Realização
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ANÁLISE COMBINATÓRIA: UM ENFOQUE VOLTADO PARA ALUNOS E PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Augusto César Barbosa Dornelas
Universidade Federal Rural de Pernambuco
augustodornelas@ig.com.br

METODOLOGIA, LEVANTAMENTO DE DADOS, ANÁLISE, RESULTADOS E COMENTÁRIOS ACERCA DE PESQUISA DE CAMPO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino das Ciências - Nível de Mestrado- da Universidade Federal Rural de Pernambuco, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Educação no Ensino das Ciências - Área de Concentração: Educação Matemática.

Primeira Fase da Pesquisa de Campo

Para avaliar o grau de destreza dos alunos no tocante à resolução de problemas em matemática, especificamente em análise combinatória, foi realizada uma pesquisa de campo com alunos do 2º ano do ensino médio de duas escolas, sendo uma pública e outra particular, reunindo um total de 87 alunos entrevistados.

A pesquisa voltou-se para alunos do ensino médio em virtude de – tradicionalmente – o conteúdo ser abordado com maior ênfase nos 2º e 3º anos, conforme planejamentos escolares e a própria disposição dos autores de livros didáticos em restringi-lo a essas duas etapas do currículo escolar.

Foram aplicados dois questionários; num primeiro, buscou-se avaliar o nível de apropriação dos alunos com relação aos conceitos, vocabulário e aspectos relevantes concernentes ao estudo da análise combinatória. Num segundo, buscou-se avaliar a habilidade dos alunos em resolver quatro problemas simples envolvendo o conteúdo.

Os resultados obtidos não foram muito diferentes dos que obtemos cotidianamente em nossas salas de aula. Na ânsia de se ter uma “fórmula para tudo”, muitas vezes

elementos indispensáveis à resolução de problemas são negligenciados, tais como: estratégias, raciocínio, compreensão, analogias, ..., dentre outros.

A "construção" mecânica de conteúdos leva professores e alunos a abdicar da importância dos conceitos, definições, propriedades e princípios, se detendo nos simplifismos de algumas fórmulas que muitas vezes não se adequam à resolução porque o aluno não consegue discernir ao menos a que especificidade da análise combinatória o problema trata.

Os questionários aplicados foram os seguintes:

Alunos:

Questionário 1

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
MESTRANDO: AUGUSTO CÉSAR BARBOSA DORNELAS
PESQUISA DE CAMPO

Responda as seguintes perguntas:

1) O que você entende por análise combinatória?

2) Cite palavras ou expressões que o termo análise combinatória lhe faz pensar.

3) Além de ajudar a resolver problemas e desenvolver o raciocínio, que outros aspectos importantes ao estudo da análise combinatória você destacaria?

Questionário 2

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO
MESTRADO EM ENSINO DAS CIÊNCIAS
MESTRANDO: AUGUSTO CÉSAR BARBOSA DORNELAS
PESQUISA DE CAMPO

Você sabe contar?
Sem dúvida você respondeu afirmativamente a essa pergunta, pois qualquer pessoa alfabetizada sabe contar, e você, que é um aluno do Ensino Médio, sabe com bastante desenvoltura.
Já que você respondeu afirmativamente a nossa primeira pergunta, responda, então, às seguintes:
1) Quantos números formados por algarismos distintos existem entre 1.000 e 10.000?
2) De quantas maneiras podemos colocar cinco alunos na primeira fila de uma determinada sala-de-aula com cinco cadeiras?
3) Num grupo de dez alunos, de quantas maneiras podemos escolher três deles?
4) De quantas maneiras podemos arrumar em uma prateleira 4 livros de Matemática e 3 de Física, de modo que os livros de uma mesma matéria estejam sempre juntos?

Vejamos algumas tabelas estatísticas com os resultados obtidos.

TABELA 1 — RESULTADOS DE RESPOSTAS OBTIDAS NA PERGUNTA 1 DO QUESTIONÁRIO 1

1) O que você entende por análise combinatória?

Respostas/Palavras-chave	Quantidade de Ocorrências
Combinação	49
Arranjo	09
Maneiras	19
Fatoração	02
Possibilidades	23
Agrupamentos	17
Ordem	03
Raciocínio	06
Permutação	06
Resolução de Problemas	27
Repetição	02
Fórmulas	05
Contagem	05
Não sabe	02

TABELA 2 — RESULTADOS DE RESPOSTAS OBTIDAS NA PERGUNTA 2 DO QUESTIONÁRIO 1

2) Cite palavras ou expressões que o termo análise combinatória lhe faz pensar:

Respostas/Palavras-chave	Quantidade de Ocorrências
Fatorial	08
Combinações	68
Comparações	03
Probabilidades/Possibilidades	26
Arranjos	45
Permutação	29
Problemas	05
Agrupamentos	13
Maneiras	09
Repetição	01
Fórmula	03
Raciocínio	03
Contagem	07
Jogos	03

TABELA 3 — RESULTADOS DE RESPOSTAS OBTIDAS NA PERGUNTA 3 DO QUESTIONÁRIO 1

1) Além de ajudar a resolver problemas e desenvolver o raciocínio, que outros aspectos importantes no estudo da análise combinatória você destacaria?

Respostas/Palavras-chave	Quantidades de Ocorrências
Combinar	18
Fórmulas	03
Simplificações/Rapidez	06
Contas	01
Binômio de Newton	01
Ajuda na resolução de problemas	16
Organizar objetos/ordem/agrupamento	16
Curiosidades	01
Utilidade/dia-a-dia	19
Possibilidade	05
Aprendizado	01
Criatividade/Habilidade	02
Relação com outras áreas do conhecimento	07
Assunto interessante	01
Nenhum	05

Por intermédio da análise da tabela 1 nota-se que as palavras-chave contidas nas respostas dos alunos fazem parte do vocabulário comum dos livros didáticos, que são apropriados pelos professores e democratizados nas salas-de-aulas, onde, na maioria das vezes, levam a uma simplificação extremada dos conteúdos além de levá-los a memorizar princípios básicos e aplicá-los de forma mecânica a situações–problema que na maioria dos livros didáticos são praticamente idênticas, levando o aprendizado a condições dirigidas de aplicabilidade de um conjunto de fórmulas que geralmente servem como "receita" para situações-padrão-de-problemas, retirando possibilidades de argüição, de intuição, de estratégia e de raciocínio como formas relevantes para a compreensão e para a construção do conhecimento.

Apesar das três tabelas revelarem um certo censo comum entre as respostas obtidas para entendimento, expressões e aspectos relevantes para o tema Análise Combinatória, também nos revela a necessidade premente de revermos nossos métodos de ensino-aprendizagem como também de adequarmos nossos currículos a um aprendizado mais consistente e substancial de alguns conteúdos que, sem dúvida, têm uma maior aplicabilidade e receptividade positiva na questão do aprendizado enfatizado na resolução de problemas.

A apropriação, compreensão, interpretação e aplicação de conceitos, definições e princípios fundamentais, são relevantes para que se criem/construam nos modelos mentais, ramificações sólidas e interligadas que subsidiem a difícil – porém, necessária e motivante – tarefa de ter na resolução de problemas uma forte aliada à construção e ao desenvolvimento do conhecimento adquirido.

O questionário 2, como seqüência pedagógica do primeiro, procurou avaliar de forma metodológica como os alunos procediam para resolver problemas simples de análise combinatória.

Vejamos a tabela 4 que nos revela os totais de acertos e erros obtidos.

TABELA 4 – TOTAIS DE ACERTOS E ERROS OBTIDOS

Problema	Acertos	%	Erros	%
1	18	21	69	79
2	61	70	26	30
3	47	54	40	46
4	9	10	78	90
Total	135		213	

A tabela 5 foi montada no intuito de estabelecer uma relação entre a resolução com o uso de fórmulas ou com o uso de outro algoritmo no tocante a acertos e erros da tabela 4.

TABELA 5 — RELAÇÃO ENTRE A RESOLUÇÃO COM O USO DE FÓRMULAS OU COM O USO DE OUTRO ALGORITMO NO TOCANTE A ACERTOS E ERROS DA TABELA 4

	Acertos				Erros			
Problema	Fórmula	%	Outro	%	Fórmula	%	Outro	%
1	2	11	16	89	4	5	65	95
2	26	43	35	57	1	3	25	97
3	46	98	1	2	23	58	17	42
4	4	44	5	56	25	32	53	68
Total	78		57		53		160	

Pela análise da tabela 4, verificamos que houve um certo equilíbrio entre acertos e erros apenas na questão 3, um maior percentual de erros nas questões 1 e 4 e uma maior observância de acertos na questão 2.

Os dados da tabela 5, foram organizados de forma a nos fornecerem subsídios de como os alunos procediam ao procurar resolver cada um dos problemas propostos.

Como se pode observar, a utilização de fórmulas ficou evidenciada em 131 tentativas de resolução, onde 78 acarretaram acertos (59,5%) e 53 em erros (40,5%). Quanto a outros algoritmos e/ou estratégias perfizeram 217 ocorrências, das quais 57 resultaram em acertos (26,3%) e 160 em erros (73,7%).

As observações acima mostram um certo equilíbrio entre os totais de acertos e erros com o uso de fórmulas específicas e um desequilíbrio acentuadamente voltado para erros quando os alunos utilizam outros tipos de algoritmos ou estratégias para a resolução dos problemas apresentados; o que não nos deve levar a concluir que a utilização de fórmulas no trato de problemas de análise combinatória é mais produtivo quando utilizamo-las nas resoluções; já que o número de acertos utilizando outros métodos foi superior ao número de erros quando foi utilizada a fórmula.

A tabela também nos revela que boa parte das tentativas de resolução – sejam produzindo acertos, sejam produzindo erros – já enfatiza a utilização de algoritmos diversificados, além dos comumente usados em análise combinatória; o que nos leva a pensar que ao multiplicarmos as metodologias de resolução, estaremos potencializando o aparecimento de novas estratégias que irão priorizar a diversidade de métodos que

venham a somar diferentes meios de obtenção de resultados satisfatórios, que vão além do uso indiscriminado de fórmulas; que são necessárias, mas não suficientes na motivadora tarefa baseada na resolução de problemas.

Tanto com a utilização das tradicionais fórmulas de Análise Combinatória, como no uso de algoritmos diversos, houve a detecção de variados tipos de erros, onde os mais freqüentes podem ser categorizados e quantificados de acordo com a tabela abaixo:

TABELA 6 — PRINCIPAIS TIPOS DE ERROS E SUAS RESPECTIVAS QUANTIDADES

Tipo de erros mais freqüentes	Quantidades	(%)
1. Desconhecimento do Princípio Multiplicativo; também conhecido como Princípio Fundamental da contagem.	72	14,88
2. Conhecimento do Princípio Multiplicativo; mas, não havendo sua utilização em situações possíveis e adequadas ou mobilizá-lo de forma errônea ou incompleta.	119	24,59
3. Não atentar para o fato de que a ordem dos elementos nos agrupamentos a serem formados, poderá produzir agrupamentos distintos.	97	20,04
4. Não possuir habilidades no desenvolvimento de diferentes estratégias de resolução.	139	28,72
5. Incompreensão do enunciado da situação-problema apresentada.	20	4,13
6. Uso indiscriminado de fórmulas, provocando, em muitos casos, uma utilização incorreta das mesmas, por desconhecimento da distinção básica entre arranjos e combinações.	37	7,64
Totais	484	100

Cada item de "Erros Mais Freqüentes" da tabela foi minuciosamente observado; em todas as situações-problema apresentadas aos alunos; situações em que se pode, com certa facilidade, utilizar-se o Princípio Multiplicativo, como também fórmulas, como as de Permutação ou Arranjo (questão 2) e de Combinações (questão 3), na determinação dos resultados solicitados nos problemas.

Cada um dos tipos de erros listados reforça obstáculos à aprendizagem, seja ela de conotação cognitiva ou didática, contribuindo de maneira contrária para o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Sem prejuízo de deixarmos de levar em consideração os demais, os erros que mais reforçam o desenvolvimento de nossa pesquisa são os de número 1, 2 e 3; que atuando conjuntamente ou de forma isolada, bloqueiam a aprendizagem e criam novos obstáculos à seqüência didática dos conteúdos abordados pela Análise Combinatória.

O Princípio Multiplicativo, como elemento fundamental do pensamento combinatório e das atividades que envolvem contagem, é a "pedra fundamental" de todas as construções cognitivas posteriores, como as Permutações, os Arranjos e as Combinações. O seu desconhecimento ou a sua abordagem superficial trará dificuldades cognitivas importantes na sua aplicabilidade, no processo de resolução de problemas, como também na sua não mobilização em situações possíveis e necessárias. Sua utilização de forma errônea ou incompleta (tipo 2) ou o seu desconhecimento (tipo 1) trarão ou reforçarão obstáculos no discernimento cognitivo dos demais temas – como Arranjos e Combinações – causando, no aluno – incapacidades que refletirão na impossibilidade de, por exemplo, identificar quando a ordem em que os elementos estão dispostos num agrupamento, irá (caso dos arranjos) ou não (caso das combinações) influir no total de agrupamentos (subconjuntos) possíveis de um dado conjunto.

Nosso objetivo é oferecer uma seqüência didático-metodológica que facilite e conduza ao aprendiz a refletir, compreender e ser capaz de analisar situações-problemas onde se faça necessário mobilizar o pensamento combinatório; é torná-lo capaz de dispor de sua curiosidade, de suas faculdades inventivas, de seus conhecimentos adquiridos e de seu raciocínio concomitantemente, contribuindo dessa forma para uma ampliação individual e coletiva dos métodos de resolução de problemas, como linha didática de aprendizagem cognitiva, onde não só os conteúdos sejam importantes; mas também, a capacidade de mobilizá-los na maioria das situações onde se fizerem necessários, desenvolvendo habilidades e competências que são instrumentos imprescindíveis a uma capacitação intelectual e porque não citar, também, cidadã do aprendiz.

Se nos detivermos, sem desprezar os demais – como já fôra dito -, na análise dos três primeiros tipos de erros, veremos que (ver tabela) são responsáveis conjuntamente por cerca de 60% dos erros e omissões cometidas pelos alunos na resolução dos problemas apresentados; o que nos conduz a afirmar que com uma abordagem

sistemática, adequada e substancial do Princípio Multiplicativo, certamente estaremos contribuindo para o desenvolvimento de potencialidades cognitivas nos alunos, influenciando de maneira positiva não só em sua capacidade de aprendizagem dos conceitos de Arranjos, Permutações e Combinações (derivados do P. M.), como também no reforço de suas capacidades de mobilizar esses conceitos na aplicação à resolução de problemas.

Concentrando os dados obtidos em uma tabela que reúne métodos de resolução por intermédio do Princípio Multiplicativo e outros (fórmulas de arranjos, permutações ou combinações) em cada um dos problemas propostos, temos:

TABELA 7 — ACERTOS E ERROS UTILIZANDO O P. M. OU OUTRO MÉTODO

Problema	Solução obtida utilizando	Resultado obtido	Quantidades	% com relação ao processo utilizando	% com relação ao total de respostas para questões (87)	Quantidades totais de utilizações por problema	% utilizações por problema
1	PM	Acerto	16	35,5	18,4	45	51,7
		Erro	29	64,5	33,3		
	OUTRO	Acerto	--	--	--	42	48,3
		Erro	42	100,0	48,3		
2	PM	Acerto	31	94,0	35,6	33	37,9
		Erro	2	6,0	2,3		
	OUTRO	Acerto	28	51,8	32,1	54	62,1
		Erro	26	48,2	30,0		
3	PM	Acerto	--	--	--	12	13,8
		Erro	12	100,0	13,8		
	OUTRO	Acerto	48	64,0	55,2	75	86,0
		Erro	27	36,0	31,0		
4	PM	Acerto	5	14,7	5,8	34	39,1
		Erro	29	85,3	33,3		
	OUTRO	Acerto	4	7,5	4,6	53	60,9
		Erro	49	92,5	56,3		
Total			348			348	

Tabela 8 — Índice Percentual de Produtividade por Categoria de Utilização (IPP)

		% Utilização sobre total de respostas	Quantidade total de acertos	% de acertos por categoria de utilização	% de acertos c/ relação ao total de respostas (148)	Índice percentual de produtividade por categoria de utilização (*)
Utilização total do PM	124	35,6	52	41,9	14,9	41,85
Utilização total de outros	224	64,4	80	35,7	22,9	35,56
Totais	348	100,0	132			

(*) IPP = % de acertos sobre total de respostas dividido pelo % de utilização sobre total de respostas.

Na primeira tabela (7) procuramos organizar todos os dados relevantes da pesquisa, enfocando:

a) O método utilizado pelo aluno para obter solução ao problema proposto, fazendo uma distinção entre a utilização do Princípio Multiplicativo em comparação com outros processos, suas respectivas quantidades de acertos e erros, seus percentuais relativos à utilização de cada processo consigo mesmo e com relação ao total de respostas obtidas em cada problema.
b) As quantidades totais de utilização por problema proposto de cada um dos processos e suas respectivas relações percentuais.

A partir da Análise dos dados dispostos na tabela visualizamos nitidamente que, apesar do P.M. ter sido utilizado com maior freqüência apenas no problema 1, cerca de 38% das freqüências no problema 2, apenas 13,8% no problema 3 e aproximadamente 40% das respostas no problema 4 , evidenciando uma maior utilização de outros processos (geralmente as fórmulas tradicionais de Análise Combinatória); ainda assim obteve melhores resultados percentuais de acertos nas questões propostas 1,2 e 4, com percentuais de acertos de 18,4 (contra zero por cento de OUTRO), 35,6 (contra 32,1) e 5,8 (contra 4,6), respectivamente.

Outros processos utilizados só obteve maioria percentual de acertos na questão/problema 3 com cerca de metade (55,2%) de suas utilizações.

Na tabela 8 procurou-se analisar:

a) A utilização total de cada um dos processos (P.M. e outros) e seus totais de acertos.
b) Suas respectivas utilizações percentuais de utilização com relação ao total de respostas obtidas nos quatro problemas; como também suas participações percentuais de acertos com relação ao total de respostas obtidas com relação às suas próprias utilizações e ao total de respostas nos quatro problemas propostos (348).

Apesar do P.M. ter sido utilizado em apenas 35,6% das respostas obtidas (contra 64,4% de outros), obteve quase 15% de acertos no total geral (contra quase 23% de outros); uma diferença percentual de acertos de aproximadamente 8% contra uma diferença considerável de cerca de 29% de utilizações em prol de "outros".

Para que não fossem cometidos erros de análise pelo leitor menos desavisado, criamos o Índice Percentual de Produtividade por Categoria de Utilização (IPP), que é uma razão simples entre os percentuais de acertos e utilizações de cada processo envolvido com relação ao total de respostas; corrigindo, assim, possíveis erros de interpretação.

Obtivemos, portanto os índices de $41{,}85\%\left(\frac{0{,}149}{0{,}356}\right)$ para o Princípio Multiplicativo e de $35{,}56\%\left(\frac{0{,}229}{0{,}644}\right)$ para outros processos de resolução; o que, seguramente, dá uma vantagem comparativa significativa à utilização do P.M. como estratégia de resolução de problemas de Análise Combinatória, onde o mesmo possa ser aplicável, com relação a outros processos.

Decorre disto, a nossa pesquisa ser orientada no sentido de aprofundar o debate e promover uma abordagem quantitativa e qualitativamente didática deste poderoso processo de contagem, que não só simplifica os cálculos para a obtenção de estratégias e acertos; como também, por ser o elemento gerador de outros importantes conceitos em Análise Combinatória, como os de Arranjos, Permutações e Combinações.

Nossa pesquisa tem por objetivo, senão sanar, mas, ao menos minimizar erros de compreensão, planejamento e execução de estratégias que possibilitem uma aprendizagem significativa nos planos conceitual e metodológico a fim de dotar o

aprendiz de instrumentos didático-pedagógicos que o auxiliem na resolução de problemas de Análise Combinatória.

Segunda Fase da Pesquisa de Campo

Uma Segunda fase de nossa pesquisa de campo tem por objetivo responder a seguinte pergunta: Quais as conseqüências pedagógicas verificadas nos resultados obtidos pelos alunos quando são submetidos a uma aprendizagem intensiva do Princípio Multiplicativo?

Para implementar essa Segunda fase selecionou-se um grupo de doze alunos do 2º ano do Ensino Médio do Colégio Walt Disney, da rede particular de ensino.

Histórico de Procedimentos

1º dia: 04/09/03: APLICAÇÃO DE PRÉ-TESTE

2ºdia: 11/09/03: O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO A PARTIR DE SITUAÇÕES-PROBLEMA

3º dia: 15/09/03: RESOLUÇÃO E COMENTÁRIO DE SITUAÇÕES-PROBLEMA

4º dia: 18/09/03: SITUAÇÕES-PROBLEMA PROPOSTAS

5º dia: 23/09/03: SITUAÇÕES-PROBLEMA PROPOSTAS

6º dia: 25/09/03: PÓS-TESTE

Resultados obtidos com relação às respostas obtidas às perguntas e quanto às respostas aos problemas sugeridos:

Perguntas

1) O que você entende por Análise Combinatória?

a) Maneira mais rápida de resolver problemas de contagem = 2 alunos;

b) Análise de combinações = 2 alunos;

c) Maneira de encontrar resultados sem a necessidade de contagem de cada elemento = 4 alunos;

d) Parte da Matemática que analisa as possibilidades de se fazer algo, utilizando ou não fórmulas = 3 alunos;

e) Maneira de se estudar várias maneiras diferentes de organizar algo = 1 aluno.

2) Cite palavras ou expressões que o termo Análise Combinatória lhe faz pensar.

a) Combinações, maneira de combinar = 2 alunos;

b) Multiplicação = 3 alunos;

c) Contagem = 7 alunos;

d) Possibilidade = 4 alunos;

e) Grupos = 1 aluno;

f) Números, algarismos = 2 alunos;

g) Raciocínio = 2 alunos;

h) Maneiras = 1 aluno;

i) Lógica = 1 aluno.

3) Além de ajudar a resolver problemas e desenvolver o raciocínio, que outros aspectos importantes no estudo da Análise Combinatória você destacaria?

a) No dia-a-dia nas maneiras de se combinar objetos = 3 aluno;

b) Outros conhecimentos obtidos com soma e multiplicação = 1 aluno;

c) Obtemos possibilidades = 1 aluno;

d) Forma de relacionar os números = 1 aluno;

e) Facilitação da resolução de determinados problemas = 1 aluno;

f) Cálculo de estatísticas = 1 aluno;

g) Simplificação da contagem = 3 alunos;

h) Sem respostas = 1 aluno.

4) Você conhece o Princípio Multiplicativo, também conhecido como Princípio Fundamental da contagem? Em caso positivo, explique-o.

a) Maneiras de se calcular a combinação dos números;

b) Primeira fase da Análise combinatória;

c) Princípio da Matemática onde aplicamos a operação de Multiplicação para acharmos determinados resultados = 2 alunos;

d) Princípio que nos dá a probabilidade de uma determinada situação;

e) Contagem simplificada de grandes resultados;

f) Não = 6 alunos.

Problemas

1) Acertos = 7/12 = 58,3%;

2) Acertos = 12/12 =100%;

3) Acertos = 0/12 = 0%;

4) Acertos = 3/12 =25%.

Com relação às perguntas, que fazem parte da pesquisa, as respostas obtidas não diferiram significativamente das que foram dadas pelos alunos participantes da 1ª fase da pesquisa de campo.

Numa quarta pergunta incluída no questionário que indagava o aluno sobre o conhecimento do Princípio Multiplicativo, as respostas foram bem variadas, onde a que mais se aproxima é a de que é "Princípio da Matemática onde aplicamos a operação de multiplicação para acharmos determinados resultados, com duas ocorrências; e a presença de 6 respostas negativas, ou 50% das ocorrências.

Uma análise interessante com esta última pergunta é que das 6 ocorrências negativas obtidas, esses 6 alunos acertaram 50% dos problemas (3 alunos) e 25% (3 alunos) enquanto que, dos 6 alunos que explicitaram um conceito, pelo menos superficial do PM, 5 deles (83,3%) acertaram 50% dos problemas propostos e um (16,7%) acertou 75% das situações apresentadas; o que nos induz a indagar sobre a importância do P.M. na resolução de problemas de Análise Combinatória.

Com relação aos problemas aplicados, o número de acertos no 1º e 2º foi de 58% e 100%, respectivamente, no 4º de 25% e no 3º não houve ocorrência de acertos.

Convém ser registrado que em todas as respostas aos problemas, não houve nenhuma ocorrência de resolução via fórmulas; pelo contrário, em todas houve a utilização, mesmo que de maneira incorreta, do P.M., o que mais uma vez nos faz indagar sobre sua importância como seqüência didática para o aprendizado de resolução de problemas vinculados à Análise Combinatória.

Um primeiro grupo acertou 60% das questões (3 de 5), um segundo 70% (3,5 questões de 5 propostas) e um terceiro 80% (4 de 5 questões).

Dentro das limitações e das capacidades cognitivas inerentes a cada um, nota-se o empenho em resolver as situações-problema; seja por discussão em grupo, argumentações, tentativas, recorrências ao professor..., visualizando-se, já, algum progresso de aprendizagem.

Agora, vamos aos resultados do PÒS-TESTE: 2 alunos (16,7% do grupo) acertaram 50% das questões, 7 alunos (58,3% do grupo) acertaram 100% e 3 alunos (25% do grupo) obtiveram 75% de acertos. Veja-se o quadro abaixo.

TABELA 9 — QUADRO COMPARATIVO ENTRE O PRÉ E O PÓS-TESTE

Aluno	Pré-teste nº. questões certas	%	Pós-teste nº. questões certas	%
André Luiz	1	25	2	50
Armando	1	25	3	75
Daniele	1	25	2	50
Gabriela	2	50	4	100
Jorge Luiz	3	75	4	100
Carlos Alberto	2	50	4	100
Luiz Diego	2	50	4	100
Maiara	2	50	4	100
Mariana	2	50	3	75
Patrícia	2	50	4	100
Priscila	2	50	3	75
Thamirys	2	50	4	100

Mais uma vez, não houve o uso de fórmulas por parte dos alunos, o Princípio Multiplicativo foi utilizado em todas as respostas às situações-problema, acreditamos que devido à facilidade de seu manuseio e aplicabilidade a um considerável número de questões.

Vejamos esta outra tabela que relaciona número de alunos versus número de acertos, tanto no pré como no pós-teste.

TABELA 10 — QUADRO COMPARATIVO ENTRE O PRÉ E O PÓS-TESTE

Pré-teste		Pós-teste	
Nº alunos	Nº acertos	Nº alunos	Nº acertos
3	1	2	2
8	2	3	3
1	3	7	4

Uma outra forma de demonstrarmos o progresso numa e noutra situação, seria utilizando uma média ponderada para ambos os caso; ou seja:

$$M_{p,\,pré} = \frac{3.1+8.2+1.3}{12} = \frac{22}{12} = 1{,}83$$

$$M_{p,\,pós} = \frac{2.2+3.3+7.4}{2+3+7} = \frac{41}{12} = 3{,}42$$

Em termos absolutos vemos uma substancial vantagem de aprendizado, após o trabalho com o P. M.; em termos percentuais, houve um aumento de $\frac{3{,}42}{1{,}83} - 1 = 0{,}8688$,

o que nos dá um aumento de 86,88% entre as duas situações pesquisadas.

Portanto, não temos nenhuma exitação em afirmar que, o método didático do Princípio multiplicativo é de excelente qualidade e utilidade no trato de problemas vinculados à Análise Combinatória.

Mais uma vez, acreditamos e salientamos que uma utilização sistemática e didática do Princípio Multiplicativo no trato de problemas afeitos à Análise Combinatória, é pré-condição na resolução de situações-problema dirigidas ao tema, além de ajudar na compreensão dos conceito subseqüentes (Permutações, Arranjos e Combinações) que são variações didático-sequenciais obtidas a partir da utilização do P.M. em suas estruturações conteudinais , o que é facilmente observável pelos resultados obtidos, além dos acompanhamentos didático-pedagógicos em sala quando são estabelecidas conexões aos demais temas ligados à Análise Combinatória (Permutações, Arranjos e Combinações).

2. CONSIDERAÇÕES FINAIS/CONCLUSÕES

Muitos aspectos didático-pedagógicos foram analisados e discutidos exaustivamente durante as pesquisas e intervenções didáticas em sala de aula.

O desconhecimento do Princípio Multiplicativo ou uma apropriação inadequada de seus fundamentos básicos nos deu informações importantes no tocante a explicar boa parte do fracasso obtido em algumas situações analisadas. Já na segunda pesquisa, quando debatemos detalhadamente a importância de seu conhecimento na resolução de

problemas e na apreensão de outros conceitos e aspectos didáticos abordados pela Análise Combinatória – tais como Arranjos, Permutações e Combinações – os resultados obtidos reforçaram nossa crença de que a sua apreensão significativa depende de uma mudança de atitudes e orientações didáticas que propiciem aos alunos uma aprendizagem quantitativa e qualitativamente mais sustentável, que contribua para não só desmistificarmos como também motivarmos alunos e professores a trabalharem temas ligados à Análise Combinatória de forma mais natural, objetiva e produtiva.

Por tudo isso a nossa sugestão baseia-se na consolidação didática do Princípio Multiplicativo como instrumental de alto valor pedagógico, tanto com relação a resolução de problemas quanto na construção de uma seqüência didática que revele e estabeleça correlações e conexões com os conceitos básicos de Arranjos, Permutações e Combinações que norteiam o estudo da Análise Combinatória.

Desde o princípio, a nossa pesquisa se concentrou em três fatores básicos:

1) Caracterizar e identificar os diferentes tipos de erros cometidos pelos alunos e as diferentes estratégias utilizadas quando submetidos a resolução de situações-problema envolvendo Análise Combinatória.
2) Explicar o porquê desses erros acontecerem com relativa freqüência.
3) Oferecer sugestões para uma aprendizagem significativa no tocante à resolução de problemas de Análise Combinatória.

Com relação ao item 1, a identificação e a caracterização dos erros cometidos e as estratégias utilizadas pelos alunos, foram obtidas informações relevantes nas duas pesquisas desenvolvidas. Estas inserções no ambiente escolar nos propiciaram estabelecer um diagnóstico e realizarmos comparações e verificações acerca dos principais tipos de erros e estratégias, para subsidiar as tarefas concernentes ao item 2.

O segundo fator básico que influenciou nossos estudos foi de construir explicações, embasadas numa realidade observada pelas duas pesquisas, que servissem de instrumentos para determinar as condições nas quais se produz a apropriação do saber por parte dos alunos.

Para Ausubel, a aprendizagem se dá levando-se em consideração os conhecimentos prévios que o aluno apresenta (subsunçores) em sua estrutura cognitiva e a partir daí fazer com que os novos conceitos e idéias sistematizadas ancorem e possibilitem uma transformação e um desenvolvimento cognitivo que é resultado da fusão de conceitos a priori e a posteriori, que são construídos a partir da aprendizagem

e com a utilização de recursos didático-pedagógicos que podem e devem facilitar positivamente na reformulação cognitiva do aprendiz, passando de uma situação basicamente empírica para uma estruturação do conhecimento de forma mais elaborada e melhor adequada ao "rigor científico".

Desde cedo, todos nós somos imbuídos do desejo de classificar, juntar, contar, reconhecer conjuntos e seus elementos pertinentes; as operações de adição e multiplicação são inseridas em nossos contextos educativos formais e informais, nos - digamos - preparando para outras e novas formas de contar que são reflexos e são determinadas pelas experiências anteriormente vivenciadas, se tornando gradativamente mais complexas a medida que as novas construções vão sendo inseridas de forma adequada ao desenvolvimento cognitivo do aluno.

Essa interação entre as novas informações e a estrutura cognitiva já estabelecida no aprendiz, através do processo descrito por Ausubel por ancoragem, é feita de forma organizada, segundo uma hierarquia conceitual na qual elementos mais específicos de conhecimento são ligados e assimilados a uma estrutura conceitual mais geral, reformulando as abstrações das experiências dos alunos e ao passo que a aprendizagem começa a ser significativa os conhecimentos prévios (subsunçores) vão ficando mais elaborados e se tornando mais capazes de ancorar novas informações.

Através do uso de organizadores prévios que sirvam de âncora para novas aprendizagens e levem ao desenvolvimento de conceitos subsunçores, Ausubel visa manipular a estrutura cognitiva a fim de facilitar a obtenção de uma aprendizagem significativa.

Adequando a teoria ausubeliana aos nossos propósitos poderemos sugerir construções didáticas e procedimentos que venham a reconhecer os conhecimentos prévios que os alunos dispõem, estruturar a aprendizagem e procurar contribuir para que a aprendizagem significativa se dê de forma racional e abrangente; onde conceitos, procedimentos, reflexões e argumentações passem a fazer parte substancial da tarefa de ensino-aprendizagem.

Combinar, segundo Aurélio Buarque de Holanda (dicionário), significa juntar, reunir em certa ordem, dispor metodicamente, ordenar, acertar, ajustar. Ainda, segundo ele, Análise Combinatória se constitui na parte da Matemática que investiga o número de disposições possíveis dos membros de um conjunto nos seus diferentes subconjuntos.

A Análise Combinatória pode ser descrita ainda como o campo da Matemática que se ocupa de estudar, examinar, descrever e determinar as diferentes e possíveis

classificações que podemos obter e observar de um conjunto dado e de seus elementos constitutivos. Através de uma decomposição desse campo em suas diferentes partes constituintes, podemos proceder a uma análise metódica dos diversos tipos de problemas que envolvem o tema, dentre eles os de contagem (permutações, arranjos, combinações), os que tratam do número total de elementos na união de um número finito de conjuntos (Princípio da Inclusão e Exclusão), das Funções geradoras (que envolvem a seleção de objetos nos quais a repetição é permitida, em problemas da teoria aditiva dos números, especificamente na teoria das partições, das Relações de Recorrência (que partem da abordagem de problemas particulares para problemas genéricos), O Princípio de Dirichlet, também conhecido como da Casa dos Pombos ou das Gavetas (que procura determinar a existência ou não de conjuntos satisfazendo certas propriedades), as Permutações Caóticas (que procura determinar o número de permutações com os elementos de um conjunto dado, quando nenhum número se encontra ocupando seu lugar primitivo), os Lemas de Kaplansky(que busca obter de quantos modos é possível formar um conjunto de p elementos a partir de um outro com $\boldsymbol{n}$ elementos, $p \leq n$, no qual não haja números consecutivos) e o Princípio da Reflexão que procura estabelecer o número de trajetos possíveis de uma partícula no plano.

Como se pode verificar, é um número bastante amplo de situações que a Análise Combinatória engloba e que procura desvendar a partir das diferentes abordagens que o tema sugere.

Ora, as operações de adição e multiplicação e suas aplicações a situações diversas são subsunçores necessários para informações mais elaboradas que pretendemos introduzir, como as dos Princípios Aditivo e Multiplicativo que serão utilizados como ferramentas ou recursos didáticos que habilitarão os alunos a preparar e reelaborar sua estrutura cognitiva para a apreensão de conceitos subjacentes como os de Permutações, Arranjos e Combinações e na compreensão e determinação de suas fórmulas específicas e de suas distinções conceituais intrínsecas.

Por sua vez, os conhecimentos reelaborados e adquiridos irão subsidiar a apreensão dos novos conceitos e classificações de problemas abordados pela Análise Combinatória que foram descritos na página anterior.

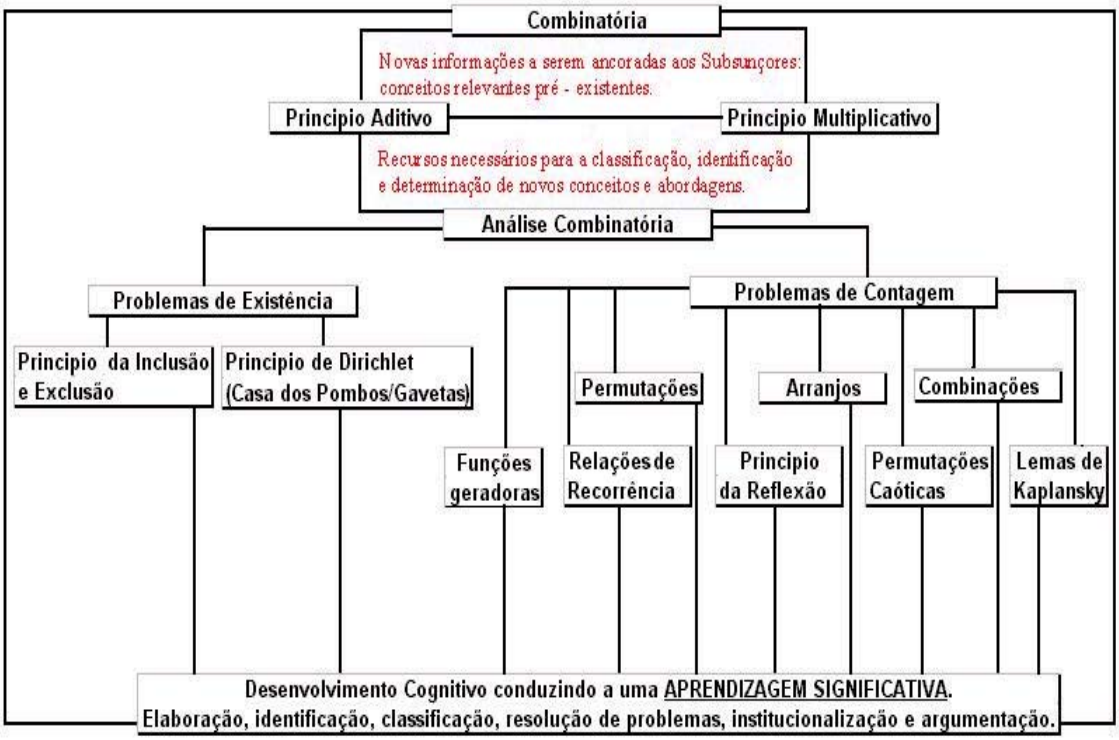
Através deste processo contínuo de elaboração e reelaboração de conceitos dentro da estrutura cognitiva do aluno, desenvolve-se não só seu arcabouço teórico como- através de uma utilização adequada e diversificada de processos de resolução de problemas – há um aprimoramento de competências e habilidades que se traduzirão por

meio de uma aprendizagem significativa do objeto de estudo que nos propomos abordar: a Análise Combinatória e à formação de um "pensamento combinatório" que seja capaz de capacitar o aluno a identificar as diferentes vertentes do tema e dotá-los de recursos necessários que possibilitem-no a resolver problemas conjuntamente com sua criatividade e engenhosidade.

A obtenção de uma aprendizagem significativa por parte do aluno é objetivo indissociável da formação de sujeitos cognitivamente aptos e suscetíveis de argumentação; só com uma preocupação constante e alicerçada em didáticas que sejam capazes de reconhecer dificuldades, diversidades e necessidades de aprendizagem se poderá construir e capacitar os alunos nos enfrentamentos pedagógicos a situações-problema que todos temos o dever, o direito e a satisfação de reconhecer e apresentar soluções.

De forma didática, poderíamos sugerir o mapa conceitual abaixo como meio de explicitar a classificação da evolução do pensamento combinatório necessário à obtenção de uma aprendizagem significativa, tão bem descrita por Ausubel.

Figura 1 — Mapa Conceitual da Análise Combinatória



Palavras-Chave: Princípio, Multiplicativo, Combinatória.

Bibliografia

1. MOREIRA, M. A.; MASINI, Elcie F. S. *Aprendizagem Significativa:* a teoria de David Ausubel. Ed. Moraes, 1982.

2. SANTOS, J. Plínio O. et al. *Introdução à Análise Combinatória*. São Paulo, Ed. da UNICAMP, 1995.

3. POLYA, George. *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de Janeiro, Interciência, 1995.

4. MORGADO, Augusto César de Oliveira et alli. *Análise Combinatória e Probabilidade*. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática, 2000.

5. PARRA, Cecília et al. *Didática da Matemática: Reflexões Pedagógicas*. Porto Alegre, Artes Médicas, 1996.

6. PUCHKIN, V. N. *Heurística: a Ciência do Pensamento Criador.* Rio de Janeiro, Zahar, 1976.