Realização SBEM 15 anos SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

ESTRATÉGIAS E ERROS UTILIZADOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ALGÉBRICOS.

Raquel Santiago Freire, UFC, raquelufc@yahoo.com.br.
Bárbara de Sena Cabral, UFC, barbaradesena2@yahoo.com.br.
José Aires de Castro Filho, UFC, j.castro@ufc.br.

JUSTIFICATIVA

A álgebra é caracterizada como um conjunto de procedimentos matemáticos que nos permite representar e resolver problemas através dos quais somente com os conceitos aritméticos não conseguiríamos resolver. (Da Rocha Falcão, 1993). Os conteúdos da Álgebra se diferenciam dos aritméticos por possibilitar que procedimentos e relações sejam expressos de forma simplificada e geral através de "regras de procedimento" que têm por foco inicial estabelecer, expressar e manipular o próprio contexto (Booth, 1995).

Uma das visões da álgebra é a de "aritmética generalizada", pelo caráter que os símbolos operatórios assumem na resolução de equações. Enquanto na aritmética um símbolo de adição indica a soma entre as parcelas, na álgebra esse símbolo não indica necessariamente que esse processo (adição) será imediatamente efetuado. Outro exemplo é o símbolo de igualdade. Na aritmética, ele significa o resultado de uma operação e na álgebra, uma relação de equivalência entre dois membros da equação. Podemos perceber que a aritmética e a álgebra podem lidar com problemas semelhantes, no entanto, utilizam procedimentos e instrumentos conceituais diferentes.

Essa diferença entre a aplicação de conceitos aritméticos e algébricos dificulta a aprendizagem da álgebra, pois muitas vezes os alunos utilizam conhecimentos aritméticos para dar significado a conceitos algébricos. Além disso, há a falta de referenciais que dêem sentido aos símbolos matemáticos no campo da álgebra. Booth (1995) investigou os erros conceituais cometidos por alunos de 13 a 16 anos que já tinham alguma experiência em álgebra. Através desse estudo, verificou que os erros em problemas algébricos são semelhantes em quase todas as idades e constatou que essas crianças não sabem criar expressões formando respostas com símbolos matemáticos, pois não encontram um significado em respostas com letras. Por exemplo, em um problema como "some 3 a n" os alunos não consideram 3 + n uma resposta válida, mostrando dificuldades em aceitar procedimentos algébricos.

Muitas pesquisas têm apontado outras dificuldades sentidas por alunos durante a resolução de problemas algébricos bem simples, que exigiam a tradução de informações da linguagem escrita para a linguagem matemática formal. Essas pesquisas afirmam que os alunos geralmente se confundem ao expressar relações entre duas variáveis, acabando por indicar o contrário do que pretendem. Lochhead (1995), por exemplo, investigou as interpretações que os alunos de um curso de engenharia fizeram ao ler certos problemas algébricos e identificou que embora eles estejam no nível de ensino superior, não são capazes de interpretá-los da forma como o problema exige. Lochhead identificou dois principais erros de interpretação: a tendência dos alunos em repetir os dados de acordo com a ordem em que eles aparecem e a inferência de rótulos às variáveis.

O primeiro pode ser exemplificado abaixo:

Escreva uma equação usando as variáveis A e P para representar a quantidade de alunos e professores, respectivamente, para a seguinte afirmação: Há seis vezes mais alunos do que professores nesta universidade.

Exemplo 1 – tendência dos alunos em repetir os dados de acordo com a ordem que eles aparecem no problema.

Dois terços dos alunos da referida pesquisa responderam erradamente a equação 6A = P. Lochhead acredita que as concepções erradas concernentes à estrutura e à interpretação de problemas algébricos deve-se ao fato de que muitos alunos mostram uma forte tendência de estruturar o problema algébrico de acordo com a ordem do texto, ou seja, da esquerda para a direita.

O segundo tipo de erro encontrado, a inferência de rótulos às variáveis, reduz-se ao fato de alunos não interpretarem as variáveis como quantidade, em que P significa o "número de professores" e A o "número de alunos". Fazer uma interpretação errônea dessas concepções leva os alunos a conceber que 6A = P como seis alunos para cada professor (Lochhead, p. 147).

Os resultados de Lockhead refletem uma falha no ensino da álgebra, o qual parece não oferecer situações que levem os alunos a compreender a lógica da seqüência dos símbolos matemáticos. Os resultados discutidos acima também refletem que as dificuldades dos alunos parecem ser independentes do nível de escolaridade, idade ou nacionalidade.

Para saber melhor o motivo dessas dificuldades, se torna necessário identificar e investigar as estratégias e os tipos de erros que os alunos cometem durante resoluções de problemas algébricos. Essa linha de investigação pode ajudar a entender melhor tanto o conhecimento apresentado pelos alunos quanto às concepções errôneas acerca de determinados conceitos.

Em busca de superar certas dificuldades, algumas pesquisas apontam que os alunos procuram formas diferentes de resolução de problemas algébricos. Lessa (1996), investigou o pensamento algébrico em 40 alunos na faixa etária de 11 e 12 anos. A autora analisou os tipos de procedimentos que os alunos utilizaram durante a resolução de problemas e de equações. Esses problemas foram compostos de seis estruturas algébricas[1]. Os procedimentos foram classificados em três tipos: aritmético, intermediário e algébrico. No *aritmético*, os alunos utilizavam operações aritméticas ou atribuíam valor às incógnitas para uma posterior verificação. No procedimento *intermediário*, os alunos representam os problemas e as equações algebricamente, mas não a resolviam em função dessa representação e sim, usando contas aritméticas e atribuindo valor às incógnitas. Por último, no *algébrico*, os alunos faziam a manipulação algébrica e utilizavam regras formais ensinadas na escola. O trabalho de Lessa ajuda a caracterizar o pensamento do aluno. No entanto, não pode se restringir o pensamento algébrico somente ao uso de equações, nem o aritmético ao uso de operações. A atividade algébrica incorpora diversas formas de resolução e pode surgir até mesmo antes dos alunos terem o domínio de regras formais (Lins e Gimenez, 1997). Além disso, é importante investigar quais os erros cometidos pelos alunos ao resolver os mesmo tipos de problemas propostos por Lessa.

Com o intuito de investigar como os alunos resolvem certos problemas algébricos, o presente estudo tem como objetivo identificar e categorizar as estratégias e os tipos de erros que os alunos comentem como maior freqüência durante a resolução de problemas que envolvem conceitos algébricos.

---

[1] Essas estruturas serão explicadas posteriormente na metodologia desse trabalho.

METODOLOGIA

- Objetivo

Identificar e classificar as estratégias e os tipos de erro utilizados pelos alunos na resolução de problemas algébricos.

- Procedimentos metodológicos

Os dados foram coletados através da aplicação de um teste individual com 91 alunos de duas turmas da 7a. série de uma escola pública da cidade de Fortaleza. O teste (anexo 1) continha seis questões envolvendo estruturas algébricas simulando situações de igualdade com o uso de pesos. Essas estruturas foram baseadas em seis estruturas algébricas classificadas no estudo de Lessa (1996), elas se estruturam da seguinte forma:

- Estrutura 1: $ax + b = c$: a incógnita aparece uma vez em apenas um membro da equação.
- Estrutura 2: $ax + x = b$: a incógnita aparece duas vezes em um membro da equação.
- Estrutura 3: $a + x = bx$, a incógnita aparece em ambos os membros da equação.
- Estrutura 4: $ax + b = cx + d$, novamente a incógnita aparece em ambos os membros da equação.
- Estrutura 5: $ax + b = ax + cy + d$, há duas incógnitas, uma das incógnitas aparece em ambos os membros da equação e a outra incógnita aparece em apenas um membro da equação.
- Estrutura 6: $ax + by + c = dx + by + f$, duas incógnitas aparecem em ambos os membros da equação.

A análise quantitativa constou do cálculo da média de acertos bem como da freqüência de acertos para cada questão. A análise qualitativa incluiu uma categorização das estratégias utilizadas e dos tipos de erros mais comuns cometidos pelos alunos. Esses resultados serão apresentados a seguir.

RESULTADOS

Análise quantitativa

A tabela 1 mostra a média de acertos das duas turmas. Os dados foram analisados utilizando-se uma ANOVA. A diferença não foi significativa ($F=1,622$, $p<0,162$), portanto o restante das análise foi feito com todos os alunos.

Tabela 1 - Média de acertos no teste por turma

Turma	Média	Número de alunos	Desvio Padrão
Turma 1	1,55	33	1,91
Turma 2	2,10	58	1,76
Total	1,90	91	1,83

Conforme se observa na tabela 1, a média geral de acertos foi 1,90 (DP 1,83), o que representa 31,7% do teste. Esse desempenho pode ser considerado aquém do esperado, uma vez que os problemas eram situações simples de comparação que na sua maioria, poderiam ser resolvidos sem o uso de equações.

A análise da freqüência de acertos para cada questão (gráfico 1) revelou um significativo declínio no número de acertos por questão. O gráfico 1 aponta que nas questões cinco e seis o número de acertos cai respectivamente para 15 e 5 alunos. Embora os números sejam muito baixo, essa diminuição era esperada, uma vez que o nível de dificuldade do teste aumenta gradativamente.

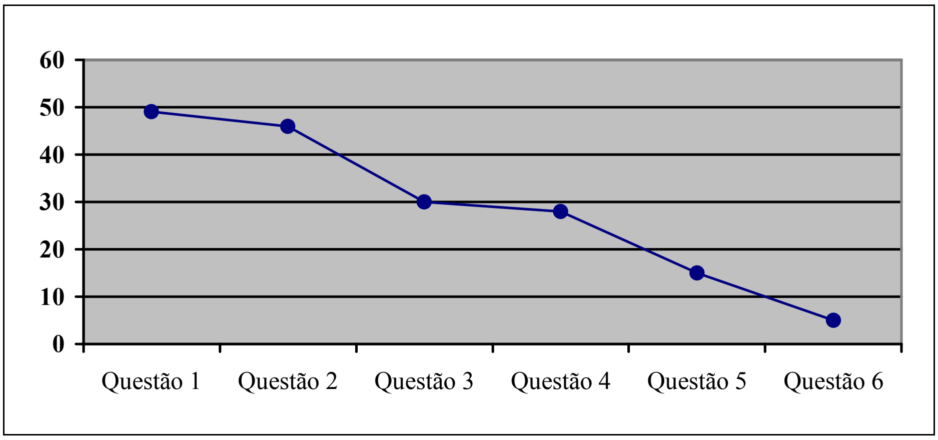

Gráfico 1 – Freqüência de acertos por questão

Uma outra análise feita foi com relação à freqüência de questões não resolvidas. O gráfico 2 mostra que essa freqüência cresce consideravelmente nas últimas questões do teste. Na questão 1 a freqüência de questões não resolvidas é de apenas 8 alunos enquanto que na questão 6 essa freqüência sobe para 53. Isso nos permite concluir que à medida que as questões vão se tornando mais difíceis, a maioria dos alunos não tentam resolvê-las.

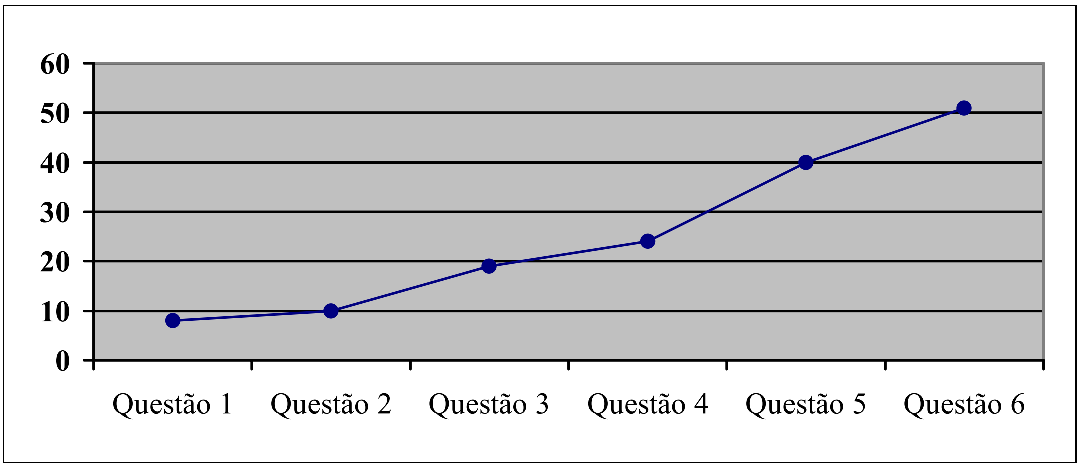

Gráfico 2 – Freqüência de questões não resolvidas

Análise qualitativa

Categorização das estratégias

Além da média de acertos, foram analisadas também as estratégias utilizadas pelos alunos na resolução das questões. As mesmas foram agrupadas nas seguintes categorias: simbólica, numérica, icônica, mista e outras estratégias. A definição das mesmas será dada a seguir. Em cada uma delas, traremos exemplos de estratégias dos trabalhos dos alunos quando resolviam a questão 2 (estrutura 2).

> *Questão 2 - Raquel e Gisele foram à feira comprar farinha. Raquel comprou dois sacos de farinha numa barraca e três sacos de farinha em outra barraca. Gisele comprou 250 gramas de farinha. Sabendo que elas compraram a mesma quantidade de farinha, quantas gramas de farinha tinham em cada saco que Raquel comprou?*

Simbólica

Chamamos uma estratégia de simbólica quando envolve a resolução através do uso de equações. Um exemplo dessa estratégia está dado abaixo:

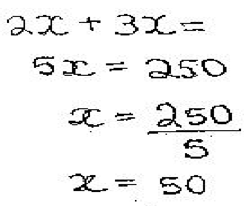

Figura 1 – Exemplo de estratégia simbólica.

O exemplo acima mostra que o aluno estrutura a equação e a resolve corretamente. Todos os alunos que usaram essa estratégia acertaram o problema. No entanto, essa associação não é sempre encontrada. A literatura registra muitos casos de alunos que usam equações e resolvem os problemas de forma errônea (Castro-Filho, Leite, Freire & Paschoal, 2003).

Numérica

As estratégias numéricas envolvem apenas o uso de números e operações aritméticas. Exemplo:

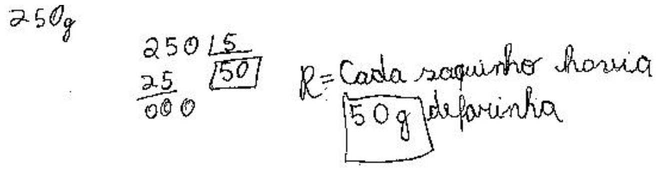

Figura 2 – Exemplo de estratégia numérica (acerto).

Em nosso estudo, também foi encontrada uma associação entre usar a estratégia numérica e dar a resposta errada, conforme mostra o exemplo abaixo:

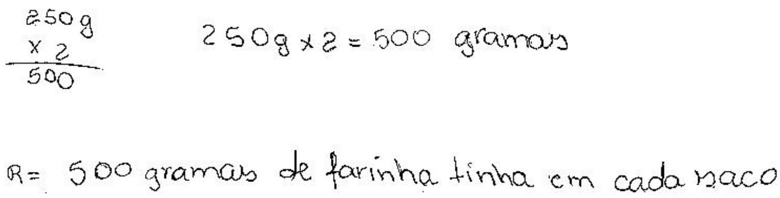

Figura 3 – Exemplo da estratégia numérica (erro).

Icônica

A estratégia icônica significa que o aluno utilizou-se de figuras para representar as quantidades e relações envolvidas nos problemas. Algumas vezes, essas figuras representavam uma balança de dois pratos, como no exemplo a seguir:

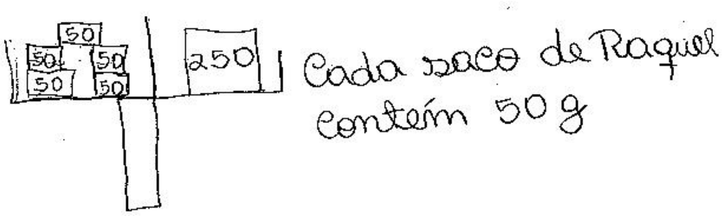

Figura 4 – Exemplo de estratégia icônica (uso da balança).

Outras vezes, apenas as quantidades envolvidas nos problemas eram representadas através de figuras, sem conterem uma representação da balança. O seguinte exemplo ilustra esse uso:

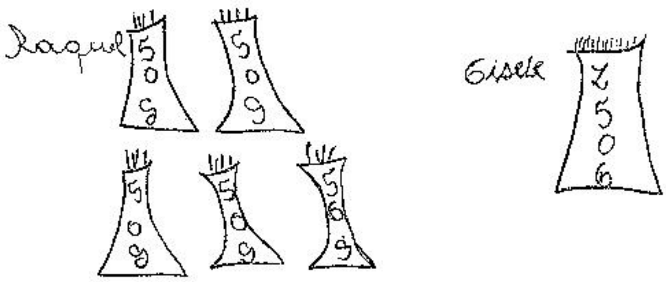

Figura 05 – Exemplo de estratégia icônica (uso de pesos).

Mistas

A Estratégia mista significa o uso combinado de estratégias simbólicas, numéricas ou icônicas. Em alguns casos, essa combinação era na mesma representação, como no exemplo abaixo:

Figura 06 – Exemplo de estratégia mista na mesma representação.

Em outras ocasiões, os alunos resolviam o problema usando duas estratégias distintas, por exemplo, uma icônica e uma numérica.

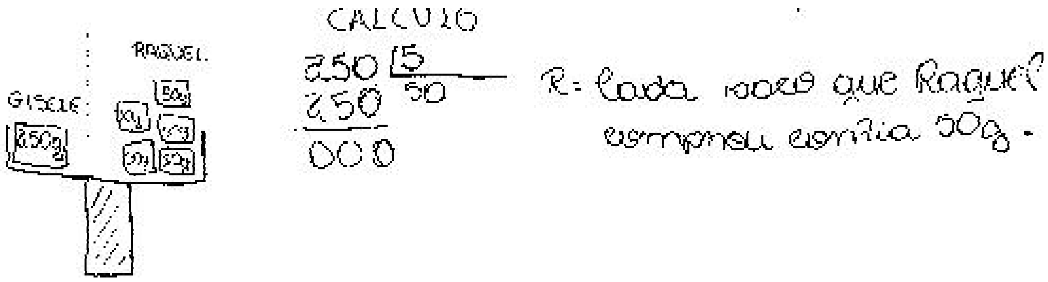

Figura 07 – Exemplo de estratégia mista em representações diferentes.

Outras estratégias

Chamamos de outras estratégias, aquelas que têm menor significado ou que apareceram muito pouco, de modo a não poderem ser agrupadas em nenhuma categoria. Aparecem aqui, os casos de alunos que colocaram a resposta e explicaram o cálculo mental realizado.

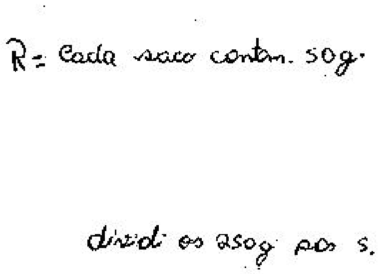

Figura 08 – Exemplo de outras estratégias com resposta explicativa

Há também casos em que o aluno tenta resolver o problema através de regra de três.

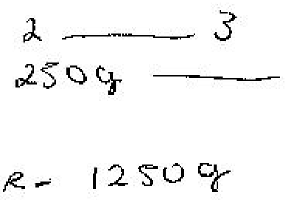

Figura 09 – Exemplo de outras estratégias com tentativa de regra de três

Em alguns dos testes, não foi possível identificar a estratégia utilizada, pois o aluno colocou apenas a resposta. Em muitos desses casos, o aluno pode ter feito cálculo mental, no entanto, não foi possível inferir o raciocínio usado na resolução.

Após a classificação das estratégias, analisamos a freqüência das mesmas por questão. O gráfico 3 mostra o resultado dessa análise. Ressaltamos que foram excluídos os problemas sem nenhuma resposta e por isso os valores estão apresentados em porcentagem, ao invés de valores absolutos.

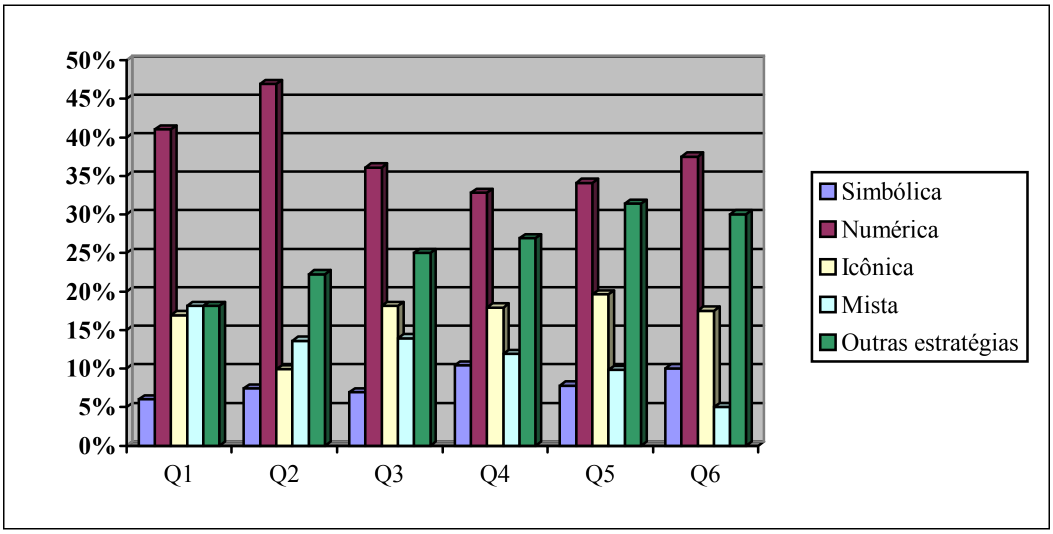

Gráfico 3 – Porcentagem das estratégias

Observa-se que a estratégia numérica é a mais buscada pelos alunos, variando entre 34,1% (questão 5) e 46,9% (questão 2). Outra categoria que aparece com muita freqüência é a de outras estratégias. Em seguida, temos respectivamente as estratégias icônica e mista. A estratégia simbólica é a que apresenta a menor porcentagem de utilização nas questões. Esse é um dado preocupante, uma vez que desejamos que os alunos dominem tal forma de resolução dos problemas na escola, principalmente levando-se em consideração que esses alunos encontram-se na sétima série.

Categorização dos erros

Além das estratégias, analisamos também os tipos de erros cometidos pelos alunos durante a resolução das questões. Os mesmos foram agrupados nas seguintes categorias: soma dos dados do problema, erro de interpretação, erro no algoritmo, outra operação e erro não identificado. Para a definição dos tipos de erros será dada exemplos da questão 3.

Questão 3 - Dona Isaura tem uma barraca na feira e usa uma balança para pesar os produtos. Em uma de suas vendas colocou 300g de arroz mais um saquinho de arroz em um dos pratos da balança. E no outro colocou 4 saquinhos de arroz. Se a balança ficou em equilíbrio, quanto pesa cada saquinho de arroz? Lembre-se que todos têm o mesmo peso.

Soma dos dados do problema

Nessa categoria o aluno apenas soma os valores numéricos encontrados no problema. Observe abaixo como o aluno resolveu a questão 3.

Figura 10 – Exemplo de soma dos valores numéricos presentes no problema.

Interpretação

Nessa categoria o aluno interpreta o problema de forma diferente e resolve corretamente para esta interpretação. Observe no exemplo abaixo, que o aluno interpretou a questão ao seu modo. De acordo com o desenho da balança podemos perceber que o aluno interpretou o problema como se em cada lado da balança os pesos devessem ter o mesmo valor. A interpretação esperada era que todos os sacos dos dois lados tivessem o mesmo peso.

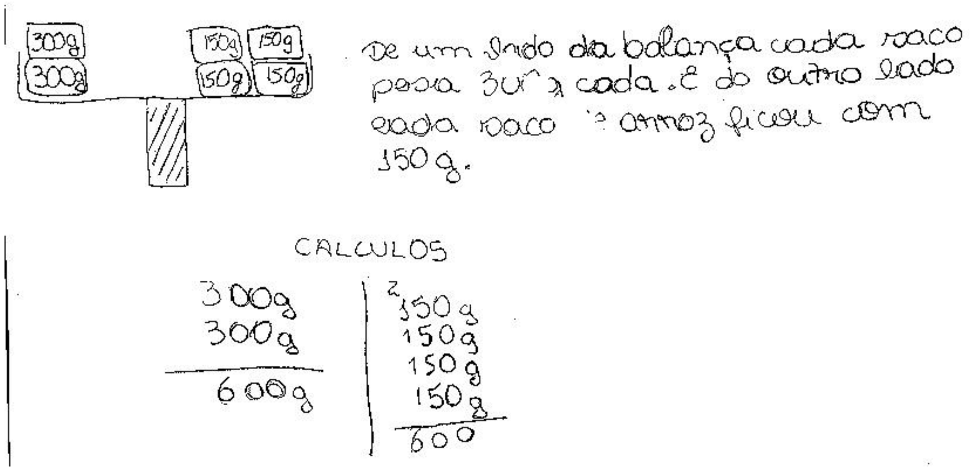

Figura 11 – Exemplo de erro de interpretação.

Erro no algoritmo

Esse erro foi categorizado como erro no procedimento de resolução ou de cálculo.

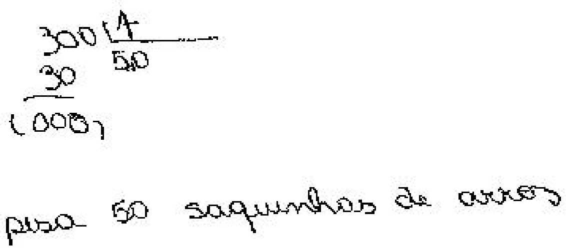

Figura 12 – Exemplo de erro no algoritmo.

Note-se que no exemplo acima, o aluno arma a operação de divisão (300/4) mas erra na execução do algoritmo.

Outras operações

Nessa categoria, classificamos aqueles alunos que resolveram os problemas fazendo diversas operações de forma aleatória. No exemplo abaixo percebemos que na primeira operação o aluno multiplicou o número 300 (trezentos) por 4 (quatro), valores fornecidos pelo problema. Em seguida, desprezou o resultado da operação e adicionou quantidades aleatórias ao valor 300 (trezentos). O aluno não deu uma resposta definitiva ao problema.

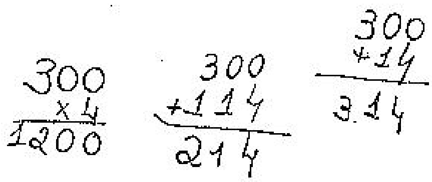

Figura 13 – Exemplo de resolução utilizando diversas operações.

Erro não identificado

Chamamos de erro não identificado aquele aluno que durante a resolução colocou somente a resposta e ela estava errada. Essa categoria foi classificada dessa forma, pois não pudemos inferir nenhum raciocínio por parte do aluno.

Após classificação dos tipos de erros, analisamos a freqüência destes por questão. O gráfico 4 mostra o resultado dessa análise. Ressaltamos que foram excluídos do gráfico os problemas não resolvidos e por isso os valores estão apresentados em porcentagem, ao invés de valores absolutos.

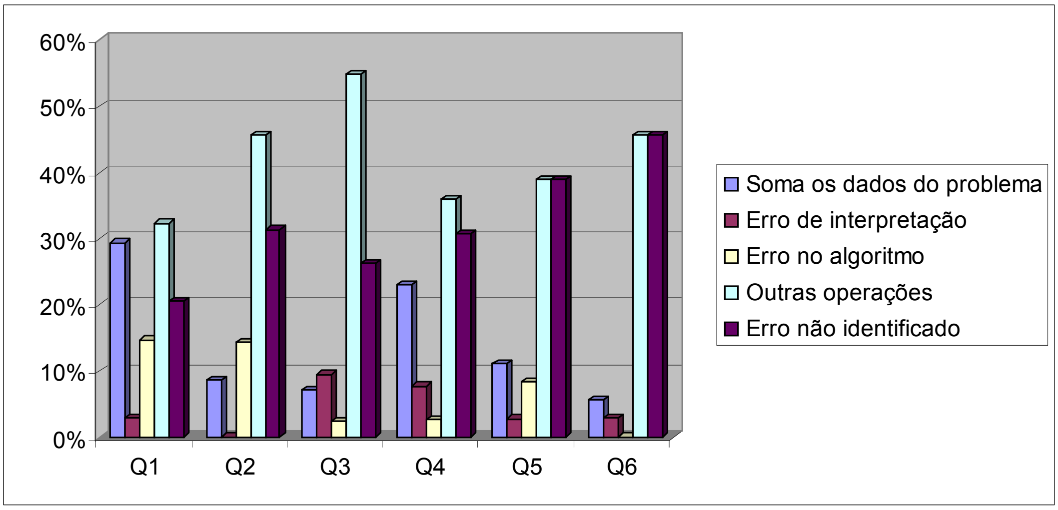

Gráfico 4 – Porcentagem dos erros

O tipo de erro mais freqüente é o de outras operações. Outro erro freqüente é a soma dos dados do problema, que aparece em maior quantidade nas questões 1 e 4. Esse dado coincide com o achado de estudos anteriores realizados por Vasconcelos, Freire e Castro-Filho (2003) e Schappo, Ponte-Filho e Castro-Filho (2003) em que encontra-se o mesmo tipo de erro na resolução de problemas aritméticos. Considera-se preocupante os alunos utilizarem qualquer operação de forma aleatória para resolver problemas algébricos o que indica pouca interpretação da situação proposta.

CONCLUSÃO

Analisar as estratégias utilizadas e os tipos de erros mais freqüentes durante a resolução de problemas envolvendo conceitos algébricos auxilia a obter uma visão geral da situação dos alunos quanto ao desenvolvimento desses conceitos durante a transição do pensamento aritmético ao pensamento algébrico. Isso vem a auxiliar o professor na compreensão do raciocínio dos alunos.

Embora o desempenho dos alunos possa ser considerado baixo para a série em que se encontram, achamos importante destacar que os professores precisam conhecer essas formas de pensamento dos alunos e considera-las como um ponto de partida para elaboração do pensamento algébrico.

Os achados desse estudo foram encontrados na aplicação individual e resolução escrita dos testes. Precisa-se investigar ainda como os alunos resolveriam os mesmos problemas em uma situação de entrevista clinica, na qual o cálculo mental e outras formas de raciocínio pudessem ser investigadas.

Palavras-chaves: Educação Matemática – Conceitos algébricos – Resolução de Problemas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BOOTH, R. L. Dificuldades das crianças que se iniciam com álgebra. In: COXFORD, A. F. & SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

CASTRO-FILHO, J. A. LEITE, M. A. FREIRE, R. S & PASCHOAL, I. V. A. **Balança Interativa: um software para o ensino da Álgebra.** Anais do XVI Encontro de Pesquisa Educacional do Norte Nordeste – EPENN, Aracaju, 2003.

DA ROCHA FALCÃO, J. T. (1993). A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. Em Schillieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs.). **Estudos em Psicologia da Educação Matemática**. Recife: Ed. Universitária da UFPE.

LESSA, M. M. L. **Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciação à álgebra: um estudo comparativo**. Dissertação de Mestrado. UFPE. Recife, 1996

LINS, R. C & GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus Editora, 1997.

LOCHHEAD, J. & MESTRE, J. P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas**.** Em COXFORD, A. F. & SHULTE, A. P. (org.). **As idéias da Álgebra.** São Paulo: Atual, 1995.

SCHAPPO, G. & PONTE-FILHO, M. H. L. **Erros cometidos por alunos do primeiro e segundo ciclo em problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.** Anais do XVI Encontro de Pesquisa Educacional do Norte e Nordeste – EPENN, Aracaju, 2003.

VASCONCELOS, N. P. & FREIRE, R. S. **Investigando o desempenho em problemas de estruturas aditivas e multiplicativas.** Anais do XVI Encontro de Pesquisa Educacional do Norte Nordeste – EPENN, Aracaju, 2003.

RELAÇÃO DE ANEXOS
ANEXO 1

Lista de problemas

E.E..F.M. Roberto Barreto (Pseudônimo).
Aluno:_________________________________ Série: _______________

1. Uma balança está em equilíbrio. Um dos pratos contém um saquinho de 100 g e dois saquinhos de pesos iguais desconhecidos. O outro prato contém 500g. Qual o peso de cada saquinho?

2. Raquel e Gisele foram à feira comprar farinha. Raquel comprou dois sacos de farinha numa barraca e três sacos de farinha em outra barraca. Gisele comprou 250 gramas de farinha. Sabendo que elas compraram a mesma quantidade de farinha, quantas gramas de farinha tinham em cada saco que Raquel comprou?

3. Dona Isaura tem uma barraca na feira e usa uma balança para pesar os produtos. Em uma de suas vendas colocou 300g de arroz mais um saquinho de arroz em um dos pratos da balança. E no outro colocou 4 saquinhos de arroz. Se a balança ficou em equilíbrio, quanto pesa cada saquinho de arroz? Lembre-se que todos têm o mesmo peso.

4. Carla e Patrícia foram à feira comprar açúcar para fazer uns docinhos. Carla comprou 400 gramas de açúcar e dois sacos de açúcar. Patrícia comprou 200 gramas de açúcar e quatro sacos de açúcar. Sabendo-se que elas compraram a mesma quantidade de açúcar, quantas gramas pesa cada saco que elas compraram?

5. Gabriel foi ao supermercado com seu irmão Rafael. Gabriel comprou 1 pacote de queijo mussarela e 900g de queijo prato. Rafael comprou 1 pacote de queijo mussarela, 100g de queijo prato e 4 sacos de queijo parmesão. Sabendo que os dois irmãos compraram a mesma quantidade de queijo, qual o peso de cada saco de queijo parmesão?

6. Seu Ernesto e seu Antonio foram comprar feijão. Seu Ernesto comprou 900g de feijão preto, um pacote de feijão mulatinho e um pacote de feijão verde. Seu Antonio comprou 200g de feijão preto, um pacote de feijão mulatinho e três pacotes de feijão verde. Se cada pacote de feijão do mesmo tipo tinha a mesma quantidade, quantas gramas de feijão verde têm em cada pacote?