Realização
SBEM 15 anos
SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

AS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS DO PLANO COMO AMBIENTE DE PRODUÇÃO DE SIGNIFICADOS PARA AS OPERAÇÕES NUMÉRICAS NO ENSINO FUNDAMENTAL

Profª : Ms. Maria da Conceição Vieira Gomes
CAp/UERJ/Projeto Matemática Viva
ceissa@uol.com.br
Profª Drª. Monica Rabello de Castro
Universidade Estácio de Sá
rabellomonica@uol.com.br

Material necessário: Pedimos que os inscritos tragam: régua, lápis, hidrocor, tesoura, transferidor, papel quadriculado, 30 percevejos (tachinhas).

1. Introdução

Apresentaremos uma proposta do Projeto Matemática Viva – PMV/Cap-UERJ, que trabalha os conteúdos matemáticos interconectados, dando especial atenção para a introdução das operações de adição e multiplicação de números relativos, proposta esta que vem se mostrando eficaz principalmente para o entendimento da multiplicação de dois números negativos, sejam eles inteiros ou fracionários.

Após pesquisa realizada ao longo de 11 anos, foi elaborada uma proposta curricular que se estende da 5ª a 8ª séries, através de construções geométricas, principalmente composição de homotetias, na qual este tema se insere. Este trabalho vem sendo extremamente bem sucedido durante todos estes anos, estando implementado em todas as turmas do Cap-UERJ.

Este mini-curso oferece uma visão geral do trabalho realizado no Cap-UERJ e propõe atividades que constroem um significado para as operações numéricas com relativos. Como esta proposta se integra à do projeto, pretende-se localizá-la na seqüência curricular do projeto de forma a que os participantes tenham a visão da proposta como um todo. O trabalho será feito através de atividades estruturadas.

2. Breve histórico e metodologia proposta

Na década de 80, era enorme a insatisfação com as formas de abordar a multiplicação de números relativos. Em relação à adição e à subtração, não havia grandes problemas, tínhamos situações várias que avaliávamos eficientes para explorar tais conceitos. A multiplicação, no entanto, era um grande nó.

Experiências antigas (sobretudo a partir de 1985) de exploração de algumas transformações do plano em turmas de 5ª série, de 6ª série e de 7ª série do CAP-UERJ mostraram-se ricas para a exploração do conceito.

Ao se iniciar em 1992 o PROJETO DE PESQUISA MATEMÁTICA VIVA inicia suas atividades através da proposta de se experimentar a exploração de diversas transformações do plano na 5ª série. Tal proposta dá ênfase a trabalhar as construções das transformações sobre o papel quadriculado que usávamos bastante ao tratar de área e perímetro. Ao trabalhar com coordenadas cartesianas na 5ª série fazíamos uso de umas fichas de trabalho adaptadas por Arago de Carvalho Backx onde figuras dadas por suas coordenadas cartesianas sofriam transformações, trabalho em que as crianças mostraram gostar muito. As transformações eram definidas por mudança nas coordenadas, seguindo uma certa regra de modo que cada par ordenado fornecia um novo par e assim os novos pontos eram desenhados fornecendo a figura transformada. Tais fichas faziam sucesso em todas as turmas em que eram usadas.

Ao trabalhar escala, razão, perímetro e área na 6ª série e também na 7ª série, fazíamos uso de construções de figuras semelhantes em papel quadriculado.

Ao longo de várias testagens de atividades enfocando as transformações do plano, diversas mudanças foram sendo feitas. As testagens foram feitas em oficinas e em turmas regulares do Cap-UERJ, num trabalho que envolveu alunos de iniciação científica e parte da equipe de professores. Passamos a usar menos o quadriculado para "orientar" a obtenção da figura transformada, privilegiando o uso da folha em branco, sem qualquer linha, e o uso da régua. Verificamos que podíamos aproveitar as atividades de construção de homotetias para que os alunos utilizassem o cálculo com números decimais e frações. Vimos, na conjugação do trabalho com as coordenadas cartesianas e com as transformações, a possibilidade de operar com os números relativos em situações lúdicas. No entanto, o que de mais especial surgiu foi a possibilidade de concretizar situações de multiplicação de dois números negativos através da composição de homotetias. Os resultados das testagens com os alunos geraram o aperfeiçoamento da proposta. Foram feitas também algumas testagens em escolas da rede municipal do Rio de Janeiro.

Este mini-curso propõe as mesmas atividades que são propostas aos alunos, porém em outra seqüência com o objetivo de dar uma visão mais geral de todo o processo de construção do significado as operações com números relativos e outras conexões possíveis.

3. Conteúdos envolvidos nas atividades desenvolvidas no ensino fundamental

- **na 5ª série**: Brincando de transformar figuras segundo uma regra que se aplica a todos os seus postos, gerando uma nova figura.

- Tipos de transformações: simetrias, alongamentos (cisalhamentos), translações, homotetias.
- Conceitos que vão sendo explorados usando essas atividades: direção, sentido, conservação da forma, deformação de uma figura, ampliação, redução, comprimento, área, correlação entre as variações de comprimento e de área, paralelismo, números decimais, razão.
- Não se dá ênfase ao domínio da terminologia.

- **na 6ª série**: Aprofundando o estudo das transformações: homotetias de razão negativa, as coordenadas cartesianas e as transformações, composição de transformações.

- Homotetias de razão negativa após o início da exploração dos números relativos.
- Composição de homotetias, composição de simetrias.
- Mais tarde, após a apresentação das coordenadas cartesianas exploram-se todas as transformações apresentadas na 5ª série, representando agora a figura através de pares ordenados e operando sobre os números que formam os pares ordenados.
- Conceitos que vão sendo explorados usando essas atividades: homotetia de razão negativa, operações com números decimais, escala, composição de simetrias, composição de translações, composição de homotetias, operações com números relativos (inteiros ou fracionários), noção de vetor.

- **na 7ª série**: Explora-se, sobretudo, o trabalho em eixos coordenados e a relação entre as coordenadas, num enfoque algébrico das transformações. Exploram-se também casos de semelhança a partir das homotetias.

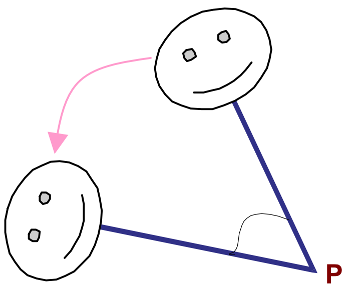
- **na 8ª série**: Inicia-se o trabalho com gráfico de funções e transformações aplicadas a estes gráficos.

Neste mini-curso daremos ênfase aos conteúdos de 5ª e 6ª série.

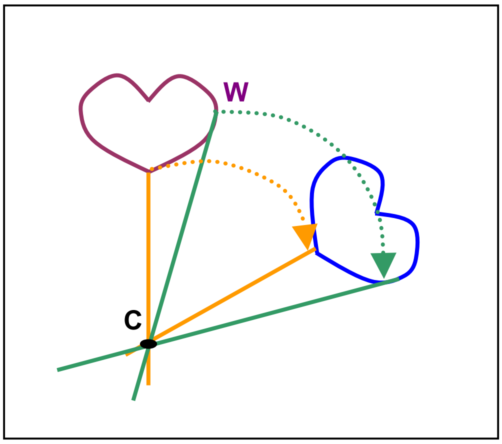
4. Exemplos de atividades

ROTAÇÃO: girando e gerando flores

A janela gira em torno das dobradiças; os ponteiros do relógio giram em torno de um ponto no centro, ao qual ficam presos. Toda rotação de uma figura plana tem um ponto fixo, que serve como referência para o movimento: a figura gira em torno dele. É o caso do ponto P, no desenho ao lado.



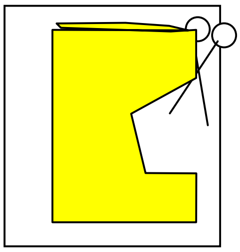
A janela pode abrir pouco ou muito. Os ponteiros do relógio também podem girar mais ou menos conforme a passagem do tempo. Toda rotação define um ângulo.



1. Seguindo as instruções seguintes, você vai construir uma figura em uma folha de papel e colocá-la para girar. Providencie o seguinte material: 1 retângulo de cartolina, ou de papel sulfite de aproximadamente 14cm por 20 cm, 1 folha de papel que não seja pautada, tesoura, 1 alfinete ou tachinha, caneta hidrográfica ou lápis

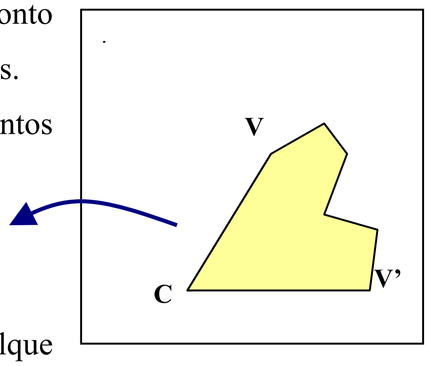
Antes de começar, observe a figura ao lado que mostra uma rotação do coração em torno com centro no ponto **C**.

O que fazer:



- ✓ No retângulo de cartolina, desenhe um pentágono e recorte-o obtendo um pentágono vazado. Faça uma estimativa para que a área desse pentágono não seja maior que 20 cm^2. Para obter o vazado, você pode dobrar a cartolina na linha que divide o pentágono ao meio.
- ✓ Sobre uma folha em branco (sem linhas) coloque a cartolina com o pentágono vazado. Escolha um ponto para ser o centro da rotação. Fixe, com a tachinha, a cartolina no ponto escolhido como centro de rotação. Segure a folha para contornar o pentágono, desenhando-o no papel em branco.
- ✓ Sem deixar a cartolina soltar da tachinha, faça o pentágono girar um pouco mais do que o coração acima girou.
- ✓ Contorne o pentágono desenhando-o na nova posição. Retire a tachinha e a cartolina.

- ✓ Na folha com os dois pentágonos, assinale com a letra **C** o centro da rotação, que está furado. No primeiro pentágono, chame de **V** o ponto mais alto do telhado e de **R, S, T** e **U** os outros vértices.
- ✓ No segundo pentágono, encontre os pontos correspondentes a **V** e a **S** e chame-os de **V'** e **S'**.
- ✓ Ligue cada um dos pontos **V**, **S**, **V'** e **S'** ao centro, imitando a ilustração do coração.



- ✓ Usando uma folha fina em branco, faça um decalque desenhando a região cercada pelos segmentos **VC** e **V'C'**, como na ilustração ao lado. Repare que não importa como você vai recortar a linha que une **V** e **V'**.
- ✓ Agora, responda às questões abaixo:

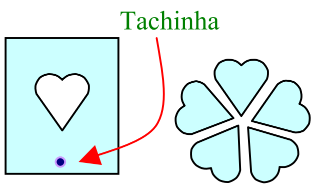
a) A figura que você recortou por último determina o ângulo de rotação $\mathbf{V\hat{C}V'}$. Este ângulo é o mesmo que aparece no seu desenho. Sobreponha o ângulo $\mathbf{V\hat{C}V'}$ recortado com o ângulo $\mathbf{R\hat{C}R'}$ e verifique que eles são iguais. Será que o mesmo acontece com os ângulos determinados pelos outros vértices do pentágono e seus transformados? Verifique isso usando a figura que você recortou.

b) Escolha outro ponto do pentágono, que não seja um dos vértices, e encontre o seu correspondente no pentágono transformado. O ângulo determinado por esse ponto, o centro **C** e o correspondente do ponto escolhido também é igual aos ângulos testados no item anterior? Use a figura recortada para testar sua resposta.

c) Chamamos *ângulo de* rotação ao ângulo $\mathbf{V\hat{C}V'}$ ou qualquer outro obtido do mesmo modo. Descubra uma maneira de verificar se o ângulo da rotação que você fez no pentágono foi realmente maior que o ângulo da rotação feita na figura do coração desenhada nesta página. Verifique como seus colegas resolveram o mesmo desafio.

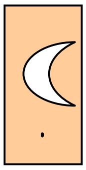
2. Desenhe uma flor usando as rotações. Para isso, siga as instruções:

- ✓ Desenhe uma pétala, no formato que achar mais bonito.
- ✓ Recorte o desenho produzindo uma figura vazada, como mostram os 2 exemplos da ilustração.



- ✓ Fixe com uma tachinha, ou alfinete, um ponto da folha que contém a figura vazada.
- ✓ Desenhe a pétala contornando o recorte.

- ✓ Gire e desenhe novamente. Faça isso várias vezes para obter sua flor.
- ✓ Discuta como fazer para que a flor fique com as pétalas eqüidistantes (ou seja, para que a distância entre duas pétalas seguidas seja a mesma).



TRANSFORMAÇÕES E COORDENADAS CARTESIANAS

1. a)Na 1ª linha da tabela abaixo estão escritos os pares ordenados correspondentes a alguns vértices da figura dada. Complete a linha com os pares ordenados que estão faltando. O desenho será fornecido no evento.

b) Escreva na 2ª linha os novos pares ordenados que se obtêm multiplicando por (-2) os dois elementos de cada par ordenado.

Fig. dada	A (-3; 3)	B (-1; 1)	C (3; 1)	D(4; 3)	E(0; 3)	F( )	G ( )
Nova fig.	A' (;)	B' ( )	C'( )	D' ( )	E'( )	F ( )	G'( )

c) Marque os pontos A', B' , C', D' E'; F',G' no papel quadriculado.

Ligue-os na mesma seqüência que deu origem ao barco.

d) Escreva o que você observa comparando as duas figuras.

2. a)Escreva na 2ª linha os novos pares ordenados que se obtêm segundo as seguintes regras:

- ao primeiro elemento de cada par ordenado somar (+ 2).
- ao segundo elemento de cada par ordenado somar (- 6)

Fig. dada	A(-3 ; 3)	B (-1; 1)	C (3; 1)	D(4; 3)	E(0; 3)	F(2; 4)	G(0; 7)
Nova fig.	A'(;)	B' ( )	C' ( )	D' ( )	E'( )	F ( )	G'( )

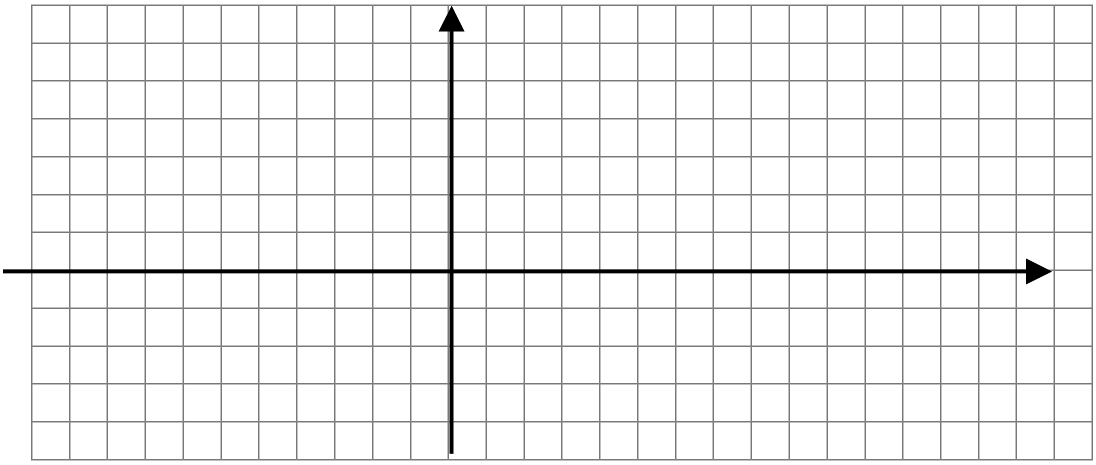
b) Marque os pontos A', B', C', D' E'; F',G' no papel quadriculado.

Ligue-os na mesma seqüência que deu origem ao barco.

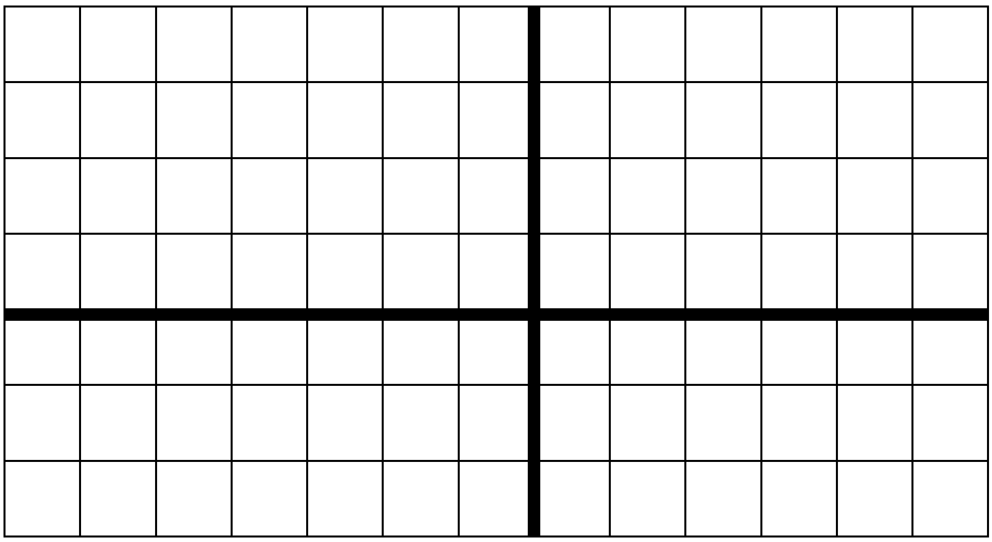
c) O que aconteceu com a figura ABCDEFG ao transformarmos suas coordenadas de acordo com as regras dadas?

3. No plano cartesiano abaixo, faça o que se pede abaixo:

a) Desenhe o paralelogramo ABCD sendo A(-3,2), B(2,-3) e D(3,2).
b) Encontre as coordenadas do ponto C.
c) Encontre a área do paralelogramo ABCD.
d) Trace a diagonal menor do paralelogramo ABCD e considere o triângulo ABD por ela determinado. Encontre a área do triângulo ABD.
e) Trace a altura do triângulo ABD com relação ao lado BD.
f) Encontre as coordenadas do ponto onde a altura encontra o lado BD.



4. Desenhe o quadrilátero ABCD com vértices nos pontos A(-3;-1) B(1;2) C(3;-1) e D(0;-3) e calcule sua área. (Informe o que usou como unidade de área).



HOMOTETIA E SEMELHANÇA

HOMOTETIAS

A transformação denominada homotetia possui um ponto fixo que também se chama centro da homotetia e um número pelo qual se multiplica a distância de cada ponto a esse centro. Esse número é dito razão da homotetia.

Para encontrar a figura transformada, liga-se cada ponto da figura dada ao ponto fixo e marca-se, a partir desse centro, a nova distância, resultado da multiplicação da distância inicial pela razão. OBS: O centro, cada ponto inicial e seu transformado encontram-se sobre uma mesma reta.

ATIVIDADES

1. Faça para as figuras abaixo as homotetias pedidas:

a) F → Ponto Fixo / Razão: 3

FA = ________ FA' = ________

FB = ________ FB' = ________

FC = ________ FC' = ________

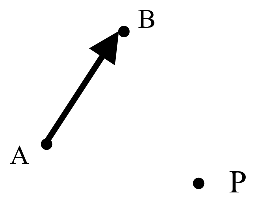
FD = ________ FD' = ________

2. Duas homotetias de mesmo centro e de razões opostas.

Figura inicial; o segmento orientado AB.

a) Obter a fig A'B' **triplicando as distâncias ao ponto fixo P, mantendo o mesmo sentido,** ou seja: PA e PA' têm o mesmo sentido.

b) Obter a fig A''B'' também a partir de AB, **triplicando as distâncias ao ponto fixo P e marcando as distâncias em sentidos opostos a partir de P**, ou seja: PA e PA'' têm sentidos opostos.

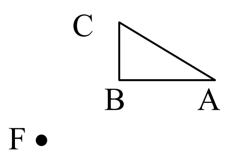


3. Composição de homotetias de mesmo centro (ponto fixo, polo)

A cada figura aplique a composição de homotetias proposta pelo esquema e encontre a razão da homotetia que leva diretamente a primeira figura à última. Você deve colorir cada figura encontrada de uma cor diferente.

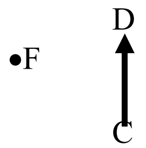
a) $ABC \xrightarrow{\times 3} A'B'C' \xrightarrow{\times 2} A''B''C''$

Razão da homotetia que transforma ABC em A''B''C'' é_____



b) CD $\xrightarrow{\times 2} C'D' \xrightarrow{\times 1/3} C''D''$

Razão de CD para C’’D’’ é_________________



Palavras-chave: 1. Transformações do plano, 2. Operações numéricas, 3. conexões matemáticas