



GRÁFICOS E FUNÇÕES NOS NÍVEIS FUNDAMENTAL E MÉDIO

João Paulo G. Vassallo (FEVRE)

Marcus Vinicius F. Soares (FEUFF)

Projeto Fundação – IM/UFRJ pfundao@im.ufrj.br

1. Histórico

O conceito de função vem sendo explicitamente definido pelos matemáticos desde o século XVII, sob várias formas, mas seu ensino, até o meio deste século, ocorria apenas no 3º grau.

Com o movimento da Matemática Moderna, passou-se a ensinar funções para estudantes a partir dos 10 anos. No Brasil, isto aconteceu entre 1955 e 1970. Muito do formalismo Bourbakiano impregnou o ensino desse tópico nessa época, e se mantém até hoje. Essa postura ignora as razões que determinaram o surgimento do conceito de função: a necessidade de analisar fenômenos, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar (Caraça, B,J 1951).

Devido à impossibilidade de os alunos de menos de 14 anos, e sem a necessária maturidade matemática, atingirem o nível de formalidade no qual o assunto era tratado, o tópico funções passou a ser ensinado apenas a partir do 8º ano de escolaridade. Mesmo assim, o modo formal pelo qual este importante conceito matemático é ensinado ainda dificulta a compreensão por parte dos alunos.

No ensino atual e nos livros didáticos mais usados, a noção de função se caracteriza de uma das duas formas:

- como expressão analítica, com um gráfico padronizado ou
- como conjunto de pares ordenados, sendo caso particular de uma relação.

A primeira dessas caracterizações reflete a tendência de alguns grandes matemáticos, durante o processo histórico da definição de função (Dieter, 1984). A

segunda reflete o último estágio desse processo, com a definição de Peano (Sierpinski, 1992).

2. Proposta do Trabalho

Os professores do Projeto Fundão – Matemática, do Instituto de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, que fazem parte da equipe responsável pelo presente trabalho, vêm percebendo as características referidas acima e a conseqüente dificuldade dos alunos em relação à aprendizagem desse tópico. Por outro lado, têm consciência da importância cada dia maior dele, principalmente na atual *Era da Informação*.

Como bem salienta Leonor Leal (1990), a falta de uma preparação dos alunos para a construção do conceito, ao longo dos primeiros sete anos de escolaridade, é um dos principais fatores responsáveis pelas dificuldades de aprendizagem desse tópico.

Constata-se também que a maioria dos estudos e pesquisas sobre função, na área de Educação Matemática, é voltada para o desenvolvimento do conceito no nível formal e/ou à utilização das máquinas e computadores nesse processo.

Com base nessas considerações e nas experiências dos seus professores, o grupo esboçou o seu objetivo: a elaboração de sugestões de atividades que possam facilitar a construção do conceito de função pelos alunos de 5ª a 8ª série.

No desenvolvimento do trabalho, levou-se em consideração:

- a concepção de função de B.J. Caraça (1951), e de J.P. Ponte (1990), como instrumento matemático necessário à análise de fenômenos de variação;
- opiniões de professores sobre o ensino de funções e noções dos alunos a respeito desse conceito em si.

3. O que Pensam os Professores

A opinião dos professores a respeito do momento adequado para o início do trabalho com o tópico de funções foi detectada por meio das respostas de 40 professores de diversas escolas de 1º e 2º graus do Rio de Janeiro a questionário escrito. Deste, destacam-se três questões, cuja análise se segue (a nomenclatura dos níveis de ensino são as da época em que o estudo foi feito).

1) O tópico Funções deve ser ensinado? () sim () não

Respostas: 100% sim

2) Se sua resposta foi sim, diga quando

- () a partir da 5ª série
- () a partir da 8ª série
- () somente no 2º grau

Por quê ?

Respostas: **a** - a partir da 5ª série - 37%

b - a partir da 8ª série - 41%

c - somente no 2º grau - 22%

Observe-se que 63% (total de respostas **b** e **c**) dos professores consideram que o ensino das funções deve se dar a partir, ou depois, da 8ª série.

3) Você acha importante introduzir aspectos de funções de maneira não formal durante o primeiro grau? () sim () não

Por quê?

Respostas: sim -81% não -19%

É importante destacar que:

- entre os que responderam **b** em **2**, 91% responderam sim em **3** e 9% responderam não;
- entre os que responderam **c** na questão **2**, 50% responderam sim em **3** e 50% responderam não.

À primeira vista, parece que os professores mudaram de opinião da pergunta **2** para a **3**. De fato, a resposta à pergunta **2** reflete a visão do ensino formal de funções que

é usualmente praticado no ensino médio. Só após um pouco mais de reflexão, provocada talvez pelas palavras do enunciado da questão 3, os professores passam a admitir que, desde as primeiras séries, deve-se trabalhar noções relativas a funções.

Essas observações podem ser ilustradas por algumas justificativas encontradas nas respostas às duas questões já referidas.

Questão 2 - Justificativas para iniciar o trabalho de funções só a partir do 2º grau.

- É necessário saber a matéria de 5ª a 8ª série;
- o aluno não tem maturidade;
- por toda sua simbologia;
- o 1º grau deve ser voltado mais para construções e aplicações diretas ao aluno, deixando conceitos mais abstratos para uma "população" que tenha intenção de prosseguir além do 1º grau.

- Justificativas para iniciar o trabalho de funções a partir da 8ª série.

- Facilita o entendimento no 2º grau;
- só aí têm maturidade para entender.

Questão 3 - Justificativas para resposta não.

- Falta de professores, redução da carga horária, falta de matéria correlata (desenho, artes,...);

- só trabalhar bem conceitos geométricos, áreas perímetros, razões, proporções, etc., que são pré-requisitos para funções.

- Justificativas para resposta sim.

- Para facilitar entendimento no 2º grau e pela correlação com as equações do 1º e 2º graus;

- porque o conceito é importante no vestibular;
- é necessário introduzir a essência de função para depois formalizar (7 pessoas afirmaram isso);
- ajuda de uma maneira simples a chegar ao conceito de função;

- porque é a parte mais importante da matemática; estuda a relação entre as duas grandezas. Quanto mais cedo for introduzida, melhor;
- valorizar o estabelecimento de relações (operações com máquinas);
- as primeiras noções de dependência são importantes.

A pergunta **II** do questionário visava a conhecer a opinião dos professores sobre a relação dos conteúdos trabalhados no 1º grau com funções.

II - Que assuntos devem ser desenvolvidos no 1º grau visando ao estudo de funções?

Respostas:

Construção de gráficos	-93%
Interpretação de gráficos	-85%
Áreas e Perímetros	-63%
Equações	-59%
Expressões Algébricas	-52%
Razões e Proporções	-37%

Observe-se a baixa porcentagem dos que consideram as expressões algébricas e as razões e proporções importantes para a construção do conceito de função.

No entanto, como afirma Sierpinska (1992):

"a falta de familiaridade com a álgebra torna a compreensão das funções muito difícil, se não impossível". (p. 45)

Nas experiências do presente trabalho, ficaram claras as relações do uso da linguagem algébrica e do estudo das equações com o desenvolvimento das idéias básicas envolvidas no conceito de função.

4. O que Pensam os Alunos

A consulta aos alunos foi feita em duas turmas de ensino médio que já tinham trabalhado com funções nas aulas de matemática (alunos de 15 a 18 anos). A eles foram feitas, separadamente, as duas perguntas seguintes.

I - O que você acha que é função?

II - Em matemática, o que é função?

Das respostas encontradas, destacam-se:

Respostas para I - Função é tarefa, cargo, obrigação.

- É função do 1º e 2º graus.

Respostas para II - São gráficos que usamos somente duas letras: x é para a linha horizontal e y para a linha vertical.

- Funções de 1º e 2º graus.

- É um assunto da matemática que deve ter alguma regra, algum objetivo.

- É um tema onde se estudam relações entre conjuntos, gráfico, e várias outras coisas que no momento não me lembro.

- É relação de uma coisa com a outra.

Observa-se que os alunos se referem inicialmente ao sentido da palavra função na linguagem corrente. Quando lembram da matemática, associam função a exemplos específicos (protótipos) trabalhados na escola.

A ausência de idéias como dependência ou de variação confirmam o distanciamento entre a prática pedagógica e o objetivo do ensino de função na escola secundária, anteriormente percebido pelo grupo.

5. Objetivos Específicos do Trabalho.

A reflexão sobre as respostas de alunos e professores permitiu ao grupo explicitar mais claramente seus objetivos:

- estudar o processo de aquisição do conceito de função por alunos a partir da 5ª série do 1º grau, sem acesso a computadores;

- despertar nos professores de 1º e 2º graus a consciência de que, ao longo do trabalho com os tópicos usualmente incluídos nos programas, é possível desenvolver as idéias essenciais à construção do conceito de função;

- fornecer sugestões de atividades que favoreçam essa construção.

6. As Idéias Básicas e as Formas de Representação

A equipe considera que as noções essenciais a serem desenvolvidas pelos alunos do ensino fundamental são as de: **variável, dependência, regularidade e generalização.**

Variável - Como salienta Caraça (1951), a noção de variável é das mais difíceis para os alunos. É um número qualquer de determinado conjunto, mas não é especificamente nenhum dos números desse conjunto.

Durante os experimentos realizados, um dos alunos manifestou explicitamente a sua dúvida:

“que história é essa de n um número qualquer? Então não pode ser 20? Ou outro? Se é qualquer, posso escolher?”

Desde o segundo ciclo do ensino fundamental, os alunos usam letras para substituir valores desconhecidos na resolução de problemas. No decorrer do terceiro e quarto ciclos, os alunos continuam utilizando as letras com diversos enfoques e em contextos diferentes, como por exemplo:

- ao determinar as incógnitas das equações e inequações de 1º e 2º grau;
- ao generalizar propriedades de operações aritméticas como $\mathbf{a+b=b+a}$;
- no estudo das expressões algébricas;
- ao serem introduzidas as variáveis no estudo de funções.

É comum o professor não se ligar em explorar as diferenças que existem na utilização das letras nessas diversas situações, levando o aluno a encarar a letra sempre como uma incógnita. Isso acarreta nele o hábito de igualar a zero qualquer expressão que lhe é apresentada e a tentativa de determinar um valor para a(s) variável(eis) envolvida(s). Sierpiska (1992) salienta a necessidade de uma consciência sobre a diferença entre considerar letras em equações (nas quais se trata de incógnitas e valores dados) e em funções (nas quais se trata de quantidades variáveis e constantes), ao falar sobre o ensino na Polônia:

"Fazer álgebra nesse nível (6ª e 7ª série) significa o uso de letras como incógnitas, transformar expressões algébricas com o

auxílio de identidades envolvendo o quadrado de somas e diferenças, e diferença de quadrados, e resolver equações lineares simples. Isto é uma experiência demasiado estreita para o aluno apoderar-se do sentido de uma expressão como $y = ax$, na qual x e y devem ser vistas como variáveis e não incógnitas e seu papel tem que ser distinguido daquele do símbolo a que é um parâmetro”. (p.44)

Dependência - A relação de dependência entre grandezas variáveis deve ser salientada sempre que possível. No entanto, é bom lembrar que, numa relação funcional, uma das grandezas (a função) é perfeita e univocamente determinada pela variação da outra (variável independente). Essa característica da função deve surgir lentamente ao longo do processo, para que seja explicitada o mais naturalmente possível pelo professor ao final dele.

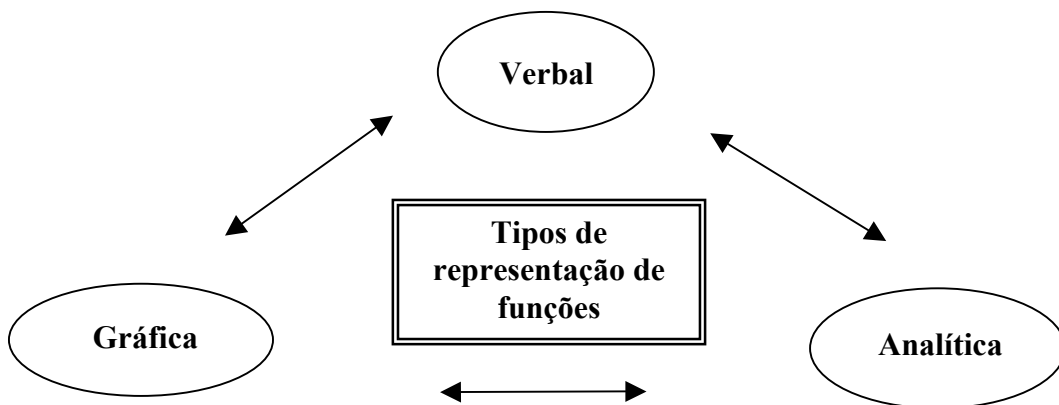
Regularidade - Muitos fenômenos fluem com certa regularidade, que, se detectada, permite fazer previsões sobre etapas que não podem ser observadas. O reconhecimento de regularidades em situações reais, em seqüências numéricas, ou padrões geométricos é uma habilidade essencial à construção do conceito de função. Por outro lado deve-se explorar situações em que não haja regularidade, para evitar que o aluno acredite que todos fenômenos obedecem a uma lei geral.

Generalização - Fenômenos que ocorrem com regularidade podem ser generalizados. A capacidade de generalizá-los é importante e envolve, em geral, abstração. Muitas vezes, os alunos generalizam situações que apresentam regularidade, verificando apenas se certa lei se aplica a casos particulares. É preciso que desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os. O registro de leis gerais em linguagem algébrica ou geométrica é passo decisivo para que construam o conceito de função, embora não seja fácil para os alunos, até a 7ª série.

O desenvolvimento dessas idéias é feito por meio de atividades ligadas ao dia-a-dia do aluno, com as quais o aluno se familiariza também com as diversas formas de representar funções: - **verbal** (em palavras, oralmente ou por escrito)

- **gráfica** (gráficos formais e informais, tabelas, ...)

- **analítica** (por expressões matemáticas)



A flexibilidade na passagem de uma representação a outra e o uso exaustivo da representação em linguagem corrente, oralmente e por escrito são fundamentais para a construção do conceito.

7. Os Níveis de Compreensão do Conceito

Em relação ao processo de aquisição do conceito por um indivíduo, o grupo adotou como ponto de partida a proposta de Bergeron e Herscovics (1982) segundo a qual a compreensão do conceito de função se dá em quatro níveis descritos no quadro a seguir:

NÍVEIS				
	COMPREENSÃO INTUITIVA	MATEMATIZAÇÃO INICIAL	ABSTRAÇÃO	FORMALIZAÇÃO
CARACTERÍSTICAS	<ul style="list-style-type: none"> •Utilização do conhecimento informal da vida. •Pensamento com base na percepção visual. •Ações espontâneas. 	<ul style="list-style-type: none"> •Organização e quantificação das primeiras noções intuitivas. •O conceito é confundido com o procedimento que leva à sua construção. 	<ul style="list-style-type: none"> •O conceito se destaca do procedimento e alcança uma existência própria. •Generalização 	<ul style="list-style-type: none"> •Uso da linguagem simbólica •Descontextualização •Justificação lógica das operações.
PARA FUNÇÕES	<ul style="list-style-type: none"> •Reconhecimento de dependência(não quantificada). •Estabelecimento de leis de formação simples e visuais. •Construção e interpretação de tabelas e gráficos de colunas e setor. 	<ul style="list-style-type: none"> •Quantificação das leis. •Reconhecimento de variáveis dependentes e independentes. •Interpretação de gráficos cartesianos. •Construção de gráficos cartesianos simples. •Reconhecimento do domínio(analisado no contexto). 	<ul style="list-style-type: none"> •Escrita de expressões analíticas. •Distinção entre equações e funções. •Construção e interpretação de gráficos convencionais e não-convencionais. •Caracterização de relações funcionais. 	<ul style="list-style-type: none"> •Notação: f:A→B y = f(x) •Domínio, imagem. •Classificação. •Operações com funções.

Das experiências do grupo, concluímos que o nível de compreensão, que em geral pode ser atingido pelos alunos dos diversos níveis escolares, é representado pela tabela seguinte.

Nível de Compreensão / Nível Escolar	COMPREENSÃO INTUITIVA	MATEMATIZAÇÃO INICIAL	ABSTRAÇÃO	FORMALIZAÇÃO
1ª a 4ª série				
5ª e 6ª séries				
7ª e 8ª séries				
Ensino Médio				

8. Instrumentos Matemáticos

No processo de testagem, foram observados os principais instrumentos matemáticos envolvidos na construção do conceito de função: as operações aritméticas

(ao menos em \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q}), as expressões algébricas e o plano cartesiano. É importante salientar que os dois últimos não são pré-requisitos ao trabalho com funções. Eles podem ser explorados conjuntamente com o desenvolvimento das noções básicas e com as diversas formas de representar funções.

9. Atividades Propostas

As atividades que serão realizadas no minicurso podem e devem ser trabalhadas em nível de 5^a a 8^a série, integradas aos diversos tópicos do programa. Por meio delas e outras que venham a ser elaboradas pelo professor, os alunos podem desenvolver a base para o aprendizado de funções, desde que este professor esteja consciente dos aspectos a serem explorados. Muitos desses aspectos serão destacados nas discussões no decorrer do minicurso.

É importante salientar que em turmas de Ensino Médio, que não tenham vivenciado um trabalho preparatório para o estudo de funções, a aplicação dessas atividades e/ou outras do gênero deve necessariamente preceder o estudo formal do assunto.

As atividades envolvem conceitos geométricos, relativos à proporcionalidade, e das quatro operações elementares em situações bastante significativas para os alunos. Há uma ênfase na representação dessas situações de várias maneiras possíveis, principalmente por meio de gráficos não padronizados, no sentido de torná-los significativos para esses alunos.

Por meio de atividades de generalização, e de outras, envolvendo a passagem da linguagem algébrica para a gráfica, e vice-versa, procura-se explicitar o sentido e a utilidade do trabalho de escrita e manipulação de expressões algébricas, mas também pode viabilizar a introdução dessas expressões. A passagem da linguagem algébrica para a gráfica e vice-versa é uma habilidade importante a ser explorada.

Referências

- Bergeron, J. e Herscovics, N (1982) - Levels in the Understanding of Functions Concept, em *Proceedings of the Workshop of Functions*, Enschede, The Netherlands.

- Caraça, B. J. (1984) - Conceitos Fundamentais da Matemática, Ed. Sá da Costa, Lisboa.
- Ponte, J. P. (1990) - O Conceito de Função no Currículo de Matemática, em Educação e Matemática, nº 15, p. 21 – 29, APM, Portugal.
- Sierpinska, Anna (1992) - On Understanding the Notion of Function, em The Concept of Function Aspects of Epistemology and Pedagogy - Dubinsky E. S. e Harel G. (ed) - MAA Notes, p. 25-58.
- Ruthing, D. (1984) - Some Definitions of the Concept of function from de John Bernoulli to N. Bourbaki, em The Mathematical Inteligencer, vol. 6, nº4, p. 72-77.
- Leal, Leonor C. (1990) - Funções no terceiro ciclo do ensino básico - uma possível abordagem, em Educação e Matemática, vol.15, p. 13-16, APM, Portugal.

Palavras-chaves: Conceito de Função – idéias básicas - gráficos