



EQUAÇÕES E EXPRESSÕES: UMA ANÁLISE DOS FATORES ENVOLVIDOS NA SOLUÇÃO DE ATIVIDADES ALGÉBRICAS

Luciane de Castro Quintiliano (UNICAMP – lucianecq@ig.com.br)

Introdução:

Podemos considerar que o estudo da álgebra permite a formação de um campo amplo e expressivo para o desenvolvimento da capacidade de abstração e generalização dos alunos, possibilitando-lhes a obtenção de uma poderosa ferramenta para resolver problemas.

De acordo com Garcia (1997), o que incentivou a expansão e a concretização da linguagem algébrica foi à procura e a necessidade de generalizações, tanto dos problemas aritméticos como dos problemas geométricos clássicos. Na solução de atividades algébricas tais como as equações, as expressões e os problemas, a escolha de estratégias de solução e o uso correto de operações são elementos fundamentais para um bom desempenho dos alunos nessas atividades. Carry, Lewis e Bernard (1980, citado em Lewis, 1981) sugerem que para solucionar um problema, dois procedimentos são fundamentais: primeiramente, o solucionador deve conhecer um conjunto adequado de operações corretas e, em segundo, o solucionador deve saber como selecionar uma manipulação apropriada, para utilizá-la em uma determinada conjuntura.

Os conceitos algébricos são introduzidos aos alunos nas escolas a partir de 12 anos de idade, sendo que esses conceitos estão intimamente relacionados a diversos conceitos matemáticos, como por exemplo, à geometria. Nesta etapa que precede a aritmética, dificuldades tanto de ordem cognitiva como afetiva podem ser encontradas nesses alunos e isto sugere que nesta transição, de acordo com Lins e Gimenez, (1997, p. 139), ambas devem estar mutuamente ancoradas, pois *a álgebra consiste em um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade.*

O pensamento algébrico a ser construído pelo aluno deve ser consistente, permitindo-lhes refletir e estabelecer uma relação entre o pensamento lógico e o raciocínio dedutivo, diante das situações-problema que possam surgir durante sua vida. Kieran (1996, p. 271-275), propôs em seu estudo que o pensamento algébrico é uma visão ampliada da álgebra, distinguindo-na da álgebra elementar tradicional. Concluiu ainda que pensar algebricamente pode ser definido *como o uso de uma variedade de representações para manipular situações quantitativas em um meio relacional*.

Considerando a importância dos conceitos acima narrados, entre outros que se destacam, o objetivo deste estudo é investigar as dificuldades encontradas por alunos em atividades algébricas, particularmente equações e expressões, visando identificar ainda os fatores relacionados a tais dificuldades, procurando estabelecer uma relação entre eles e o desempenho desses alunos quando os mesmos se encontram na última etapa da Educação Básica (3º série do Ensino Médio), a fim de criar subsídios e ferramentas que auxiliem os educadores na formação educacional.

O desenvolvimento do pensamento algébrico e alguns pressupostos teóricos

O pensamento algébrico tem sido estudado por vários autores, que abordam diferentes aspectos da aprendizagem da álgebra tais como a passagem do pensamento aritmético para o algébrico, a formação de conceitos algébricos, as estratégias de solução de problemas, dentre outros.

Pirola (1995), investigou a formação de conceitos geométricos, através das dificuldades encontradas pelos alunos do ensino fundamental em geometria. Posteriormente, em um outro estudo (Pirola, 2000), trabalhando com alunos de Licenciatura em Matemática do curso normal, observou a grande dificuldade que os sujeitos tinham em conceitos geométricos. Entretanto, as dificuldades na aprendizagem de conceitos algébricos também foram identificadas nesses alunos, mostrando que esse problema parece permear os diversos níveis do ensino.

O estudo de Utsumi (2000) enfocando atividades de solução de problemas algébricos procurou verificar se as atitudes em relação à Matemática estavam relacionadas às variáveis gênero, série e desempenho. Para tanto, utilizou como sujeitos os alunos de sexta, sétima e oitava série do ensino fundamental. Através dos resultados analisados a autora verificou que as atitudes em relação à Matemática estavam relacionadas à série e ao desempenho, e evidenciou também que os alunos encontravam

dificuldades nos estágios de processamento e retenção da informação durante a solução de problemas algébricos.

Um outro aspecto investigado por Loos, Falcão e Régnier (2001, p. 238), foi sobre a ansiedade durante a aprendizagem de matemática na passagem da aritmética para a álgebra com alunos do ensino fundamental (sexta e sétima séries). O estudo mostrou que *chega um momento em que o estudante de matemática deve ser introduzido em um novo campo conceitual como o da álgebra, por exemplo. Isso requer uma série de modificações em seus conhecimentos teóricos e práticos anteriores, bem como a aquisição de novas conceptualizações e competências. Essas novas aprendizagens geram desequilíbrio nas concepções já existentes, e as dificuldades surgidas podem refletir-se, no nível afetivo, em forma de ansiedade.*

Ainda, segundo Loos, Falcão e Régnier (2001, p. 258) *as dificuldades cognitivas e afetivas inerentes ao período de transição da aritmética para a álgebra parecem somar-se a obstáculos de origem didática: boa parte dos alunos apresentou uma certa ‘dificuldade de raciocinar’ sobre problemas, o que poderia estar relacionado ao pouco uso de problemas nas aulas de álgebra.*

Investigando o processo de generalização, importante para a solução de problemas algébricos, bem como as atitudes em relação à Matemática, Brito (1996) submeteu em seu estudo quatro estudantes da 8^a. série do ensino fundamental a uma série de problemas envolvendo a mudança gradual do concreto para o abstrato, aplicando ainda um questionário e uma escala de atitudes. A análise dos dados apontou que os estudantes investigados obtiveram um melhor desempenho nos problemas intermediários e encontraram dificuldades nos problemas totalmente abstratos, e ao comparar o desempenho durante a solução de problemas, o número de pontos obtidos na escala de atitudes e as notas em Matemática, permitiu a pesquisadora afirmar que os sujeitos demonstraram habilidades para trabalhar com os conteúdos matemáticos envolvidos.

O estudo de Sackur e Drouhard (1997), que examinaram como os alunos construía, gradualmente, algumas etapas do conhecimento envolvendo expressões e equações algébricas, verificou que eles aprendiam uma classificação de regras não relacionadas e não percebiam a existência de um princípio subjacente.

Dessa forma, observam-se as várias dificuldades com as quais os alunos se defrontam nos diversos níveis, e que estão relacionadas com situações algébricas. Dentre elas destaca-se o uso incorreto da propriedade do cancelamento em expressões

algébricas, a dificuldade em discriminar expressão de equação algébrica, o conceito sobre variáveis, dentre outros.

As dificuldades nos conceitos de álgebra também são encontradas em alunos do curso superior, como mostra um estudo feito por Ursini e Trigueros (1997) sobre o entendimento dos vários usos possíveis das variáveis. Os sujeitos foram universitários de um curso de Matemática. Os resultados deste estudo confirmaram que aprender e entender o conceito de variável é um processo lento e difícil para os estudantes, mesmo que a maioria deles seja capaz de reconhecer o papel das variáveis na solução dos problemas com expressões mais simples, pois se houver pequeno aumento na complexidade do problema, isto pode levar o aluno a fazer generalizações inadequadas e buscar uma solução através da memorização ou tentativa e erro.

De acordo com o que Miguel, Fiorentini e Miorim, (1992, pág. 40) salientaram em um estudo afirmando que *a maioria dos professores trabalha a álgebra de maneira mecânica e automatizada, dissociada de qualquer significação lógica, enfatizando simplesmente a memorização e a manipulação de regras, macetes, símbolos e expressões, tal como ocorria há várias décadas mostram que o seu ensino não tem recebido devida atenção.* Podemos inferir que talvez esse fator identificado pelos autores seja um dos elementos responsáveis pelo baixo desempenho dos estudantes nas atividades algébricas em níveis superiores.

Na Psicologia Cognitiva, vários trabalhos foram e estão sendo desenvolvidos por pesquisadores que buscam compreender os processos cognitivos responsáveis pelo processamento da informação na mente, e a forma através da qual as pessoas processam e representam mentalmente as informações quando interagidas com objetos de aprendizagem. Através desses trabalhos é possível que os educadores obtenham importantes informações sobre como ocorre o desenvolvimento dos processos cognitivos nos estudantes durante várias atividades, seja no âmbito escolar ou no cotidiano.

A habilidade para solucionar problemas matemáticos foi investigada por Krutetskii (1976), que propôs em sua teoria uma interpretação da estrutura de aptidão (prontidão) do sujeito para uma determinada atividade.

Krutetskii (1976, citado em Garcia 1995, p. 66), explica que o desenvolvimento das habilidades se realiza no processo de aquisição do domínio das destrezas, dos hábitos e do conhecimento adequado para uma atividade. O autor apresentou um resumo geral da estrutura das habilidades matemáticas durante o período escolar

utilizando os materiais coletados em sua pesquisa experimental e não-experimental, considerando os seguintes procedimentos conforme os quatro estágios básicos apresentados a seguir para a solução de problemas matemáticos. (Krutetskii, 1976; Brito, Fini e Neumann, 1994; Brito, 2000): 1) Obtenção da informação matemática; 2) Processamento da informação matemática; 3) Retenção da informação; 4) Componente geral sintético.

Nesse aspecto, questões sobre habilidade em álgebra foram tratadas por Lewis (1981), em um trabalho cujo objetivo era investigar as soluções produzidas por pessoas com diferentes níveis de habilidade e compará-las. Inicialmente, foi aplicado um jogo de problemas para alunos de diferentes níveis de habilidades, e posteriormente para os profissionais em Matemática que trabalhavam com álgebra elementar. Observando as estratégias escolhidas pelos alunos e pelos profissionais, e mais especificadamente atento ao uso das operações e aos erros praticados por esses, notou que o nível de desempenho dos profissionais não era cognitivamente diferente do que o dos alunos. E ainda, que algumas transformações dos procedimentos envolvidos nas operações algébricas não tinham nenhuma relação com a álgebra, indicando que habilidade em álgebra talvez possa ser chamada de habilidade para conduzir procedimentos em geral.

Sendo assim, é possível constatar a real necessidade de investigação da aprendizagem de conceitos algébricos, bem como do desenvolvimento do “*pensamento algébrico*”.

Dessa forma, apresenta-se o presente projeto como um mecanismo ou uma ferramenta para auxiliar na investigação dos fatores que estão envolvidos no desempenho dos estudantes na realização de atividades algébricas, notadamente as equações e expressões. No intuito de oferecer subsídios a tal trabalho investigativo, elaborou-se uma sondagem de conhecimento que reuniu um conjunto de atividades envolvendo tais conceitos. Após a coleta de dados, os resultados obtidos foram analisados e correlacionados, como será adiante demonstrado.

Sujeitos, Material e Procedimentos:

A pesquisa teve como sujeitos, 26 alunos da 3ª série do Ensino Médio, sendo última etapa da Educação Básica de uma Escola Pública de Bauru/Estado de São Paulo-Brasil.

O instrumento utilizado para a coleta dos dados foi um questionário informativo contendo questões a respeito da vida escolar dos sujeitos e uma prova do tipo lápis e papel com questões envolvendo os conceitos algébricos estudados por eles, no decorrer da vida acadêmica (equações e expressões), baseado em trabalhos realizados anteriormente pelo grupo de pesquisa sobre Psicologia da Educação Matemática (Brito, 1996; Spalleta, 1998; Alves e Brito, 1999; Brito, Lima, Rezi e Alves, 1999; Brito e Utsumi, 2000). Foi solicitado aos alunos que se eles não soubessem solucionar quaisquer das questões apresentadas que justificassem listando quais as dificuldades que encontraram para a realização da atividade.

Discussão e análise dos resultados:

Os resultados coletados neste estudo foram tabulados e analisados qualitativamente, a fim de melhor identificar os caracteres envolvidos nas dificuldades encontradas pelos estudantes na realização das atividades envolvendo conceitos algébricos.

A primeira questão do referido estudo solicitava aos alunos que descrevessem a diferença entre equação e expressão algébrica. Observamos que a maioria dos sujeitos não respondeu a questão, e que os estudantes que tentaram responderem erraram a resposta. Alguns alunos afirmaram que não se lembravam da diferença entre esses conceitos, conforme se verifica na tabela abaixo:

Tabela 1: Distribuição dos sujeitos de acordo com a resposta dada à questão 1.

| Resposta | Número de Alunos | % |
|------------|------------------|-------|
| Certa | 0 | 0 |
| Errada | 02 | 7,70 |
| Branco | 18 | 69,23 |
| Não Lembra | 06 | 23,07 |

Sendo assim, constatou-se a inexistência de acertos na resposta dessa questão. Cabe-nos ainda ressaltar que apenas dois alunos responderam a esta questão sendo que, um tratou o conceito de equação como uma igualdade, e o outro como uma equação do 2º. grau. E com relação ao conceito de expressão, esses mesmos sujeitos trataram o

conceito de expressão, um como uma igualdade e o outro como um conjunto de números que não podem ser resolvidos e que contém letras.

Foi possível detectar que além da aparente confusão feita pelos alunos entre expressão algébrica e equações, nos exercícios em que foram apresentadas equações e expressões algébricas, a maioria não conseguia solucioná-los. Alguns alunos utilizaram o mesmo argumento de que não se lembravam como os mesmos eram solucionados.

A segunda questão solicitava que apresentassem dois exemplos de equações e dois exemplos de expressões algébricas. Esperava-se, então os seguintes exemplos de respostas:

$$\frac{2x + 1}{2} \text{ (expressão algébrica)} \quad 3x + 5 = 10 \text{ (equação do tipo } kx+a=b), \text{ com } k \neq 0$$

2

As respostas foram categorizadas e os resultados apontaram um desempenho fraco e um alto índice de questões sem resposta. Apresentamos uma tabela referencial que busca traduzir numericamente os dados sobre o comportamento dos alunos ante a solução de problemas algébricos:

Tabela 2: Distribuição dos sujeitos de acordo com a resposta dada à questão 2.

| Idade | Nº de Alunos | % | Equações | | | | Expressões | | | |
|-------|--------------|-------|----------|-------|--------|------------|------------|-------|--------|------------|
| | | | Acertos | Erros | Branco | Não Lembra | Acertos | Erros | Branco | Não Lembra |
| 16 | 02 | 7,70 | 01 | | 01 | | 01 | | 01 | |
| 17 | 11 | 42,30 | 01 | 02 | 06 | 02 | 01 | 01 | 07 | 02 |
| 18 | 05 | 19,23 | | | 05 | | | | 05 | |
| 19 | 06 | 23,07 | 02 | | 03 | 01 | 01 | 01 | 03 | 01 |
| 20 | 02 | 7,70 | | | 02 | | | | 02 | |

Embora não possível no âmbito do presente estudo, a apreciação dos mais variados cruzamentos de dados e informações presentes no estudo da tabulação dos dados dos questionários, cabe aqui destacar alguns aspectos da análise do comportamento das respostas verificadas.

É importante observar o alto índice de questões sem resposta (em branco) e o fato de que também afirmaram que não se lembravam dos procedimentos de solução. Considerando que os conceitos (expressão e equação) são básicos da álgebra e que os

sujeitos estavam finalizando o ensino médio, pode-se afirmar que tal desempenho não é adequado e suficiente para a aprendizagem posterior.

Isso também possibilitou observar que a maioria dos alunos encontrava algum tipo de dificuldade relacionada a estes conceitos matemáticos, como por exemplo, a escolha de estratégias de solução e a utilização de propriedades algébricas extremamente importantes tanto para a simplificação de expressões como para o desenvolvimento de equações. As questões 3 e 5 solicitavam ao aluno encontrar valores para x sendo que, na questão 5, havia expressões e equações na forma de fração. Na questão 3 a maioria tentou solucionar os exercícios, dos quatro itens, somente no item B houve um considerável número de acertos, mas no item A nenhum acerto foi evidenciado na questão, e nos demais itens (C e D) a porcentagem de acertos não foi significativa. Enfatiza-se ainda as respostas dos alunos à questão 4 ao qual solicitava a simplificação das expressões e equações, quando possível, sendo que, o nosso interesse nesta questão foi o de verificar se os alunos utilizavam a propriedade do cancelamento corretamente, sendo obtidas as seguintes respostas: no item A a metade dos alunos que tentaram solucionar utilizou incorretamente o cancelamento, não havendo nenhum acerto nesse item. No item B, somente três dos alunos utilizaram a propriedade corretamente e no item C, D e E a maioria dos estudantes deixou a questão sem resposta. Observa-se, dessa forma, que os estudantes estavam terminando a última série do Ensino Médio e que tais dificuldades, quando não superadas, acabam persistindo nas séries subseqüentes, fato que dificulta a aprendizagem de conceitos que exigem um maior grau de generalização.

Conclusão:

Há inúmeras pesquisas envolvendo a investigação dos fatores que influenciam o desempenho dos estudantes no aprendizado da matemática, nos vários níveis de escolaridade. Nesse estudo constatamos, de acordo com os resultados obtidos, que os estudantes investigados que estavam finalizando o Ensino Médio, encontraram muitas dificuldades nas atividades algébricas propostas. Através da análise dos dados podemos concluir que os sujeitos com a idade adequada para a série deixaram uma grande quantidade de questões em branco. Sendo assim, podemos inferir que ao deixarem essas questões em branco não tentando responde-las, é um indicativo de que há necessidade do professor estar mais atento ao conhecimento que o aluno traz consigo referente às

séries anteriores, antes de prosseguir com o ensino dos conceitos mais avançados. Dessa maneira pretende-se evitar essa barreira que o estudante encontra durante a realização das atividades envolvendo conceitos algébricos.

A análise dos protocolos mostrou uma grande dificuldade, por parte dos sujeitos, na discriminação entre o conceito de equação e o de expressão algébrica. Esse fato pode estar relacionado ao tipo de ensino que os estudantes tiveram. Se tais conceitos são ensinados separadamente, muitos erros de generalização tendem a ocorrer. Dessa forma, a aprendizagem dos conceitos pode se tornar mecânica, uma vez que os mesmos são incorporados na estrutura cognitiva de forma arbitrária. O professor de matemática assume um papel importante de mediador e facilitador da aprendizagem na fase inicial do ensino da álgebra, que ocorre na segunda série do ciclo dois do ensino fundamental. É importante salientar que os cursos de formação de professores, inicial e continuada, priorizem o estudo da teoria do processamento de informação, possibilitando ao professor uma ampla compreensão dos processos cognitivos que ocorrem na passagem do pensamento aritmético para o pensamento algébrico, contribuindo, dessa forma, para uma aprendizagem significativa por parte dos estudantes.

Palavras-Chave: Álgebra – Desempenho – Procedimentos

Referências Bibliográficas:

- Brito, A. P. L. e Falcão, J. T. R. (1997). Early development of algebraic representation among 6-13 year old children: the importance of didactic contract. Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Edited by Pehkonen (Vol 2, pp.201-208). Lahti, Finlândia.
- Brito, M. R. F. (1996). Generalization in algebra problem solving and attitudes toward mathematics. Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematics Education: vol 1, 167. Seville: Program Committee of 20th PME Conference.
- Brito, M. R. F. (2000). Este problema é difícil porque não é de escola! A compreensão e a solução de problemas aritméticos verbais por crianças da escola fundamental. Temas em Psicologia da SBP. Revista da Sociedade Brasileira de Psicologia. Vol. 8 n° 1. Pp. 93-109.

- Brito, M. R. F., Fini, L. D. T e Neumann, V. J (1994). Um Estudo Exploratório sobre as relações entre o Raciocínio Verbal e o Raciocínio Matemático, Pró-Posições, Volume 13 [4], Pp. 37-44.
- Garcia, F. F. (1997). Aspectos históricos Del paso de la Aritmética al Álgebra. Uno – Revista de Didáctica de las matemáticas, 14, 75-91.
- Hudson, B. et al (1997). Na analysis of student talk in ‘re-learling’ algebra: From individual cognition to social practice. Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Edited by Pehkonen (pp.97-103, Volume 3). Lahti: Finlândia.
- Kieran, C (1996). The changing face of school algebra. 8 th International Congress on Mathematical Education. (pp. 271-275). Sevilla.
- Krutetskii, V. A. (1976). The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren. (Teller, J. (trad), Kilpatrick, J. e Wuirszup, I. (eds)). Chicago: University of Chicago Press.
- Lewis, C. (1981). Skill in Algebra. In J. R. Anderson (Ed.), Cognitive Skill and Their Acquisition (pp. 85-91). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.
- Loos, H., Falcão, J. T. R. e Régnier, N. M. A. (2001). A ansiedade na aprendizagem da aritmética para a álgebra (pp. 235-261). In Brito, M. R. (organizadora). Psicologia da Educação Matemática Teoria e Pesquisa. Florianópolis: Insular.
- Miguel, A., Fiorentini, D. e Miorim, A M. (1992). Álgebra ou Geometria? Para onde pende o pêndulo? (Vol 3, p. 40). Revista Quadrimestral da Faculdade de Educação Unicamp.Pro-Posições.Campinas: Cortez.
- Neumann, V. J. G. (1995). Um estudo exploratório sobre as relações entre o conceito de automatismo da teoria do processamento de informação de Sternberg e o conceito de pensamento resumido na teoria das habilidades de Krutetskii. Dissertação de Mestrado. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.
- Pirola, N. A. (1995). Um estudo sobre a formação de conceitos de triângulos e paralelogramos em alunos de primeiro grau. Dissertação de Mestrado. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.
- Pirola, N. A. (2000). Soluções de problemas geométricos: Dificuldades e perspectivas. Tese de Doutorado. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.

- Sackur, C e Drouhard, J. P. (1997). Algebraic expressions and equations: an example of the evolution of the notions. Edited by Pehkonen. (pp.12-119, Volume 4). Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Lahti: Finlândia.
- Skemp, R. (1980). Resolución de problemas en matemáticas. (p. 236, Cap. XIII). Psicología del aprendizaje de las matemáticas. Ediciones Morata. Madrid.
- Ursini, S. e Trigueros, M. (1997). Understanding of different uses of variable a study with starting college students). Edited by Pehkonen. (pp. 254-261, Volume 1) Proceedings of the 21 st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Lahti: Finlândia.
- Utsumi, M. C. (2000). Atitudes e habilidades envolvidas na solução de problemas algébricos: Um estudo sobre o gênero, a estabilidade das atitudes e alguns componentes da habilidade matemática. Tese de Doutorado. Campinas, Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas.