08, a sentença 2 - (1 / x+1), fornecida pelos alunos ao *software,* impõe: a divisão de 1 por x, a adição de 1 a este quociente, a multiplicação disto pelo número -1 (resultando em $-\frac{1}{x}-1$) e a adição de 2. Executadas nesta ordem, as operações levaram ao gráfico de $y = 2-\frac{1}{x}-1 = 1-\frac{1}{x}$. Se os parênteses tivessem sido colocados de modo diferente: 2 - 1 / (x+1), a adição de x com 1 iniciaria a seqüência de operações; esta soma dividiria o 1, em seguida o quociente obtido seria multiplicado pelo número -1 e acrescido de 2. O resultado corresponderia a $y = 2-\frac{1}{x+1}$, de acordo com o enunciado.

Percebi, afinal, que o *software* executa as fórmulas digitadas seguindo a hierarquia das operações matemáticas. De acordo com as leis da Álgebra, considerando expressões matemáticas envolvendo várias operações, sabemos que são efetuadas primeiramente as potências e raízes (obedecendo à ordem em que aparecem), depois as multiplicações e divisões (também na ordem em que aparecem) e, finalmente, as adições e subtrações (novamente, na ordem em que aparecem). Por exemplo, se queremos calcular a imagem de $x = 7$ na função

$$y = 5x-\frac{x^2}{7}$$

fazemos

$$y = 5.7-\frac{7^2}{7} \underset{\downarrow}{=} 5.7-\frac{49}{7} \underset{\downarrow}{=} 35-\frac{49}{7} \underset{\downarrow}{=} 35-7 \underset{\downarrow}{=} 28$$

Potência Multiplicação Divisão Subtração

Também é assim que o *Winplot* executaria as operações se lhe fornecêssemos a expressão $5x - x\verb|^|2/7$, assim escrita, horizontal e seqüencialmente, como é possível nesse ambiente.

Se essa ordem de execução precisa ser alterada, a linguagem algébrica convencionou que a ordenação seja feita através da utilização dos delimitadores, isto é, indicando as operações entre parênteses, colchetes e chaves, calculados nessa ordem. Suponhamos que a expressão anterior figure com os seguintes delimitadores:

$$y = 5\left[x-\left(\frac{x}{7}\right)^2\right]$$

Mantendo o valor x = 7, neste caso temos que calcular:

$$y = 5.\left[7-\left(\frac{7}{7}\right)^2\right] \underset{\downarrow}{=} 5.\left[7-1^2\right] \underset{\downarrow}{=} 5.\left[7-1\right] \underset{\downarrow}{=} 5.6 = 30$$

Divisão Potência Subtração Multiplicação

Então, para obter o gráfico desta função, no *Winplot* deveria ser digitado 5(x-(x/7)^2).

Este raciocínio algébrico responde à pergunta da aluna "– E como é que eu vou saber, mesmo?", sobre como digitar a expressão de $y = \sqrt{2}$ no *Winplot*. A presença dos parênteses na expressão digitada x^(1/2) é necessária para que seja executada primeiro a divisão de 1 por 2 e, em seguida, a raiz quadrada. Tal raciocínio também explica todos os erros que os alunos cometeram nos vários grupos de problemas do trabalho, incluindo os não apresentados aqui, e que envolvem funções exponenciais e modulares. Ele poderia ter sido adotado como a referência, como a regra geral de que os alunos precisavam para resolver os "problemas dos parênteses". Ou seja, respeitadas as especificidades próprias de sintaxe, a linguagem do *Winplot* não é totalmente diferente da linguagem matemática, mas é estruturada de acordo com as leis da Álgebra.

Estes dados mostram, portanto, situações em que, de problemas com objetivos explícitos de construção e interpretação de gráficos, surgiu a necessidade de pensar sobre, de retomar a forma como é estruturada e de utilizar a linguagem algébrica. Entendo que ele apresenta circunstâncias em que um problema algébrico emergiu de atividades de resolução de problemas com a utilização de um software gráfico, criando possibilidades de aprendizagem e aprofundamento das compreensões relativas a conteúdos de Álgebra. Considero relevante trazer, aqui, as colocações de Noddings (1989) relativas às sub-habilidades necessárias à resolução de um problema. A linguagem algébrica e a hierarquia das operações, supostamente, já deveriam ser dominadas por esses alunos. Se não apresentavam esse domínio, então a resolução dos problemas colocou em evidência essas "lacunas" de aprendizagem (CAMPBELL; 1996). De fato, as atividades de resolução de problemas fornecem, no entender também de Van de Walle (2001), importantes dados de avaliação que permitem ao professor partir de "onde o aluno está" e "não de onde o professor está".

Se os alunos dominavam a linguagem algébrica, mas não perceberam sua relação com a do software, então tiveram a oportunidade de desenvolver seu "*insight* algébrico", ou seja, a parte do sentido simbólico necessário para encontrar uma solução matemática para um problema formulado matematicamente e que, provavelmente, é afetada quando se faz Matemática utilizando tecnologia CAS, para Pierce e Stacey (2001), e *software* gráfico, neste caso. Ele inclui o que as autoras chamaram de expectativa algébrica, que envolve entre outros elementos:

1. o reconhecimento de convenções e propriedades básicas, por exemplo, das diferenças entre a linguagem matemática escrita à mão e a sintaxe dos CAS; e
2. a identificação de características-chave, por exemplo, de que a função quadrática tem um extremo. Em meu trabalho, este segundo aspecto se fez presente quando os alunos não perceberam que as funções dadas, envolvendo raiz quadrada, não podiam ser representadas por retas.

Esses elementos permitem aos alunos controlar e monitorar os resultados apresentados pelo computador. Eles se manifestam, ou não, nas atividades de resolução de problemas com a utilização desse recurso sendo, de qualquer modo, essenciais a esse contexto.

Além disso, quero novamente ressaltar o fato de que os problemas propostos pelo professor no trabalho, embora não fossem problemas abertos, conduziram a caminhos diferentes daqueles a que se propunham inicialmente, e que esses novos caminhos foram condicionados pelo recurso informático que utilizavam, o *Winplot*. Penso que estes exemplos apresentados devem ser vistos como problemas que, ao serem resolvidos no computador, criam oportunidades de aprendizagem de uma outra Matemática, ou seja, uma Matemática que envolve conteúdos diferentes daqueles a que, explicitamente, o problema se propõe a tratar.

Finalmente, quanto a este aspecto, considero conveniente salientar que alguns alunos esboçaram muitos gráficos sem perceberem seus erros e, muito provavelmente, não compreenderam o conteúdo que o professor realmente queria que aprendessem com aquele problema. Considerando o computador como uma autoridade, não pensaram no que estavam fazendo. A repetição de procedimentos não leva, necessariamente, à aprendizagem. Retomo, então, as considerações de Schoenfeld (1989): longas listas de exercícios, conduzem à constatação de que dominar os procedimentos formais da Matemática é diferente de aprender Matemática que, por sua vez, é diferente de pensar matematicamente. Da forma como entende esse autor, os alunos devem ser levados a essa terceira atitude, ou seja, a de pensar matematicamente. Por outro lado, alguns alunos participantes da pesquisa, perceberam que precisavam refletir sobre os "parênteses" para resolver os problemas, entre eles a aluna participante do diálogo apresentado. Esses realizaram valiosas reflexões e tiveram que "pensar matematicamente" e "dar sentido" ao que estavam fazendo.

6 - Considerações finais

Este trabalho contém parte das reflexões que foram desenvolvidas durante uma pesquisa de doutorado. As questões analisadas e discutidas aqui são de interesse de pesquisadores que investigam sobre tecnologias informáticas ou sobre resolução de problemas, tanto quanto de professores que almejam repensar e, quem sabe, renovar sua prática.

Para finalizar, gostaria de salientar que, embora a resolução de problemas seja uma constante no dia-a-dia de pesquisadores, professores e alunos de Matemática, é preciso refletir melhor sobre seus objetivos e formas de implementação; estenda-se isto às tecnologias informáticas nos ambientes de ensino. Espero que este trabalho contribua para esta reflexão.

Palavras-chave: software gráfico, lacunas de conhecimento algébrico, resolução de problemas.

Referências bibliográficas

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. A resolução de problemas e o uso do computador na construção do conceito de Taxa Média de Variação. *Revista de Educação Matemática*. São Paulo: SBEM. Ano 8, n.8, p.37-42. 2003.

BENEDETTI, F. C. *Funções, Software gráfico e Coletivos Pensantes.* 2003. 316 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2003.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. *Investigação Qualitativa em Educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994. 336p.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. *Informática e Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2001. 104p.

CAMPBELL, P. F. Characteristics of constructivist instruction. *Eighth International Congress on Mathematical Education,* Sevilha, Espanha, 1996. Handout.

NODDINGS, N. Preparing Teachers to Teach Mathematical Problem Solving. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds) *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989. p.244-258.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org) *Pesquisa em Educação Matemática*. São Paulo: Editora UNESP, 1999. cap.12, p.199-220.

PIERCE, R.; STACEY, K. Observations on Students' Responses to Learning in a CAS Environment. *Mathematics Education Research Journal*. **Local:editora??**. vol.13, n.1, p.28-46, 2001.

SANTOS, M. C. Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática. *Educação Matemática em Revista*, n.12, ano 9, p.11-15. 2002.

SCHOENFELD, A.. H. Problem Solving in Context. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds) *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Virginia: Laurence Erlbaum Associates, 1989. p.82-92.

TALL, D. Concept Images, Generic Organizers, Computers, and Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics*, Canada, n. 9(3), p.37-42, 1989.

VAN DE WALLE, J. A. Teaching Through Problem Solving. In: VAN DE WALLE, J. A. *Elementary and Middle School Mathematics*. New York: Longman, 2001. p.40-61.

VILLARREAL, M. E. *O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas*. 1999. 402 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 1999.