Realização SBEM 15 anos SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

O *LIVRO DOS LEMAS* DE ARQUIMEDES

Bruno Alves Dassie
Universidade Estácio de Sá
badassie@ig.com.br
Mario Luiz Alves de Lima
Universidade Estácio de Sá
mariolc1@uol.com.br

Introdução

Pouco sabemos a respeito da vida pessoal do célebre matemático grego Arquimedes. Nasceu em Siracusa, colônia grega na ilha da Sicília, em 287 a.C. Filho de Fídias, um astrônomo pouco conhecido, mantinha laços, se não de parentesco, pelo menos de amizade, com o rei Hiero II de Siracusa. Os fatos relacionados com vida e morte deste grande matemático estão repletos de exageros e dúvidas. Sua morte teria ocorrido durante um ataque a sua cidade, comandado pelo general romano Marcelo. Palavras e frases, de difícil comprovação são atribuídas ao matemático, como: "Eureka, eureka", conhecida do episódio da coroa real e também, "Me dê um ponto de apóio e moverei o mundo", durante seus estudos sobre alavancas. Suas invenções mecânicas são mais citadas pela história do que suas realizações em matemática, pois as mesmas foram usadas com grande efeito contra o cerco dos romanos (Heath, 1981, p. 16).

Todas as obras de Arquimedes são investigações originais e como afirma Heath (1981, p. 20), "*seus tratados são, sem exceção, monumentos de exposição matemática*". Assim, podemos considerar suas realizações como livros clássicos. Duas definições dadas por Calvino (1998, p. 10 e 14), expressam nossos sentimentos para com estas obras:

> "*Dizem-se clássicos aqueles livros que constituem uma riqueza para quem os tenha lido e amado; mas constituem uma riqueza não menor para quem se*

reserva a sorte de lê-los pela primeira vez nas melhores condições para apreciá-los"

e

"*Um clássico é um livro que vem antes de outros clássicos; mas quem leu antes os outros e depois lê aquele, reconhece logo o seu lugar na genealogia*".

As obras escritas por Arquimedes, preservadas em grego, podem ser classificas em três grandes grupos (Herrera, 1999, p. 57 – 59):

1 Obras cujo objetivo principal foi à demonstração de teoremas relativos a áreas e volumes de figuras limitadas por curvas e superfícies:

Sobre a quadratura da parábola
Sobre a esfera e o cilindro (em dois livros)
Sobre espirais
Sobre os cones e esferóides
Sobre a medida do círculo

2 Obras relativa a problemas de estática e hidrostática:

Sobre o equilíbrio das figuras planas (em dois livros)
Sobre o método dos teoremas mecânicos (conhecida como "O método")
Sobre os corpos flutuantes (em dois livros)
(Sobre a quadratura da parábola – proposições de 1 a 17)

3 Obras de miscelânea matemática:

O arenário
O problema dos bois

Algumas obras se extraviaram ao longo do tempo:

Os princípios da numeração
Sobre as alavancas

Da feitura da esfera

Poliedros semi-regulares

Métodos geométricos

Linhas paralelas

Triângulos

As propriedades dos triângulos de ângulos retos

Dados

O heptágono inscrito em um círculo

Sistemas de círculos tangenciais

Em particular, a leitura de obras como estas é interessante, pois "*o clássico não necessariamente nos ensina algo que não sabíamos; às vezes descobrimos nele algo que sempre soubéramos (ou acreditávamos saber) mas desconhecíamos que ele o dissera primeiro (ou que de algum modo se liga a ele de maneira particular)*" (Calvino, 1998, p. 12).

O *Livro dos Lemas*

Além dos textos gregos, temos o *Livro dos Lemas*. Segundo Aaboe (2002, p. 109) este livro "*foi preservado em uma versão latina da versão árabe de Thabit ibn Qurrah*" denominada *Líber Assumptorum*. De acordo com Heath (1981, p. 23), a obra em latim não pode ser autenticamente a de Arquimedes, pois seu nome é mencionado várias vezes no texto.

O livro contém "*elegantes proposições de geometria plana, relativas aos círculos e suas tangentes, tratando da quadratura de figuras idênticas às lúnulas de Hipócrates*" (Vasconcelos, 1925, p. 355). Destacam-se:

as proposições 4, 5 e 6 sobre os *arbelos* ou *faca de sapateiro*, onde ele utiliza a segunda proposição de sua obra a *Medida do Círculo*;

a proposição 8, solução dada por Arquimedes para a trissecção do ângulo envolvendo as construções *neusis*, isto é, a inserção de um comprimento dado;

a proposição 14, sobre o *salinon* ou saleiro, onde ele utiliza a proposição 10 do segundo livro dos *Elementos* de Euclides.

No *Livro dos Lemas*, como em outras obras de Arquimedes, "*em alguns momentos existe um certo mistério velando o caminho no qual ele chegou em seus resultados*" (Heath, 1981, p. 20).

A seguir encontram-se as proposições:

I - Se dois círculos são tangentes em A, e se BD e EF são diâmetros paralelos, então A, D e F estão alinhados.

II - Seja AB o diâmetro de um semicírculo, e seja uma tangente a ele em B e outra no ponto D que se encontram em T. Se traçarmos DE perpendicular a AB, e se AT e DE se encontrarem em F, então DF é congruente a FE.

III - Seja P um ponto no segmento de um círculo cuja base é AB, e seja PN uma perpendicular a AB. Tome D em AB tal que NA = ND. Se PQ for igual ao arco PA, e B e Q sejam unidos, os [segmentos] BQ e BD são congruentes.

IV - Se AB é o diâmetro do semicírculo e N um ponto em AB, e se semicírculos forem descritos no interior do primeiro semicírculo tendo AN e BN como diâmetros respectivamente, a figura contida entre as circunferências dos três círculos é denominada "faca de sapateiro", e esta área é igual a do circulo com diâmetro PN, onde PN é perpendicular a AB e encontra o semicírculo original em P.

V - Seja AB o diâmetro de um semicírculo, C um ponto em AB, e CD perpendicular a ele, e seja semicírculos descritos no interior do primeiro semicírculo e tendo AC e CB como diâmetro. Então, se dois círculos forem traçados tangenciando CD em diferentes lados e tangenciando os dois semicírculos, os círculos traçados serão congruentes.

VI - Seja AB, o diâmetro de um semicírculo, dividido por C tal que AC = $\frac{3}{2}$CB (ou qualquer razão). Descreva semicírculos no interior do primeiro semicírculo com AC e CB como diâmetros, e suponha um circulo traçado tangente aos três semicírculos. Se GH for o diâmetro deste círculo, ache a relação entre GH e AB.

VII - Se círculos forem circunscrito e inscrito em um quadrado, a circunferência do círculo circunscrito é o dobro da do circulo inscrito.

VIII - Se AB é uma corda qualquer do círculo cujo centro é O, e se AB for prolongado até C tal que BC seja congruente ao raio; se, além disso, CO encontrar o círculo em D e se prolongado encontrar o círculo pela segunda vez em E, o arco AE será congruente a três vezes o arco BD.

IX - Se em um círculo duas cordas AB e CD que não passam pelo centro se intersectam segundo um ângulo reto, então

$$(\text{arco } AD) + (\text{arco } CB) = (\text{arco } AC) + (\text{arco } DB).$$

X - Suponha que TA e TB sejam duas tangentes ao círculo, enquanto TC corte-o. Seja BD a corda por B e paralela a TC, e seja E a interseção de AD com TC. Então, se EH for traçado perpendicular a BD, ele bissecta o mesmo em H.

XI - Se duas cordas AB e CD, em um círculo, intersectam-se segundo um ângulo reto no ponto O, distinto do centro, então

$$AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2 = (\text{diâmetro})^2$$

XII - Se AB for o diâmetro de um semicírculo, e TP e TQ tangentes a ele de um ponto qualquer T, e se R for a interseção de AQ com BP, então TR é perpendicular a AB.

XIII - Se um diâmetro AB de um círculo encontrar uma corda qualquer CD, distinta diâmetro, em E, e se AM e BN forem traçadas perpendiculares a CD, então CN é congruente a DM.

XIV - Seja ACB um semicírculo tendo AB como diâmetro, e seja AD, BE congruentes ao longo de AB a partir de A, B respectivamente. Com AD, BE como diâmetros descreva semicírculos no mesmo lado de C, e com DE como diâmetro um semicírculo no lado oposto. Seja a perpendicular a AB passando por O, o centro do primeiro semicírculo, encontrando os semicírculos nos pontos C, F respectivamente. Então a área da figura limitada pelas semicicunferências de todos os semicírculos é igual a área do círculo tendo CF como diâmetro.

XV - Seja AB o diâmetro de um círculo, AC o lado de um pentágono inscrito, e D o ponto médio do arco AC. Una CD e prolongue até encontrar BA em E, una AC e DB encontrado em F, e construa FM perpendicular a AB. Então EM é igual ao raio do círculo.

A proposta do Mini-Curso

A proposta deste Mini-Curso é apresentar aos participantes as proposições acima listadas como as respectivas demonstrações dadas por Arquimedes e propor novas demonstrações para os problemas. Pretendemos estimular professores do Ensino Médio e do Ensino Superior a utilizar os problemas originais, ou melhor, os *clássicos*, como meio para enriquecer sua prática docente.

Enfim, como afirma Calvino (1998, p. 12), "*a escola e a universidade deveriam servir para fazer entender que nenhum livro que fala de outro livro diz mais sobre o livro em questão*".

Palavras Chaves: Arquimedes, Livro dos Lemas, História da Matemática, ensino de Matemática.

Referências Bibliográficas

AABOE, Asger. *Episódios da História Antiga da Matemática*. 2 ed. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

BOYER, Carl B. *História da Matemática*. 2 ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1996.

CALVINO, Italo. *Por que ler os clássicos*. São Paulo: Companhia das Letras, 1998.

HEATH, Thomas L. *The thirteen books of Euclid's Elements*. Chicago: Britannica, 1955. (Great Books of the Wstern World, 11).

_____. *The Works of Archimedes*, including *The Method*, by Archimedes. Chicago: Britannica, 1955. (Great Books of the Wstern World, 11).

_____. *A history of greek mathematics*. vol II. New York: Dover, 1981.

HERRERA, R. Alrededor. *Arquímedes: alrededor del círculo*. Madri: Nivola, 1999. (La matemática en sus personajens, 1).

VASCONCELOS, Fernando de Almeida e. *História das matemáticas antigas*. Lisboa: Aillard e Bertrand, 1925.