Realização SBEM 15 anos

VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

UMA SEQÜÊNCIA DIDÁTICA SOBRE "FUNÇÕES" PARA A FORMAÇÃO DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO

Profa. Dra. Edna Maura Zuffi
Departamento de Matemática – ICMC-USP
edna@icmc.usp.br

1. Introdução

Em pesquisas anteriores (Zuffi, 1999, 2003), analisamos a linguagem matemática utilizada por professores, em formação inicial ou já atuantes no Ensino Médio, ao expressarem suas concepções sobre "funções", através de respostas a um questionário, na abordagem deste tema[1] em sala de aula e após a seqüência didática que aqui discutiremos.

Nossa hipótese, anteriormente àqueles trabalhos, era a de que o professor, após ter tido um grande contato com o tema "funções" em disciplinas avançadas de Matemática que são geralmente encontradas nos cursos de Licenciatura (como Álgebra Linear, Álgebra Abstrata, Topologia e Análise), seria capaz de, no plano intrapsicológico, relacionar os conhecimentos vistos sobre "funções" e ampliar sua compreensão desse conceito matemático. Tendo lidado com esse tema sob enfoques diversos, nas disciplinas de graduação que compõem o que tradicionalmente se considera como uma boa formação inicial em Matemática, o professor seria capaz de criar uma linguagem autônoma e ampliada para comunicar seus conhecimentos a esse respeito e também para ensinar seus alunos no nível Médio.

No entanto, o que constatamos em nossa primeira pesquisa (Zuffi, 1999), foi que os professores analisados, apesar da formação que tiveram em disciplinas de graduação como aquelas citadas anteriormente, continuavam a apresentar grandes dificuldades de expressarem seus conhecimentos sobre funções sem a ajuda de um livro didático e, mesmo quando conseguiam fazê-lo, era através de uma linguagem matemática que

[1] Ao nos referirmos ao tema "funções", entendemos que este engloba tanto o conceito matemático de função, quanto as várias idéias periféricas (como domínio, imagem, gráficos, equações, expressões algébricas, tabelas, etc) e situações-problemas que possam estar relacionadas a este conceito. Assim, ao longo deste trabalho, ora estaremos nos referindo ao tema, ora ao conceito, para distinguir entre o conjunto amplo de idéias que se relacionam às funções, e a definição matemática geral de função, respectivamente.

trazia inconsistências com aquela usualmente aceita pela comunidade matemática e que se espera ser alcançada pelos alunos do Ensino Médio, pelo menos nas fundamentações básicas sobre o tema em questão.

Pareceu-nos, então, que a preparação de nossos professores para o Ensino Médio, nos cursos de Licenciatura, não tem alcançado sobre eles uma reflexão suficiente sobre os aspectos semânticos e sócio-culturais envolvidos na elaboração da linguagem matemática. E temos, então, dois fatos articulados: por um lado, uma linguagem utilizada por esses professores, para os alunos, que reforça o empobrecimento dos seus próprios conceitos e, por outro lado, a sua formação falha, no que diz respeito ao aprofundamento dos aspectos conceituais.

Foi neste cenário que propusemos a seqüência didática sobre funções, da qual trataremos aqui. Após tê-la desenvolvido junto a cinco alunos do final de um curso de Licenciatura em Matemática, analisamos se ocorreram mudanças significativas em suas expressões para o tema "funções", através da linguagem matemática. Esta análise foi relatada em Zuffi (2003), com um enfoque de investigação qualitativa (André, 1995). O nosso propósito, neste artigo, é o de discutir detalhes desta seqüência, a fim de que outros pesquisadores possam vir a utilizá-la, no intuito de adicionar novos resultados de pesquisa aos já constatados sobre "funções". Julgamos também que o conhecimento da mesma, e das reflexões que esta gerou com os licenciandos por nós pesquisados, possa ser útil ao desenvolvimento cognitivo e profissional de professores do Ensino Médio, para que possam abordar esse tema com seus alunos. Consideramos que ele é muito relevante para a formação matemática de qualquer indivíduo atuante na sociedade contemporânea, visto que envolve abstrações úteis a interpretar e resolver problemas relativos a fenômenos estudados em várias áreas do conhecimento humano, embora os processos cognitivos nele incluídos não sejam simples.

Assim, a escolha do tema "funções" mostrou-se bastante fértil, não apenas pelas várias possibilidades de notação simbólica existentes para este conceito, mas também pelos aspectos singulares de sua gênese na História da Matemática, e pela relevância científica e social que a ele se atribui.

São várias as possibilidades de representação da idéia de função: como conjuntos de pares ordenados, como tabelas, gráficos cartesianos, expressões algébricas, seqüências, diagramas com flechas, ou outros. Cada uma destas é mais apropriada ao contexto matemático, ou matematizado, em que se inserem. E ainda, cada uma pode pôr em evidência aspectos diferenciados do conceito. Por exemplo, ao se apresentar uma função em forma de tabela, pode-se olhá-la como uma transformação estática, onde os valores são levados, um de cada vez, aos seus relacionados. Uma vez determinada a representação desta tabela num gráfico cartesiano, pode-se ter uma idéia mais global da transformação que ela efetua, inferindo-se o comportamento da função estendida a valores que não estavam pontualmente representados de início, o que mostra a transformação de forma mais dinâmica. É claro que, no caso da representação gráfica, a apreensão pontual (um ponto de cada vez) também não se perde.

Quanto à gênese do conceito geral de função na Matemática, um estudo de seu desenvolvimento histórico (Zuffi, 2001) revela que esta se deu num processo longo e delicado, com a necessidade de contribuições de muitos matemáticos de renome, bem como das contribuições obtidas com o desenvolvimento das teorias de conjuntos e de construção de números reais.

Este conceito também se tem revelado de difícil assimilação por parte dos alunos, tanto no Ensino Médio, como no universitário. As investigações de diversos pesquisadores, como Dubinsky & Harel (1992), Sfard (1992), Sierpinska (1992), Meira (1993), Oliveira (1997), Vinner (1992), Machado (1998) e outros, têm mostrado que as idéias de variável, domínio, contradomínio e imagem, que permeiam a própria compreensão do conceito, já trazem grande complexidade para a aprendizagem dos alunos.

Quanto à sua relevância para a ciência, está evidente que, há um bom tempo, a utilização da idéia de função ultrapassa os campos da Matemática, estendendo-se à Física, à Química, Biologia, Economia e outras áreas do conhecimento, principalmente com o alto desenvolvimento tecnológico evidenciado na segunda metade do século XX. Podemos, ainda, destacar outros aspectos de sua relevância social, uma vez que seu conhecimento pode auxiliar na resolução de diversos problemas ligados ao mundo tangível, que nos rodeia a cada instante da experiência física, não ficando mais restrito ao “mundo das idéias”, como seria de se supor numa filosofia platonista para a Matemática (Davis & Hersh, 1986).

2. A Seqüência Didática[2]

Queremos esclarecer que a proposta aqui trazida teve como objetivo primeiro a ampliação do desenvolvimento cognitivo e da linguagem de professores de Matemática. Desse modo, ela não deve ser encarada como diretamente aplicável a seus alunos do Ensino Médio. A idéia é que ela amplie a percepção desse professor sobre "funções", para além daquilo que ele vai ensinar, de modo que possa ficar mais atendo à linguagem que utiliza com seus alunos e às sutilezas envolvidas nos significados dos entes matemáticos tratados dentro desse tema, ou ainda, sobre os processos de construção destes significados ao longo da História da Matemática e sobre como estes podem refletir sobre a construção de significados para si mesmo e para seus alunos.

Assim, caso o professor queira aproveitar esta seqüência didática, será conveniente que seja para promover reflexões pessoais que possam fornecer-lhe subsídios para, ele próprio, elaborar uma seqüência que julgue apropriada à realidade cognitiva, social, cultural e temporal de seus alunos, que fuja aos padrões enrijecidos ainda apresentados nos atuais livros didáticos, lançando mão, inclusive, de recursos tecnológicos, como calculadoras e softwares, caso julgue viável.

Também esclarecemos que a seqüência foi desenvolvida com o propósito de coletar dados para a pesquisa sobre as formas de utilização da linguagem matemática de futuros professores, ao expressarem suas concepções sobre "funções", antes e depois da aplicação da mesma (Zuffi, 2003). Desse modo, ela apresenta, num segundo momento, algumas atividades que tratam de temas recorrentes.

Aconselhamos, então, ao professor do Ensino Médio que venha a ter contato com este artigo, que procure responder às questões propostas, antes de ler os comentários que faremos sobre elas na terceira parte deste trabalho, para que sua reflexão posterior gere comparações com sua forma de pensar e de se expressar sobre "funções", antes e depois da seqüência ter seu desenvolvimento detalhado.

Ela baseia-se num questionário elaborado em pesquisa anterior com professores já formados e atuantes no Ensino Médio (Zuffi, 1999). A este questionário foram incorporadas duas perguntas trazidas por Marques, Santos & Castro (2001), em um minicurso sobre "Funções" que foi apresentado no VII ENEM. Tais questões tratam da

[2] Seqüência de atividades previamente elaboradas que visam o desenvolvimento de um determinado conceito ou conjunto articulado de idéias matemáticas, elaborada a partir das teorias sobre "engenharia didática" (Artigue, 1988, Douady, 1993).

ampliação do conceito para o espaço $\Re\times\Re$, como transformações de pares ordenados. Na investigação seguinte (Zuffi, 2003), com licenciandos, as respostas ao questionário foram usadas para um diagnóstico inicial e depois as mesmas perguntas foram utilizadas para desencadear discussões detalhadas sobre a temática.

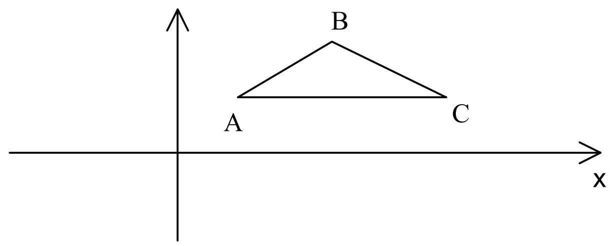
Além disso, foram apresentados aos alunos, oralmente e através de transparências, aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de função[3]. Procuramos promover uma reflexão sobre como a linguagem matemática que expressa as idéias relacionadas a este assunto foi-se desenvolvendo com o próprio crescimento da Matemática.

Questionário Aplicado:

1. *Dê uma definição informal para função.*
2. *Forneça uma definição matemática de função.[aqui foi explicado que deveriam escrever com o formalismo matemático]*
3. *Cite cinco exemplos quaisquer de funções.*
4. *O que significa escrever $y=f(x)$?*
5. *Na expressão $y=f(x)$, o que é o y? O que é x? O que é f ? Justifique sua resposta.*
6. *O que significa escrever $y=g(x)$? E $x=f(y)$? O que significa escrever $\omega=h(\theta)$?*
7. *Qual o significado de y nas expressões: $y=f(x)$ e $z=h(y)$?*
8. *$5x+4=0$ é uma função? Justifique sua resposta.*
9. *A expressão $5x+4$ é uma função de 1º. grau? Justifique.*
10. *$z=b^2y+c$, dados b, $c\in\Re$ e $b\neq0$, é uma função do 1º. grau? Por quê?*
11. *$f(a)=xa^2+ba+c$ é função? Qual é a variável independente? Qual a variável dependente? Explique.*
12. *$y^2+x^2=1$ é uma função? Justifique sua resposta.*
13. *$y^2-x^2=0$ é uma função? Por quê?*
14. *$y=3x^2+y^2+1$ é uma função? Por quê?*
15. *$y=5x+y^2+2$ é uma função? Por quê?*
16. *Se $a>0$, a função $f(x)=ax+b$ $(a, b \in\Re)$ é crescente? Por quê?*
17. *Se $a>0$, como é a concavidade do gráfico da função $g(x)=ax^2+bx+c$ $(a ,b, c \in\Re)$? Por quê?*
18. *Toda função tem domínio $\Re$? Justifique sua resposta.*
19. *Construa o gráfico da função f: $\Re\to\Re$, $f(x)=\sqrt{2}x+1$, atribuindo 5 valores a x.*
20. *Construa o gráfico da função f: $\aleph\to\Re$, ($\aleph$ = {0,1,2,3,...}), com $f(x)=3x-7$. Qual é a imagem desta função?*

[3] Detalhes podem ser vistos em (Zuffi, 1999), ou (Zuffi, 2001).

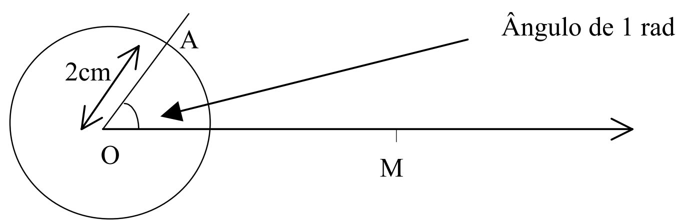
21. *Considere a transformação que leva os pares (x,y) em (x,-y), x,y$\in\Re$. Aplique esta transformação sobre os pontos do triângulo ABC do plano cartesiano abaixo.*



a) *Quais são as características da figura transformada em relação à de origem?*
b) *Esta transformação é uma função? Em caso afirmativo, qual seria a sua imagem?*
c) *Classifique esta transformação em translação, homotetia ou alongamento, simetria, projeção, etc.*

22. *Agora considere um sistema plano em que um par ordenado é representado da seguinte forma:*

a) *A primeira entrada do par determina um ângulo contado a partir da semi-reta OM (pode ser medido em radianos ou graus)*
b) *A segunda entrada do par determina o afastamento, com relação à origem da semi-reta (O) (pode ser medido em cm, p.ex.)*
c) *O ponto A=(1,2) (rad, cm), neste sistema, teria a seguinte representação:*



- *Desenhe, nesse sistema, o quadrilátero BCDE, onde B(30,2), C(45,5), D(180,2) e E(330,3), dados em graus e cm, respectivamente.*
- *Faça uma rotação de 60 graus neste quadrilátero, em relação à origem*
- *Esta rotação é uma função? Em caso afirmativo, quais seriam seus domínio e imagem?*

Após as respostas ao questionário e o tratamento histórico, passamos a discutir as razões pelas quais foram apresentadas exatamente estas perguntas e propusemos respostas possíveis a cada uma delas, comparando-as a outras que eram feitas pelos alunos e apresentando vários exemplos que pudessem ampliar suas concepções sobre as problemáticas levantadas.

Nossa seqüência didática prosseguiu com a retomada das definições de Dirichlet[4] e Bourbaki[5] para funções, com uma discussão sobre as influências que a Teoria dos

[4] Em 1837, Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805-1859), que sucedeu Gauss em Göttingen, propôs a seguinte definição geral de função, a qual foi amplamente aceita até meados do século XX: *"Se uma variável y está relacionada a uma variável x de modo que, ao se atribuir qualquer valor numérico a x,*

Conjuntos exerceu sobre a forma de linguagem matemática assumida nesta última. Esclarecemos que ela se estende a conjuntos que não são apenas de números reais e solicitamos aos licenciandos que fornecessem exemplos de funções não reais, ou não numéricas. Também mencionamos os casos do *Cálculo* em que trabalhamos com "função de função", por exemplo, uma função cujo domínio é o conjunto $\Im$={funções integráveis em um intervalo [a,b]}, onde $a<b$, $a,b \in \Re$, dada por $A(f)=\int_a^b f(x)dx$. Temos, neste caso, que $A:\Im \to \Re$ é uma função que associa a cada função integrável *f* em [a,b], o número obtido pela integral definida.

Dando prosseguimento à nossa seqüência didática, utilizamos o *software Winplot*[6] para explorar os casos de concavidade dos gráficos de funções do tipo $y=ax^2+bx+c, \text{com } a>0 \text{ e depois com } a<0$, e também os casos de crescimento e decrescimento das funções do tipo anterior e do tipo $y=ax+b$, fazendo variar os parâmetros *a,b* e *c,* em cada caso. Também visualizamos, através do software, gráficos de outras funções polinomiais e de funções racionais, do tipo $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$, onde *p* e *q* são polinômios. Após estas atividades, perguntamos aos alunos quais os resultados do *Cálculo* utilizariam para justificar os fatos observados empiricamente no computador, quanto ao crescimento e concavidade das funções, e nenhum deles foi capaz de mencionar resultados sobre as derivadas de 1ª e 2ª ordens para esta justificativa. Passamos, então, a uma breve justificativa para estes fatos, que pode ser encontrada formalmente em Guidorizzi (2001), Swokowski (1994), ou qualquer livro de *Cálculo* com qualidade.

Finalmente, encerramos nossa seqüência didática, solicitando aos alunos que refletissem e opinassem, por escrito, ao máximo que pudessem, sobre as questões abaixo:

i) Forneça: a) uma definição formal de função; b) uma definição informal

ii) Forneça cinco exemplos de funções

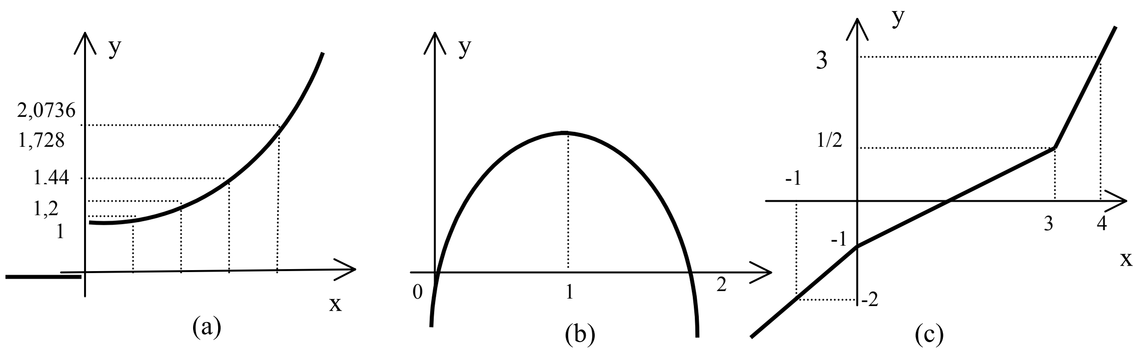
---

existe uma regra de acordo com a qual um único valor de y é determinado, então y é dito ser uma função da variável independente x". (tradução nossa)

[5] Uma função *"é uma tripla ordenada* (X,Y,f)*, onde* X *e* Y *são conjuntos e* f *é um subconjunto de* X×Y, *tal que, se* (x,y)∈f *e* (x, y') ∈f*, então* y=y'*"* (apud Sierpinska (1992, p.30), tradução nossa).

[6] Sugerimos ao professor que tenha acesso a esse software livre (busca em www.mat.ufrgs.br/~edumatec/software/soft.htm.) que experimente algumas das atividades aqui relatadas

iii) Dados os gráficos abaixo, eles representam funções? Em caso afirmativo, como chegar a uma "regra" que represente cada uma delas?



iv) Após esta seqüência de estudos, como você ensinaria "funções" para alunos do Ensino Médio? Quais os pontos principais sobre o assunto você destacaria para seus alunos? Quais métodos e recursos utilizaria?

Tal seqüência foi desenvolvida em 12 encontros semanais de duas horas, onde os cinco participantes aqui considerados estavam presentes.

3. A análise da seqüência e de alguns resultados de pesquisa

As perguntas propostas aos professores foram elaboradas em um processo dialético, a partir das observações preliminares realizadas com uma professora em sua sala de aula - e sua posterior revisão, com a análise das primeiras respostas fornecidas. Também foram levados em conta os estudos de alguns aspectos tratados nas pesquisas de Dubinsky & Harel (1992), Sfard (1992), Sierpinska (1992), Meira (1993), Oliveira (1997), Vinner (1992) e Machado (1998).

Com as perguntas (1) e (2), pretendíamos verificar como se dá a distinção, pelo professor ou licenciando, entre a linguagem matemática formal e os termos informais utilizados para expressar seu entendimento sobre o conceito. Como também ressalva Carvalho (2003, p.15,16), *" a escola vem se apropriando de alguns sistemas de registro que se constituem em diagramas que nem sempre contribuem para que a ressignificação necessária a aprendizagem escolar ocorra. Na utilização desses diagramas e registros intermediários, pode ocorrer que o rigor seja abandonado em nome do não formalismo, como se formalismo fosse sinônimo de rigor e abandonar um, obrigatoriamente implicasse em abandonar o outro"* . É preciso, então, que o professor se conscientize de que "informal" não significa desprovido de rigor; que, em muitas situações, podemos ser rigorosos, sem nos utilizarmos de uma linguagem matemática pesada, como aquela se encontra nos compêndios, apenas fazendo uso da linguagem natural e descrevendo corretamente todas as condições para a manutenção desse rigor.

Todos os sujeitos considerados nas pesquisas apresentaram problemas para expressarem, sem o apoio de um livro, uma definição formal e outra informal, para funções. Na maioria dos casos, não conseguiram deixar claro que não é qualquer tipo de relação entre elementos de dois conjuntos que se caracteriza como função.

A partir dos exemplos citados em resposta à questão (3), pretendíamos ter informações sobre as imagens mais imediatas que os professores fazem do conceito de função e sobre quais são os modos de representação mais característicos em suas concepções. A palavra 'quaisquer' foi colocada na pergunta, na tentativa de levá-los a pensar em exemplos os mais variados possíveis.

Todos os sujeitos observados forneceram, como exemplos espontâneos de funções, apenas aquelas estudadas no Ensino Médio. Estes se resumiam a funções polinomiais de 1º e 2º graus, função modular, exponencial, logarítmica e trigonométrica, o que nos fornece indícios de que a imagem do conceito (Vinner, 1991, 1992) que lhes vêm espontaneamente é aquela adquirida quando estudaram funções pela primeira vez, apesar de terem tido um longo aprofundamento sobre este tema, durante a sua formação universitária, no curso de Licenciatura em questão, e mesmo ainda estando em contato, naquele momento da pesquisa, com disciplinas que fazem uso ampliado dessa noção.

Com as questões (4) e (5), pretendíamos obter apontamentos dos professores que nos revelassem a sua compreensão sobre as notações abstraídas e utilizadas para representar o conceito de função, bem como sobre os significados atribuídos a cada um de seus componentes. Em resposta a estas questões, vários licenciandos identificaram o 'x' e o 'y', assim como os professores formados, com elementos <u>específicos</u> dos conjuntos de domínio e contra-domínio de uma função genérica, não fazendo nenhuma menção à idéia de variável.

Com (6) e (7), oferecemos a oportunidade aos sujeitos entrevistados de expressarem suas concepções mais profundas sobre as idéias abstraídas nas notações, independentemente de quais fossem as letras do alfabeto utilizadas para descrevê-las. Na questão 7, também esperamos obter informações sobre como os professores encaram a troca de papéis das notações 'x' e 'y'. Isto foi colocado porque, desde as nossas observações iniciais de caráter exploratório, vimos que os professores de Matemática não usavam outras letras para representar, respectivamente, as variáveis independentes e dependentes, que não fossem ‘x’ e ‘y’ (e nessa ordem). Analisamos que isto pode gerar lacunas na compreensão da idéia de dependência funcional, bem como dificulta relacionar o conceito de função em situações-problemas em que as variáveis têm significados contextualizados dentro de uma outra área (por exemplo, na Física, Química ou Economia) e onde elas recebem “nomes” (letras para representação) diferentes. (Por exemplo, em Física, é comum representarmos a relação de dependência do espaço em função do tempo, com ‘$s = s_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$’, num movimento uniformemente variado. Pode-se questionar se os alunos estabelecem conexão com o conceito de função, já que a variável dependente ‘s’ e a independente ‘t’ são “diferentes” daquelas usadas nas aulas de Matemática). Infelizmente, a insistência no uso exclusivo de ‘x’ e ‘y’ como variáveis foi constatada em nossas duas pesquisas (Zuffi, 1999, 2003). Em outras situações (resposta 7), o ‘x’ e o ‘y’ passavam a ser mencionados como os próprios conjuntos (mesmo usando-se letra minúscula).

Com as perguntas (8) e (9), esperávamos verificar como os professores fazem a distinção entre uma simples expressão algébrica, uma equação e uma função. A partir de suas justificativas, também pudemos ter informações sobre quais as propriedades que consideram essenciais para distinguir uma função de uma relação qualquer.

Com (10) e (11), pretendíamos obter expressões dos professores que caracterizassem os significados atribuídos às noções de constantes e variáveis, bem como de variáveis dependentes e independentes. Vimos que também houve dificuldades em reconhecerem o que é uma variável independente e a variável dependente, na resposta 11 (alguns consideraram que, na expressão $f(a)=xa^2+ba+c$, ‘c’ é a variável independente, confundindo a idéia de variável de uma função com o “termo independente” da expressão quadrática). Estas evidências nos levam a pensar que estes sujeitos ainda têm um apego às formas de expressão que lhes foram passadas no Ensino Médio, mais pautadas em concepções de ação (Dubinsky & Harel, 1992) para as funções, em que os símbolos ‘x’ e ‘y’ passam a ter significados dúbios, ora como um elemento específico dos conjuntos domínio e imagem, ora como os próprios conjuntos, sem se darem conta da idéia de variável que eles encerram.

Com as questões (12), (13), (14) e (15) investigamos os professores sobre a possibilidade de inversão dos papéis de ‘x’ e ‘y’, bem como sobre a possibilidade de determinação de restrições aos conjuntos de domínio e contra-domínio, para que as expressões dadas nas perguntas representem funções.

Os resultados observados nas perguntas (16) e (17) são freqüentemente tratados no ensino médio e oferecem uma boa oportunidade para se refletir sobre estas funções como processos de transformação. Gostaríamos, então, com as respostas dos professores, de verificar se isto se passa em suas concepções, através dos argumentos utilizados para justificar tais resultados. Entretanto, observamos que nenhum dos sujeitos conseguiu justificar os resultados sobre crescimento e concavidade de funções polinomiais de 1^o e 2^o graus.

Com a questão (18), esperávamos verificar o quanto da generalidade apontada nas definições usuais para funções está presente nas concepções dos professores; se estes identificam ou não, as possibilidades de funções definidas em conjuntos não-reais, ou não numéricos, e quais destas possibilidades são mais freqüentes.

Como a expressão algébrica que determina a função na pergunta (19) tem uma constante irracional, gostaríamos de verificar sobre a possibilidade de aparecem também números irracionais nos valores atribuídos à variável independente (por isso solicitamos 5 deles, e não apenas dois), uma vez que o domínio em questão é $\Re$. Esta pergunta foi proposta porque constatamos, em nossas observações iniciais de sala de aula (Zuffi, 1999), que os professores, apesar de lidarem com o conjunto $\Re$, na grande maioria das vezes, utilizavam-se apenas de números inteiros e pouquíssimas frações como exemplos, e nunca de irracionais. A tentativa de simplificar cálculos fazendo aparecer somente números inteiros, atribuídos a funções de domínio e contra-domínio reais, ocorreu tanto com os licenciandos quanto com os professores observados.

A pergunta (20) foi proposta para verificarmos como os professores lidam com o discreto (domínio N= {0,1,2,3...}), numa expressão de função que é usualmente explorada em domínio contínuo ($\Re$). Assim como os professores já formados (e na mesma proporção encontrada em nossa pesquisa anterior), encontramos três, dentre os cinco alunos pesquisados, que tiveram problemas com o gráfico e com a imagem de uma função de domínio discreto – ou desenharam gráfico contínuo, ou não conseguiram expressar seu conjunto imagem, ou ambos. Isto parece ser fato revelador de um automatismo ligado à noção de função, em que os conjuntos numéricos sobre os quais ela está definida, são sempre não-discretos (em geral, intervalos da reta real $\Re$), de modo que nem todos os alunos conseguiram observar que a notação, naquele caso da questão (20), se referia ao conjunto domínio como sendo os números naturais.

As questões foram colocadas uma a uma, para os professores ou licenciandos, na ordem em que aparecem aqui listadas, e foram respondidas por escrito. Foi esclarecido, de antemão, que os sujeitos deveriam procurar apontar todos os conhecimentos que tivessem sobre o conceito, e não apenas aquilo que ensinavam em sala de aula. O tempo de resposta de cada pergunta ficou a critério dos entrevistados, de modo que estes puderam ficar bastante à vontade para acrescentar o que quisessem.

Não nos preocupamos em apontar o número exato de vezes que ocorreram os resultados acima, uma vez que nossa preocupação é a análise qualitativa dessas ocorrências. O que mais nos interessa é que estes fatos são sempre recorrentes, nas salas de aula observadas, com os professores formados, ou com os licenciandos.

Apesar das semelhanças encontradas nas respostas de professores e licenciandos, estes últimos mostraram, apesar das dificuldades com a definição de função, uma melhor caracterização da idéia de relação envolvida no conceito e também melhor distinção entre função e equação, além de uma maior familiaridade com a simbologia matemática. (respostas 8,9,10 e 11). Todos apresentaram certo problema com a questão (14), por dificuldade de cálculo e determinação da existência de solução de uma desigualdade. Uma outra diferença encontrada foi que, ao serem solicitados exemplos de funções cujo domínio não fosse real (questão18), além dos usuais exemplos de funções definidas em subconjuntos de $\Re$, já encontrados com os professores do Ensino Médio, quatro licenciandos conseguiram mencionar a existência de funções definidas no conjunto dos números complexos, ou ainda, em $\Re^2$, $\Re^3$,..., $\Re^n$. Note-se que esta resposta foi motivada pela pergunta explícita se existiriam funções cujo domínio não fosse real. Nos exemplos que eles forneceram antes, espontaneamente, estas considerações não apareceram.

Em resposta às perguntas 21 e 22, que tratavam de funções definidas com domínio e imagem em $\Re^2$, quatro, dentre os cinco licenciandos, conseguiram reconhecer as transformações dadas como funções.

Estas últimas considerações fornecem indícios de que pode ser confirmada a nossa suposição, feita em Zuffi (1999), de que o distanciamento no tempo, dos professores formados, em relação a seus cursos universitários, e a própria cultura escolar que eles vivenciam no Ensino Médio, vão “enxugando” suas concepções e sua capacidade de expressão para o conceito de função.

Após o desenvolvimento da seqüência didática com os licenciandos, perguntamos se esta foi capaz de auxiliá-los na ampliação de suas concepções, para além daquelas que eles próprios adquiriram em sua formação anterior, no Ensino Médio ou universitário. Em geral, observamos que os alunos tentaram responder às questões propostas, depois do desenvolvimento da seqüência didática, com uma preocupação maior quanto à linguagem matemática que estavam empregando para o tema e melhoraram alguns aspectos de sua expressão. Mas ainda vemos que houve um baixo nível de aproveitamento das informações que lhes foram passadas.

Por exemplo, três alunas apresentaram melhora em suas definições, ainda que com certas restrições (uma definiu formalmente somente funções cujos conjuntos domínio e contra-domínio são espaços vetoriais; a outra considerou, em sua definição informal, apenas a idéia de relação, sem observar nenhuma característica que torna a relação como função). Também houve ampliação do tipo de exemplos citados espontaneamente, depois da seqüência didática (uma aluna menciona a existência de funções contínuas e diferenciáveis, apesar de não fornecer exemplos explícitos para as mesmas; outra cita os exemplos canônicos, mas incorpora uma função de variável complexa; uma terceira fornece os exemplos mais ampliados, com transformações em $\Re^2$, funções com domínio dado por um conjunto de matrizes e também exemplo de seqüência numérica (P.A. e P.G.) como função definida de $\aleph \rightarrow \Re$.

Todos os licenciandos apresentaram problemas com o item (b) da questão (iii), proposta após a seqüência, deduzindo que se tratava de uma função quadrática, sem questionarem a impossibilidade dessa dedução, por faltarem maiores informações no gráfico. Isso parece indicar que ainda não conseguiram desapegar-se das imagens conceituais para funções que desenvolveram no Ensino Médio, uma vez que o gráfico dado poderia ser de uma função do tipo polinômio de grau 4.

As respostas à última questão (iv) mostraram que todos tentaram incorporar, em seus discursos pedagógicos, pelo menos algum dos pontos que foram discutidos durante o desenvolvimento de nossa seqüência didática. Uma aluna mencionou a história da evolução do conceito e também uma preocupação (ao menos em nível discursivo), com a aquisição de significados, por parte de seus futuros alunos. Houve outra que parece ter incorporado mais as idéias tratadas na seqüência didática, pois destacou preocupações em trabalhar, para funções reais, valores que não sejam somente números inteiros, mencionou o reconhecimento de uma ligação da idéia de função com a de seqüências numéricas, e de como Progressões Aritméticas ou Geométricas podem ser vistas como casos particulares de funções restritas ao domínio dos números naturais. Ela também mencionou preocupação com o uso de software, calculadoras e papel quadriculado para explorar o conceito e, principalmente, os gráficos de funções.

4. Conclusão

Podemos observar que, embora os discursos usados pelos licenciandos, no momento posterior ao desenvolvimento da seqüência didática, tenham incorporado reflexões que foram desencadeadas por ela, notamos ainda um apego à tradicional seqüência do Ensino Médio para o tratamento de funções: primeiro se deve falar da definição, depois das funções afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas – e não se deve esquecer de dar exemplos do cotidiano, mesmo que estes apareçam somente no final do tratamento de cada um destes tipos de funções. Nenhum deles foi capaz de pensar no uso dos exemplos cotidianos para exprimir relações das mais diversas possíveis, <u>antes de se falar em uma definição formal de funções</u>. Ou ainda, poderia ter-se imaginado, como foi discutido durante a seqüência didática, a exploração computacional dos gráficos de funções mais elaboradas do que aquelas mencionadas acima, <u>antes</u> de se definir explicitamente funções afins, quadráticas, etc. Com isso, as imagens conceituais para funções poderiam ser ampliadas e este conceito não ficaria associado, na mente das pessoas, apenas às suas formas mais simples.

Outra questão, que foi discutida ao longo de nossos encontros, foi que o conceito de função não deveria ser isolado a um dado momento do Ensino Médio, como geralmente ocorre, na sua primeira série. Ele poderia ser tratado em uma proposta de desenvolvimento em espiral, onde definições formais próximas às de Bourbaki e Dirichlet, que são geralmente apresentadas nos livros didáticos na primeira página de abertura do capítulo sobre “funções”, poderiam ser dadas em séries posteriores do Ensino Médio, após a exploração de várias situações em que a noção informal (mas não menos precisa) tivesse sido desenvolvida, a partir de situações cotidianas, ou mesmo ligadas a problemas da Física, Química, Biologia e outras áreas do saber.

Percebemos que os licenciandos observados conseguiram um bom nível de abstrações, dentro das disciplinas formais que cursam em sua licenciatura, mas evidenciaram pouca capacidade de fazer ligações dessas abstrações em temas unificadores, como podemos notar para o caso de "funções".

Fatores relativos à implementação da seqüência didática também podem ter pesado para o estabelecimento do quadro analisado, como por exemplo, o distanciamento dos encontros, os quais eram realizados apenas uma vez por semana, diluídos ao longo de um semestre, sem que propuséssemos atividades intermediárias que reforçassem as reflexões junto aos alunos.

Não podemos concluir que a nossa seqüência teve êxito, ou tenha falhado definitivamente, na tentativa de alertar os futuros professores sobre a construção de sua própria linguagem matemática e de fazerem avançar seus conhecimentos sobre "funções". Acreditamos que o objetivo de promover uma reflexão profunda sobre o conceito foi atendido com tal seqüência, embora não tenhamos conseguido ampliar significativamente as formas de expressão matemática desses alunos.

Esperamos, assim, que a seqüência aqui discutida possa contribuir com outras formas de análise sobre a linguagem matemática dos professores, ou futuros professores, bem como para a melhoria de sua formação profissional, com relação ao tema "funções".

Palavras-Chaves: funções, professores, seqüência didática

Referências Bibliográficas

ANDRÉ, M.E.D.A. (1995). *Etnografia da Prática Escolar,* Papirus, Campinas, SP.

ARTIGUE, M. (1988). *Ingénierie Didactique.* Recherches en Didactique des Mathematiques, Paris, Université Paris, v.9, no.3, p.281-308.

CARVALHO, D. L. de. *A Linguagem Matemática Escolar nas Reminiscênciasde Alunas Adultas.* GT-9, Anais do II SIPEM, Santos, SP: SBEM (publicação completa em CDR e no Livro de Resumos, p. 130).

DAVIS, P. & HERSH, R. (1986). *A Experiência Matemática,* Trad. João B. Pitombeira, Ed. Francisco Alves, Rio de Janeiro.

DOUADY, R. (1993). *L´Ingénierie Didactique*. Cahier de DIDIREM, no.19, jan/93, IREM, Université –Paris- VII.

DUBINSKY, E. & HAREL, G. (1992). *The nature of the process conception of function*, in "The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy", Dubinsky & Harel (Ed.), M.A.A. Notes, v.25, p. 85-106.

GUIDORIZZI, H.L. (2001). *Um Curso de Cálculo.* Vol.1. 5ª ed. Rio de Janeiro: LTC.

MACHADO, A.C. (1998). *A Aquisição do Conceito de Função: perfil de imagens produzidas pelos alunos,* dissertação de mestrado, UFMG, Belo Horizonte.

MARQUES, L.L; SANTOS, M.F. dos & CASTRO, M.R. de (2001). *O conceito de função numa nova proposta curricular,* Anais do VII ENEM, Rio de Janeiro, RJ: SBEM.

MEIRA, L.L. (1993). *Aprendizagem e ensino de funções,* Estudos em Psicologia da Educação Matemática, Ed. Universitária da UFPE, Recife, p. 62-84.

OLIVEIRA, N. de (1997). *Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem,* Dissertação de Mestrado, PUC, São Paulo.

SFARD, A. (1992). *Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function,* in "The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy", Dubinsky & Harel (Ed.), M.A .A . Notes, v.25, p. 59-84.

SIERPINSKA, A. (1992). *On understanding the notion of function*, in "The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy", Dubinsky & Harel (Ed.), M.A.A . Notes, v.25, p. 25-58.

SWOKOWSKI, E.W. (1994). *Cálculo com Geometria Analítica.* Vol.1. (trad. A.A. de Faria), 2a. ed. São Paulo: Makron Books.

VINNER, S. (1991). *The role of definitions in the teaching and learning of mathematics,* in Tall, D. (ed.) – *Advanced Mathematical Thinking*, Mathematics Education Library, v.11, The Netherlands: Kluwer, p.65-81.

VINNER, S. (1992) *The function concept as a prototype for problems in mathematics learning,* in "The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy", Dubinsky & Harel (Ed.), M.A.A . Notes, v.25, p. 195-213.

ZUFFI, E.M. (1999). *O tema 'funções' e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio – por uma aprendizagem de significados,* São Paulo: Faculdade de Educação, USP, 307p. (tese de doutorado em Didática - Ensino de Ciências e Matemática).

ZUFFI, E.M. (2001) *Alguns Aspectos do Desenvolvimento Histórico do Conceito de Função,* Educação Matemática em Revista, SBEM, Ano 8, No. 9/10, p.10-16.

ZUFFI, E.M. (2003) *Linguagem Matemática e a Formação Inicial de Professores: um estudo de caso,* GT-9, Anais do II SIPEM, Santos, SP: SBEM (publicação completa em CDR e no Livro de Resumos, p. 131-132).