Realização SBEM 15 anos SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

VERMELHOS E AZUIS – TRABALHANDO COM NÚMEROS INTEIROS E EXPRESSÕES LINEARES

TÂNIA SCHMITT – UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA – tânia@mat.unb.br

CAPÍTULO 1 – JOGOS E ATIVIDADES PARA INTRODUÇÃO DE NÚMEROS NEGATIVOS

A idéia é introduzirmos uma série de jogos e atividades de modo que as operações com números negativos se tornem *naturais*. Começaremos com alguns jogos e encerraremos este capítulo com algumas atividades.

☛**Jogo 1**: Jogo *Paga/Recebe* – número de participantes: 5 ou 6 alunos em cada grupo, para maior agilidade do jogo.

- Material para cada grupo:
  - Duas roletas de cores diferentes;
  - 2 conjuntos de canudos de cores diferentes, de preferência as mesmas que as roletas;
  - papel para registro dos pontos.

Observação: vamos supor que as cores são *Vermelho* (perde) e *Azul* (ganha). O importante é que trabalhemos com duas cores diferentes e que seja estabelecido, no início do jogo, qual a cor associada ao *perde* e qual a cor associada ao *ganha*.

- Primeira parte do jogo: sem registro.

1. Determina-se um certo número de rodadas para maior agilidade do jogo. Distribui-se um certo número de canudos azuis para cada jogador (cerca de 10 canudos) antes do jogo começar. Cada participante joga um dos dados, quem obtiver o maior número de pontos inicia o jogo e segue-se pela direita. O

participante que obtiver o menor número de pontos será o banqueiro. O banqueiro tem uma quantidade *enorme* de canudos.

2. Regras iniciais:
   a) Cada participante, na sua vez, joga os dados. Primeiro, ele joga o dado vermelho. Para cada ponto do dado vermelho ele paga um canudo azul ao banqueiro. Em seguida ele joga o dado azul, e para cada ponto do dado azul ele recebe um canudo azul do banqueiro.
   b) Ganha o jogo quem tiver o maior número de canudos ao final da partida.
   c) É proibido pegar canudos emprestadas de outros participantes.
   d) Se algum jogador não tiver canudos suficientes para efetuar seu pagamento em alguma rodada, sai do jogo. O banqueiro sempre terá canudos em quantidade suficiente para não *quebrar*.

- Segunda parte do jogo: ainda sem registro

1. Continuam valendo as regras 1, 2 e 3 da primeira parte.
2. Se em alguma rodada um jogador não tiver canudos azuis suficientes para efetuar seu pagamento, o banqueiro lhe dará o número de canudos azuis suficiente para fazê-lo, mas lhe dará, também, o mesmo número de canudos vermelhos, para que se "*lembre da dívida*". Quando tiver em seu poder um número de canudos azuis maior ou igual ao número de canudos vermelhos, poderá devolver ao banqueiro os vermelhos entregando, para cada um deles, também um canudo azul.

- Terceira parte do jogo: análogo à segunda parte, mas agora com registro. Permita, primeiramente, que os jogadores escolham a forma de registro. Em uma quarta parte do jogo, sugira que coloquem o sinal "+" antes dos pontos ganhos e "-" antes dos pontos perdidos.

☛**Jogo 2**: *Jogo de Tiras nº 1* – número de participantes: 2 jogadores.

- Material para cada dupla:

- Uma tira com as letras do alfabeto. Veja o ANEXO 2 para você reproduzir a tira de letras.
- Dois dados como no jogo anterior (por exemplo, vermelho e azul).
- 2 pinos de cores diferentes (de preferência as mesmas dos dados).

- Regras:
  1. Cada um coloca seu pino na letra M
  2. Escolhe-se quem jogará com o dado vermelho e quem jogará com o azul. Quem jogar com o vermelho andará sempre para a direita da tira o número de casas correspondentes a sua jogada. Quem jogar com o azul, andará para a esquerda.
  3. Ganha quem primeiro chegar a uma das extremidades. Entende-se por chegar à extremidade um jogador obter um número de pontos maior ou igual ao necessário para atingir a última casa da tira, para o lado que está andando (outra regra para o fim do jogo pode ser estabelecida para os participantes).

☛**Jogo 3**: *Jogo de tiras nº 2* – número de participantes: 2 jogadores.

- Material para cada dupla:
  - Tira com o alfabeto, como no jogo anterior.
  - Roleta com 8 retângulos, 4 de cada cor (por exemplo, vermelho e azul). Veja o ANEXO 2 para você reproduzir a roleta para o jogo.
  - Pinos de cores diferentes.

- Regras:
  1. Cada jogador coloca seu pino na letra M.
  2. A sua vez o jogador gira a roleta e determina quantas casas e para que lado deve andar: para o lado direito se cair azul, para o esquerdo se cair vermelho.
  3. Ganha quem chegar mais perto de uma das extremidades após um número pré-determinado de jogadas (outra regra para o fim do jogo pode ser estabelecida para os participantes).

Observação: para se girar a roleta, podemos fazer um pequeno furo em seu centro, e introduzir aí um pequeno palito. O *ponteiro* da roleta pode ser um clip.

☛**Jogo 4**: *Jogo da Tira nº 3* – número de participantes: 2 jogadores.

- Material para cada dupla:
  1. Tira com números, vermelho à esquerda e azul à direita, tendo 0 ao centro. Cada casa é numerada a partir do zero. Veja o ANEXO 2 para você reproduzir a tira para o jogo
  2. 2 pinos de cores diferentes
  3. Roleta de duas cores, como no jogo anterior

- Regras: As mesmas do jogo anterior, sendo que agora os jogadores começam do zero.

☛**Atividades:**

1. Numa gincana de uma escola haviam 3 equipes participantes. A gincana consistia em 4 tarefas, cada uma valendo certo número de pontos. Para cada tarefa não cumprida, a equipe perdia o número de pontos correspondente a seu valor. De acordo com os dados abaixo, preencha a tabela e ache o total de pontos de cada equipe ao final de cada tarefa e a classificação das equipes ao final da gincana:
   - A primeira tarefa valia 3 pontos. Todas as equipes cumpriram essa tarefa
   - A segunda tarefa, de valor 2, foi cumprida somente pela equipe A
   - Só a equipe C não cumpriu a terceira tarefa, que valia 1 ponto
   - A última tarefa era um desafio; valia 4 pontos e só a equipe C conseguiu cumprir

-------------------------	EQUIPE A	EQUIPE B	EQUIPE C
TAREFA 1			
TAREFA 2			
TOTAL			
TAREFA 3			
TOTAL			
TAREFA 4			
TOTAL			

Classificação: 1º lugar -

2º lugar -

3º lugar -

2. Um comerciante constatou que, no mês de abril, havia R$20.000,00 em seu caixa. No mês de maio ele teve um lucro de R$50.000,00. Em junho ele teve um prejuízo de R$30.000,00. Em julho, o lucro foi de R$25.000,00. Em setembro o prejuízo foi muito grande: R$100.000,00. Em agosto não houve nem lucro nem prejuízo. Em outubro, o lucro foi de R$60.000,00.

a) Complete a tabela abaixo, com as informações fornecidas:

	LUCRO	PREJUÍZO	TOTAL
ABRIL			
MAIO			
JUNHO			
JULHO			
AGOSTO			
SETEMBRO			
OUTUBRO			

b) Coloque os dados da tabela anterior na tabela abaixo, usando caneta azul para escrever o lucro e caneta vermelha para escrever o prejuízo, preenchendo o total também em vermelho ou azul, conforme seja necessário:

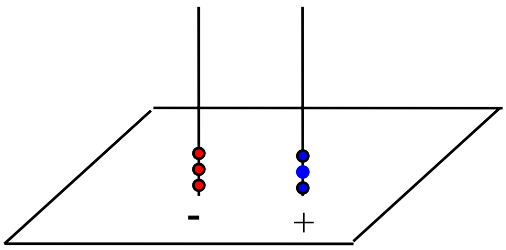
	LUCRO / PREJUÍZO	TOTAL
ABRIL		
MAIO		
JUNHO		
JULHO		
AGOSTO		
SETEMBRO		
OUTUBRO		

c) Coloque os dados da tabela acima usando caneta de uma só cor, e usando os sinais "+" ou "-", conforme for o caso:

	LUCRO / PREJUÍZO	TOTAL
ABRIL		
MAIO		
JUNHO		
JULHO		
AGOSTO		
SETEMBRO		
OUTUBRO		

CAPÍTULO 2 – OPERAÇÕES COM NÚMEROS INTEIROS

Queremos agora um material que nos auxilie nas operações com números inteiros. Usaremos o *ábaco de duas cores*, onde temos duas varetas colocadas verticalmente sobre uma peça lisa, horizontal. Trabalharemos com contas vermelhas e azuis, como mostra a figura abaixo:



Associamos a vareta com contas azuis ao sinal positivo e a vareta com contas vermelhas ao sinal negativo. A idéia básica é que uma mesma quantidade de pedras azuis e vermelhas se *cancelam*, isto é, fornecem um zero. Portanto, sempre iniciamos nosso ábaco com um zero: mesma quantidade de contas em cada uma das duas varetas.

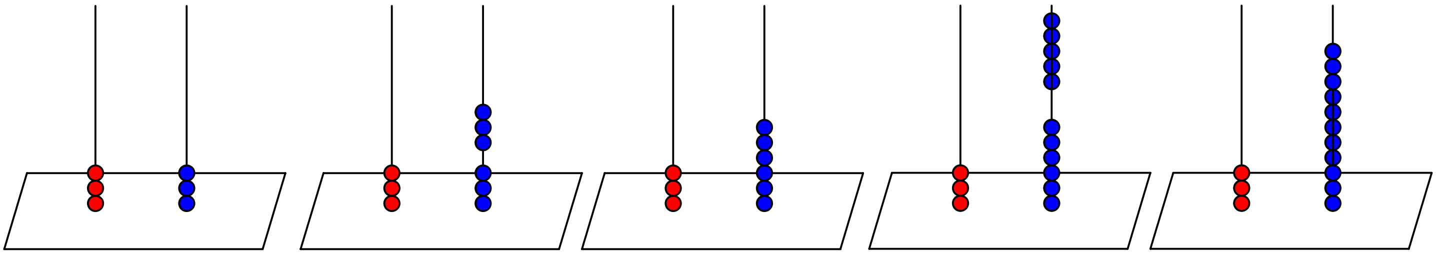
Usaremos as seguintes *regras*:

- somar ≡ acrescentar
- subtrair ≡ retirar
- multiplicar ≡ retirar ou acrescentar conjuntos do mesmo tipo

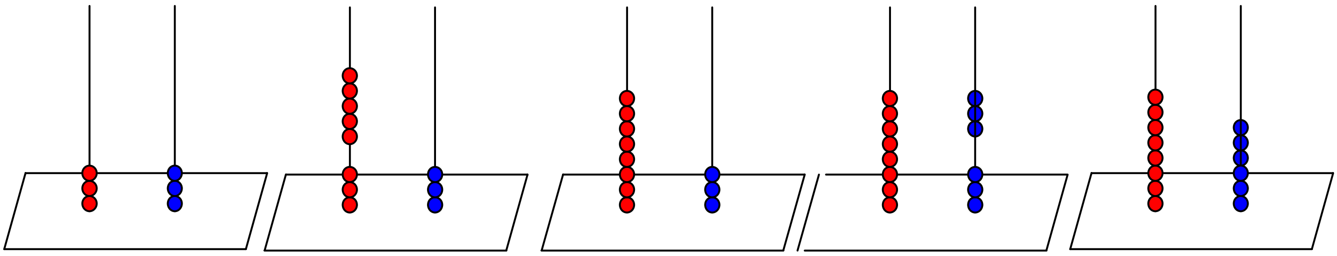
Para introduzir o *sinal negativo* no número sem confundir com a operação, usaremos um pequeno traço no lado superior esquerdo do número. Não necessitamos, assim, de parênteses quando tivermos um sinal que indica uma operação seguido de um número negativo. Como sempre, no entanto, o processo deve ser iniciado sem registro. A *leitura* do resultado da operação é feita contando quantas contas eu tenho *além do zero*, ou seja, além da posição de equilíbrio no ábaco.

☛**Atividade 1**: Adição com números inteiros: começo com um zero.

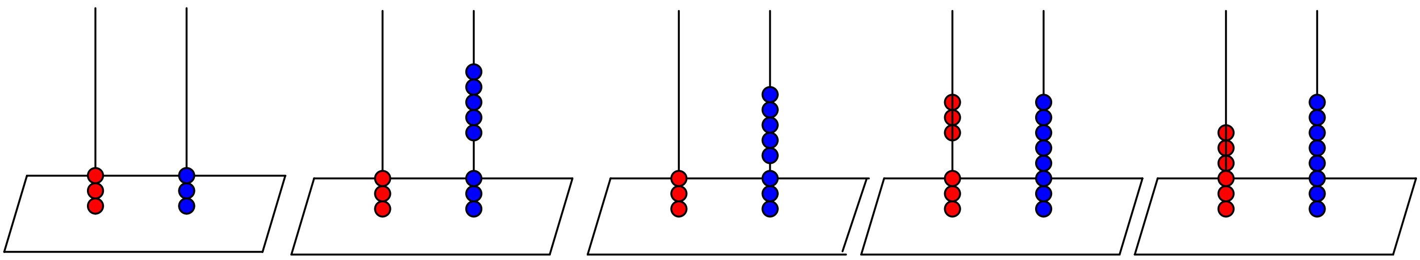
- 3 + 5: represento 3, colocando 3 azuis, e depois coloco mais 5 azuis. Obtenho 8 azuis: o resultado é 8



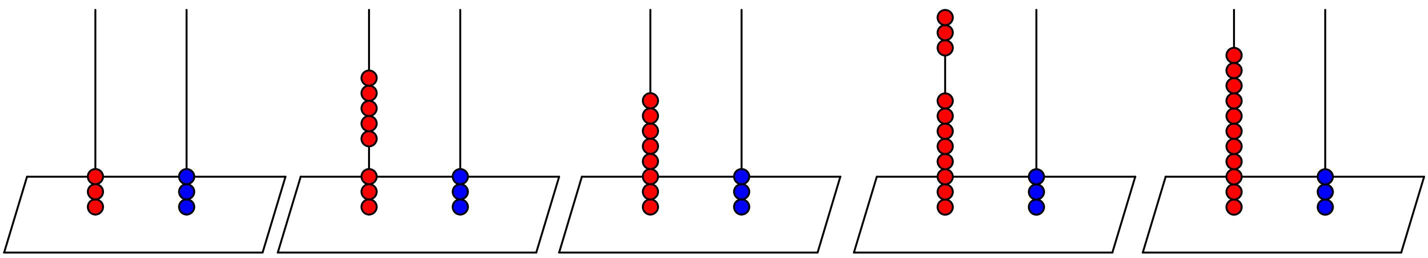
- ¯5 + 3: represento ¯5, colocando 5 vermelhas, e depois coloco 3 azuis. Obtenho 2 vermelhas: o resultado é ¯2



- 5 + ¯3: represento 5, colocando 5 azuis, e depois coloco 3 vermelhas. Obtenho 2 azuis: o resultado é 2

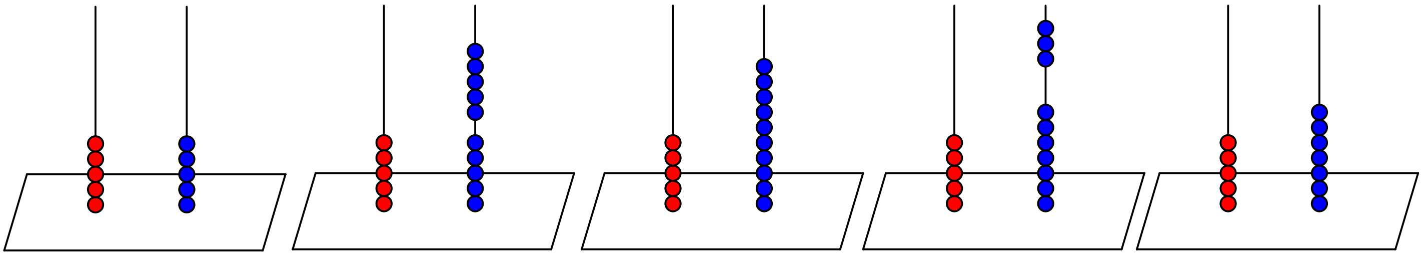


- ¯5 + ¯3: represento ¯5, colocando 5 vermelhas, e depois coloco mais 3 vermelhas. Obtenho 8 vermelhas: o resultado é ¯8

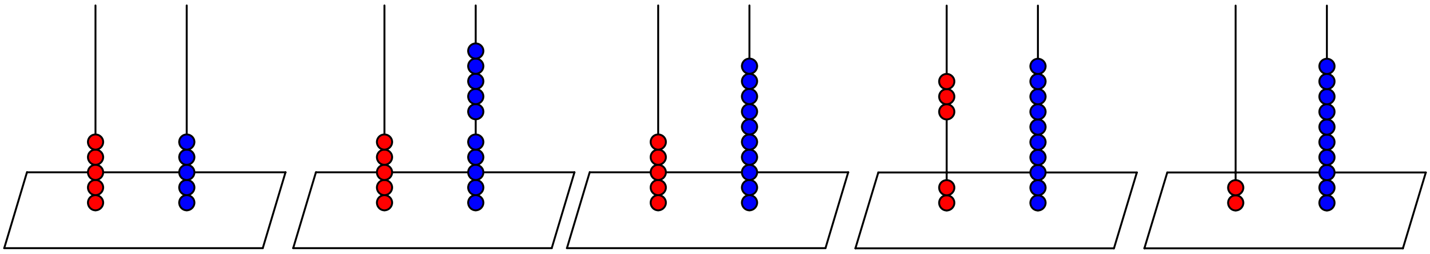


☛**Atividade 2**: Subtração com números inteiros: começo com um zero.

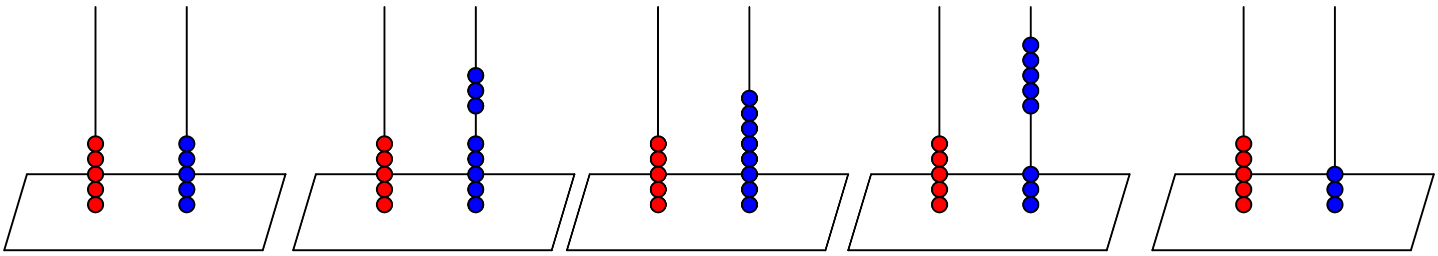
- 5 - 3: represento 5, colocando 5 azuis, e retiro 3 azuis. Obtenho 2 azuis: o resultado é 2



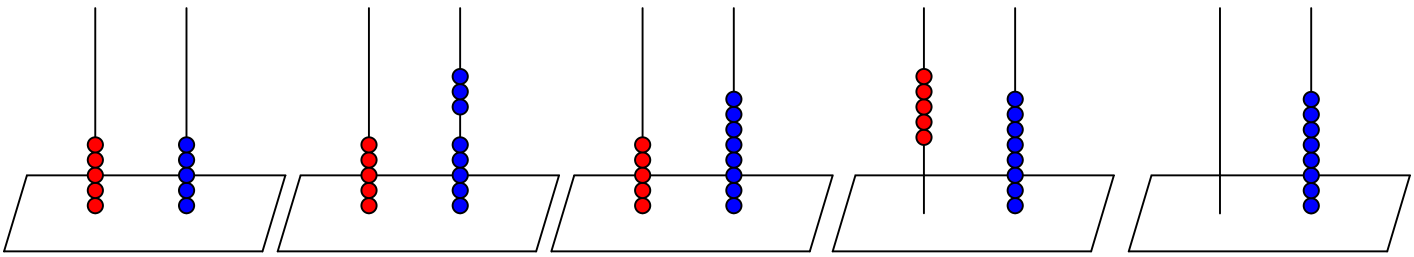
- $5 - {}^{-}3$: represento 5, colocando 5 azuis, e retiro 3 vermelhas. Obtenho 8 azuis: o resultado é 8



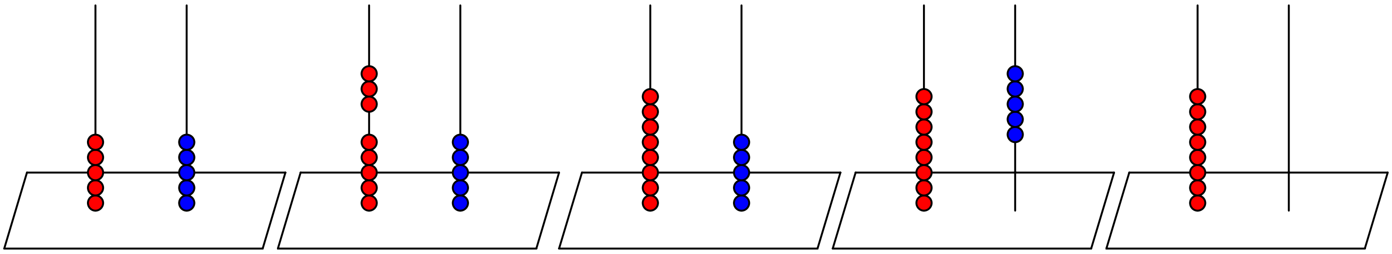
- 3 - 5: represento 3, colocando 3 azuis, e retiro 5 azuis. Obtenho 2 vermelhas: o resultado é ${}^{-}2$



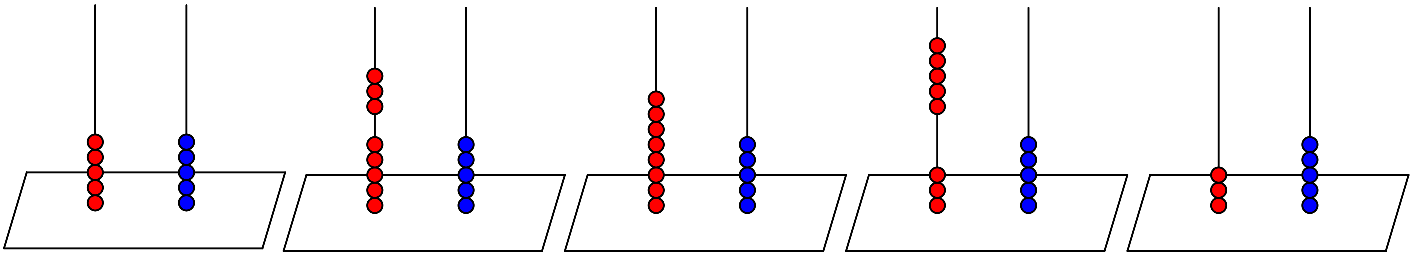
- $3 - {}^{-}5$: represento 3, colocando 3 azuis, e retiro 5 vermelhas. Obtenho 8 azuis: o resultado é 8



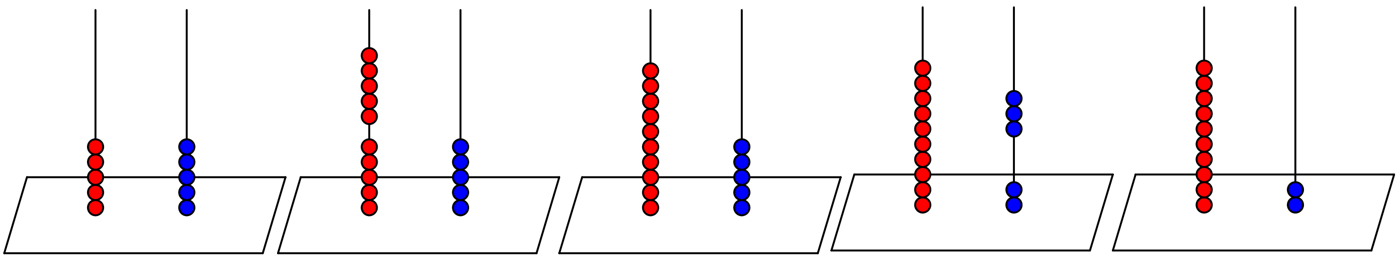
- $^{-}3$ - 5: represento $^{-}3$, colocando 3 vermelhas, e retiro 5 azuis. Obtenho 8 vermelhas: o resultado é $^{-}8$



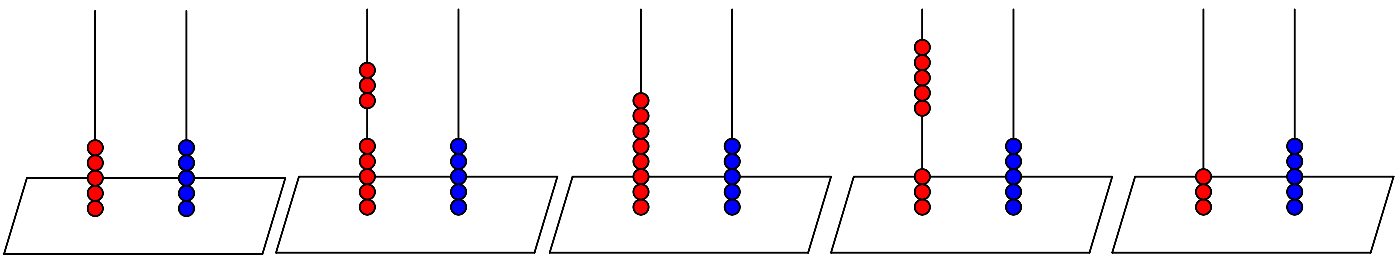
- $^{-}3$ - $^{-}5$: represento $^{-}3$, colocando 3 vermelhas, e retiro 5 vermelhas. Obtenho 2 azuis: o resultado é 2



- $^{-}5$ - 3: represento $^{-}5$, colocando 5 vermelhas, e retiro 3 azuis. Obtenho 8 vermelhas: o resultado é $^{-}8$



- $^{-}3$ - $^{-}5$: represento $^{-}3$, colocando 3 vermelhas e retiro 5 vermelhas. Obtenho 2 azuis: o resultado é 2.

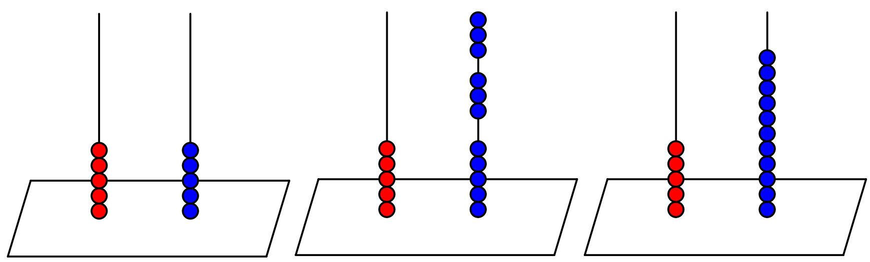


Observe que em algumas situações seremos *forçados* a acrescentar pedras a ambas as varetas porque não temos pedras suficientes para retirar (e não podemos *desequilibrar* o ábaco). Isto fica claro, por exemplo, na terceira das situações acima, dependendo de quantas contas tenho inicialmente no ábaco representando zero. Suponha que não temos contas no ábaco. Coloco 3 azuis para representar 3 e preciso retirar 5 azuis. Para isso ser possível, observo que 5 = 3 + 2: coloco mais duas azuis e, para não desequilibrar o ábaco, coloco também duas vermelhas: fico com 5 azuis e duas vermelhas, que representam 3, como antes. Agora posso retirar 5 azuis e o resultado que leio é 2 vermelhas, isto é, ${}^{-}2$.

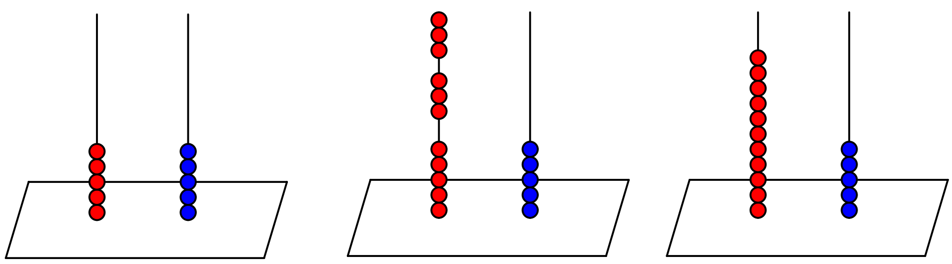
☛**Atividade 3**: Faça o aluno observar, através de exemplos, que $a + b = a - {}^{-}b$, que $a + b = b + a$, e que $a - b = {}^{-}b + a$.

☛**Atividade 4**: Multiplicação de números inteiros: começo com um zero.
Se queremos efetuar a operação Y × Z, se Y é positivo vamos acrescentar Y grupos de Z contas ao ábaco. Se Y é negativo, vamos retirar Y grupos de Z contas do ábaco.

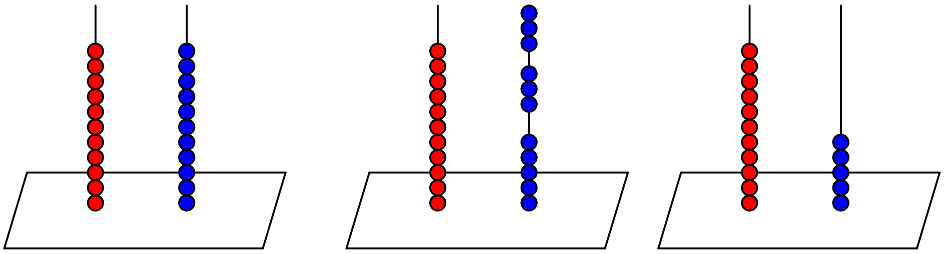
- 2 x 3: coloco 2 grupos de 3 contas azuis e obtenho 6 azuis - o resultado é 6.



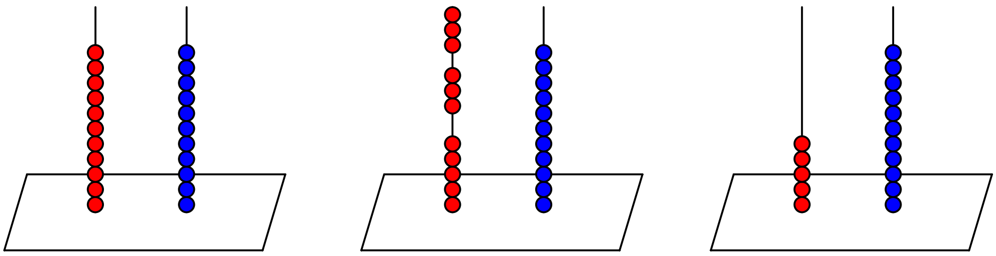
- 2 x ${}^{-}3$: coloco 2 grupos de 3 contas vermelhas e obtenho 6 vermelhas - o resultado é ${}^{-}6$.



- $^{-}2$ x 3: retiro 2 grupos de 3 contas azuis e obtenho 6 vermelhas - o resultado é $^{-}6$.



- $^{-}2$ x $^{-}3$: retiro 2 grupos de 3 contas vermelhas e obtenho 6 azuis - o resultado é 6.



Da mesma maneira que antes, haverá situações em que seremos forçados a acrescentar pedras a ambas as varetas porque não temos pedras suficientes para retirar (e não podemos desequilibrar o ábaco). Isto fica claro, por exemplo, na terceira das situações acima, dependendo de quantas contas tenho inicialmente no ábaco representando zero. Suponha que não temos contas no ábaco. Preciso retirar 3 grupos de 5 contas azuis. Para isso coloco 15 azuis e 15 vermelhas. Retiro as 15 azuis e o resultado que leio é 15 vermelhas, isto é, $^{-}15$.

☛**Atividade 5**: Faça seu aluno perceber, através de exemplos, a comutatividade da multiplicação.

☛**Atividade 6**: Divisão com números inteiros: começamos com um zero.

Devemos, como sempre, começar com operações exatas, isto é, sem resto. A divisão pode ser interpretada como a operação *contrária* à multiplicação: $a : b = c$ se $c \times b = a$, ou seja, b cabe em *a exatamente c vezes*. O problema é *caber um número negativo de* *vezes*. Por isso vamos pensar a operação $a : b =$ ق como sendo ق x $b = a$ e verificar o que acontece:

- 6 : 3 é a operação usual - qual é o número que multiplicado por 3 nos fornece 6; se acrescentarmos grupos de 3 contas azuis, estaremos com uma quantidade de contas azuis maior do que a que tínhamos antes, *que é o que desejamos* - nesse caso, então, devemos saber quantos grupos de 3 contas azuis devemos acrescentar para obter 6 contas azuis: precisamos acrescentar 2 grupos de 3 contas azuis. Portanto, 6 : 3 = 2
- $^{-}6 : 3$ - qual é o número que multiplicado por 3 nos fornece $^{-}6$; se acrescentarmos grupos de 3 contas azuis, estaremos com uma quantidade de contas azuis maior do que a que tínhamos antes, *que não é o que desejamos*: devemos, então, retirar grupos de 3 contas azuis; devemos saber quantos grupos de 3 contas azuis devemos retirar para obter 6 contas vermelhas: precisamos retirar 2 grupos de 3 contas azuis. Portanto, $^{-}6 : 3 = {}^{-}2$
- $6 : {}^{-}3$ significa saber qual é o número que multiplicado por $^{-}3$ nos fornece 6; se acrescentarmos grupos de 3 contas vermelhas, estaremos com uma quantidade de contas vermelhas maior do que a que tínhamos antes, *que não é o que desejamos*: devemos, então, retirar grupos de 3 contas vermelhas; devemos saber quantos grupos de 3 contas vermelhas devemos retirar para obter 6 contas azuis: precisamos retirar 2 grupos de 3 contas vermelhas. Portanto, $6 : {}^{-}3 = {}^{-}2$
- $^{-}6 : {}^{-}3$ significa saber qual é o número que multiplicado por $^{-}3$ nos fornece $^{-}6$; se acrescentarmos grupos de 3 contas vermelhas, estaremos com uma quantidade de contas vermelhas maior do que a que tínhamos antes, *que é o que desejamos*: devemos, então, acrescentar grupos de 3 contas vermelhas; devemos saber quantos grupos de 3 contas vermelhas devemos acrescentar para obter 6 contas vermelhas: precisamos acrescentar 2 grupos de 3 contas vermelhas. Portanto, $^{-}6 : {}^{-}3 = 2$

☛**Atividade 7**: Faça seu aluno perceber através de exemplos que $a : b = {}^{-}a : {}^{-}b$ e que $^{-}a : b = a : {}^{-}b$

Observe que com esse trabalho o aluno poderá inferir as regras de sinal para multiplicação e divisão de números inteiros, sem *decoreba*. Quando o aluno já dominar as divisões exatas, passamos para as divisões com resto.

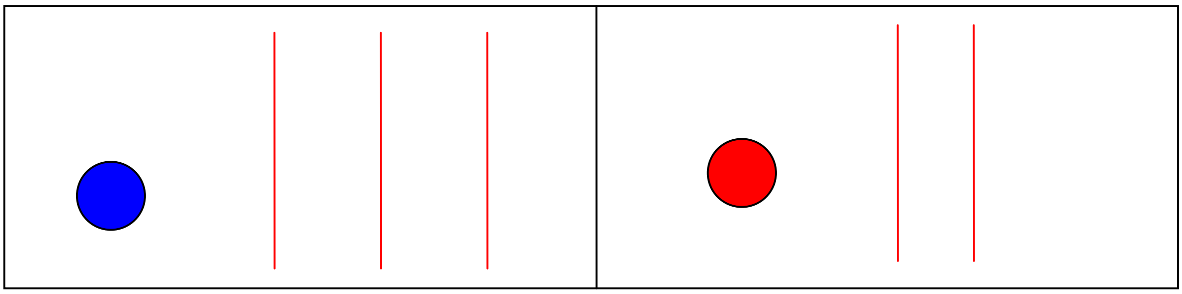
☛**Atividade 8**: Colocar os números inteiros na reta numérica - um número negativo é o *simétrico* de algum número positivo; isto significa que se temos o número negativo $^{-}3$ ele se encontra à esquerda do zero, em posição *parecida* com 3, que se encontra a 3 unidades de distância do zero, à direita do zero. Portanto, $^{-}3$ estará a 3 unidades de distância do zero, à esquerda do zero.

ANEXO 1 – RESOLUÇÃO DE EXPRESSÕES LINEARES

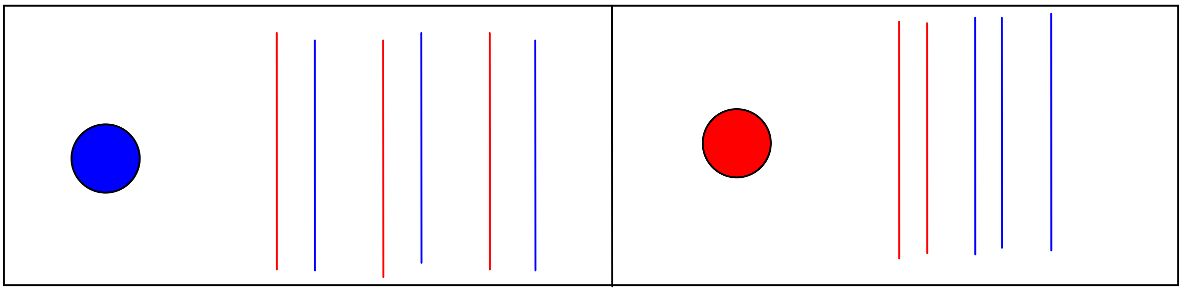
Temos diversas formas de trabalhar equações lineares no plano: como equações cujo gráfico é uma reta, como funções, ou algebricamente, obtendo valores que satisfazem a equação. Para trabalharmos dessa última forma, podemos utilizar canudos e fichas coloridos, para representar números e incógnitas, respectivamente, usando o mesmo conceito de *formar zeros* introduzido para operações com números inteiros. Admitiremos que a operação é a de adição (uma vez que a operação de subtração pode ser interpretada como uma adição com um número negativo), que o vermelho representa valores negativos e o azul representa valores positivos. Usaremos uma folha de papel dupla, onde cada termo da expressão está em uma das duas páginas da folha. Assim 3 canudos vermelhos e uma ficha azul de um lado e uma ficha vermelha e dois canudos vermelhos do outro estarão representando a equação

$$x -3 = -x - 2$$

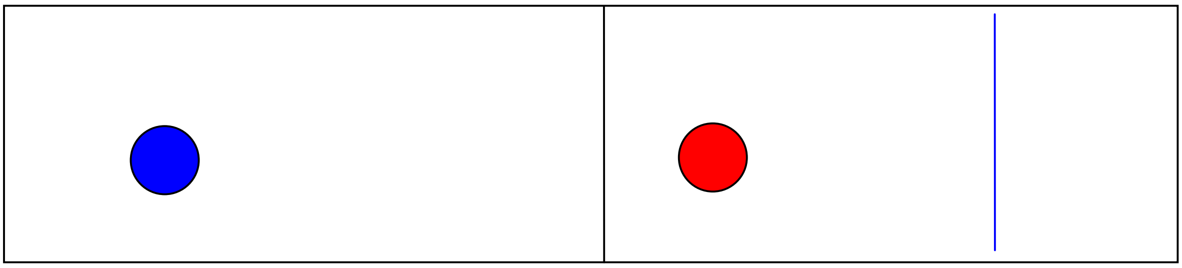
Temos uma idéia básica: *vermelhos e azuis se cancelam.* Observe que essa idéia segue, imediatamente, da idéia que utilizamos para operar com números negativos: é a idéia de formar *zeros*. Assim temos a representação



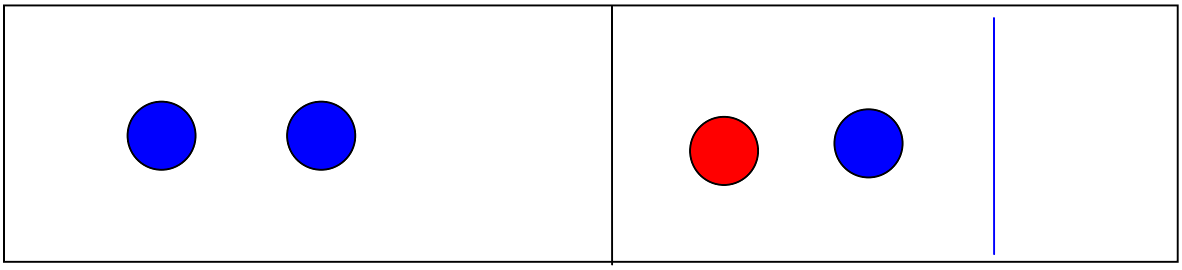
Queremos isolar as fichas numa das páginas . Para isso, iniciamos "isolando" os canudos, digamos, na segunda página. Para isso, acrescentamos 3 canudos azuis a cada lado:



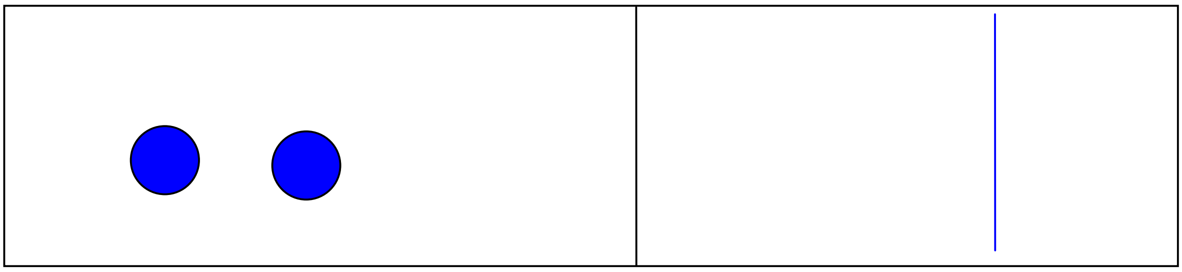
Cada canudo azul “anula” um canudo vermelho; quando isso acontece o par azul - vermelho é retirado:



Agora, para “juntar” as fichas num lado só, digamos na primeira página, acrescentamos, a cada lado, uma ficha azul:



Cada ficha azul “anula” uma vermelha e o par azul - vermelho é retirado:



Isto significa que cada ficha azul equivale a meio canudo azul. Portanto o resultado da equação é $x = \frac{1}{2}$.

Algebricamente obtemos a seguinte seqüência de passos:

$$x - 3 = -x - 2$$

$$x - 3 + 3 = -x - 2 + 3$$

$$x = -x + 1$$

$$x + x = -x + x + 1$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

É claro que devemos começar com expressões simples, trabalhando cada dificuldade a sua vez. Podemos utilizar uma seqüência de equações como abaixo:

- $x + 3 = 5$
- $x + 4 = 2$
- $x - 1 = 2$
- $x - 1 = -2$
- $x - 3 = -2$

Em seguida, podemos trabalhar com a incógnita também no membro à direita da equação:

- $2x + 3 = x + 5$
- $2x + 4 = x + 2$
- $2x - 1 = x + 2$
- $2x - 1 = x - 2$
- $2x - 3 = x - 2$

Numa terceira fase teremos expressões com a incógnita com sinal negativo num dos membros da equação.

É interessante trabalhar inicialmente apenas com o material, sem registro, e em seguida apresentar o registro que são as expressões algébricas, enfatizando cada propriedade das operações aritméticas utilizadas (adição, subtração, cancelamento, ...) com os exemplos com o material. Isto deverá facilitar, e muito, a compreensão do assunto, permitindo uma percepção melhor do que significa resolver uma expressão algébrica do primeiro grau.

ANEXO 2 – MATERIAL PARA O CAPÍTULO 1

TIRA DE LETRAS:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

TIRA DE NÚMEROS:

9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

ROLETAS: