VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

APRENDENDO TESSELAÇÕES DE FORMA LÚDICA

Marli Regina dos Santos – Universidade Estadual Paulista
marliregs@hotmail.com
Claudemir Murari – Universidade Estadual Paulista
murari@linkway.com.br

Introdução

As tesselações do plano se constituem num recobrimento do mesmo, sem deixar lacunas ou sobreposições. Nosso estudo refere-se a tesselações por polígonos, regulares ou não.

A palavra *tesselation*, no português, corresponde ao vocábulo *tessela*, que indica a pavimentação de uma região através de peças de mosaico. Utilizamos, então, a palavra tesselação pois, de acordo com Barbosa (1993), *tecelação* (de tecer – entrelaçar fios) não teria o mesmo sentido.

É possível explorar vários assuntos relacionados ao ensino de Geometria, de uma forma criativa e atraente, através de atividades que envolvem tesselação.

O ensino de Geometria proporciona a exploração do espaço físico e desenvolve a observação e a percepção de semelhanças, diferenças e regularidades. Também podemos estabelecer sua conexão com as outras áreas da Matemática, desenvolvendo, por exemplo, noções de Álgebra e Aritmética. Além disso, ela pode se relacionar com as outras áreas do conhecimento, especialmente com a arte, através da exploração das formas e características de objetos, obras artísticas, pinturas, desenhos, mapas, formas encontradas na natureza, entre outras criações humanas ou naturais.

Apesar da importância do ensino de Geometria, e de, na sua maioria, os professores considerarem a relevância deste tema para a boa formação do aluno, há muitas carências materiais e metodológicas para superar as dificuldades de efetivação deste ensino, como foi verificado por Perez (1991), em seu estudo sobre o cotidiano dos professores.

Na maioria dos livros didáticos os conteúdos de Geometria são pouco abordados, estão no final e dão muita ênfase à nomeação e classificação dos entes geométricos. Não há ligação com uma aplicação prática.

Ensinar tesselações de forma lúdica, através da manipulação de jogos, oferecerá aos alunos oportunidade de medir, transformar, comparar, classificar e arriscar suas intuições. Assim, acreditamos poder colaborar para que o ensino de Geometria seja mais prazeroso tanto para o aluno quanto para o professor, buscando desenvolver no estudante a habilidade de resolver problemas, escolares ou não, favorecendo seu pensamento crítico e autônomo.

Justificativa

Os jogos, se convenientemente planejados, são recursos pedagógicos eficazes para a construção do conhecimento matemático. Três aspectos podem justificar seu uso em sala de aula: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais.

Tanto nos jogos quanto na matemática temos regras, instruções, operações, definições, deduções, desenvolvimento, utilização de normas e novos conceitos (resultados).

Os jogos que abordamos neste trabalho possibilitam que habilidades referentes a dedução, indução, estratégia e pensamento criativo sejam desenvolvidas. Os jogos e curiosidades matemáticas, quando utilizados em sala de aula, promovem a solidariedade e a interação dos alunos, aumentam a motivação para a aprendizagem e desenvolvem a criatividade, a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção e a linguagem.

Moura (1991) afirma que: "o jogo aproxima-se da matemática via desenvolvimento de habilidades de resolução de problemas". Devemos escolher jogos que estimulem a resolução de problemas, principalmente quando o conteúdo a ser estudado for abstrato, difícil e desvinculado da prática diária.

A estratégia de ensino da Matemática através da Resolução de Problemas tem suas origens no trabalho de G. Polya (1991). Para ele, "resolver um problema é encontrar os meios desconhecidos para um fim nitidamente imaginado". Dante (1988) aponta alguns objetivos na utilização desse método, dentre os quais destacamos: fazer o aluno pensar produtivamente e desenvolver seu raciocínio equipando-o com estratégias para resolver problemas, além de tornar as aulas de Matemática mais interessantes e desafiadoras.

Esses objetivos afinam-se com uma proposta que inclui atividades lúdicas, pois estas devem convidar os alunos para desafios motivadores. No seu desenvolvimento, o professor não é o detentor do saber, mas um companheiro de aprendizagem, que sugere opções e alternativas. Sua atenção e entusiasmo pelas descobertas dos alunos são fundamentais.

Assim, o professor deve estimular a autonomia do aluno através de questionamentos, evitando dar respostas prontas para suas dúvidas. Ele será responsável pela orientação das atividades, cabendo-lhe analisar a interação dos alunos, identificar conceitos que possam estar equivocados e promover a redescoberta.

Os jogos matemáticos exigem um plano de ação que permita a aprendizagem dos conceitos. Logo, deve-se destinar um horário dentro do planejamento, onde o professor, juntamente com outros de sua área, possa explorar todo o potencial dos jogos, processos de soluções e discussões sobre caminhos que podem surgir.

O uso do jogo em sala de aula requer uma mudança de atitude em relação ao conhecimento do aluno. Busca-se explorar seus conhecimentos prévios e criar situações que estimulem o "arriscar", pois através de tentativas e erros o aluno encontrará a solução para o problema proposto. É importante que os alunos registrem as soluções e tentativas frustradas, pois isto favorece a articulação de suas idéias.

A seguir, comentaremos cada jogo e apresentaremos uma sugestão de atividade com o mesmo.

<u>Kit Polígonos</u>

É composto por um conjunto que contém cerca de 50 polígonos regulares e irregulares, com mesma medida de lados, feitos em papel cartão e colorido dos dois lados (fig.1).

Em um estudo preparatório para o tema tesselações, Murari (1999) sugere o uso desse Kit, o qual gera atividades interessantes.

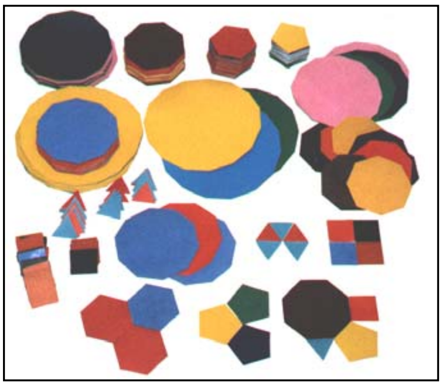


fig.1

Com o uso do Kit os alunos descobrem, através da investigação sobre os ângulos vértices dos polígonos utilizados, algumas tesselações do plano por polígonos regulares ou não. Assim, o estudo dos elementos de um polígono e suas propriedades, pode ser realizado de forma lúdica.

Para maior precisão na confecção das peças é interessante que elas sejam construídas através do software Cabri Géomètre II, impressas em papel cartão ou cartolina (próprio para uso em impressora) e recortadas com muito cuidado.

Atividade

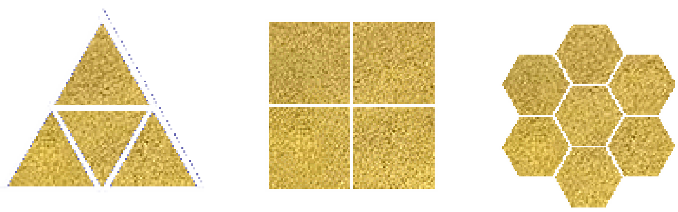
Cada grupo recebe um Kit e deve pavimentar parcialmente o plano obedecendo as regras:

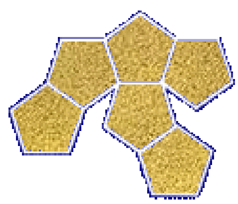
- Os vértices devem coincidir sempre num mesmo ponto, e
- Não deve haver espaço nem sobreposição entre os polígonos.

Pedimos aos alunos que verifiquem, usando um só tipo de polígono de cada vez, quais pavimentam o plano e quais não pavimentam.

Através de questionamentos, eles devem descobrir que é necessário que a soma dos ângulos vértices num arranjo de polígonos seja 360°. Portanto, será necessário que os alunos se familiarizem com o cálculo do ângulo interno de um polígono.

Com isso, chegarão à conclusão que pavimentam o plano: triângulo equilátero, hexágono regular, quadrado (denominadas pavimentações regulares ou platônicas) (fig.2) e quadrilátero irregular. Não pavimentam o plano os seguintes polígonos regulares: pentágono (fig.3), octógono, decágono, dodecágono, etc.





Pavimentações Platônicas

fig.2

fig.3

Em seguida, pode-se propor uma atividade semelhante à anterior, mas utilizando mais de um tipo de polígono.

Avançando um pouco mais no assunto sobre pavimentações, devemos sugerir que verifiquem se um mesmo arranjo (com a mesma disposição dos polígonos) estende-se por todo o plano. Eles verificarão a impossibilidade de alguns arranjos estenderem-se por todo o plano, mesmo quando a soma dos ângulos vértices ao redor de um nó é 360°. É o caso do arranjo composto por dois pentágonos e um decágono regulares.

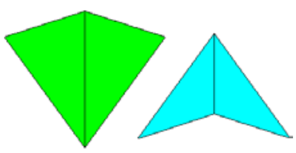
Neste momento podemos explicar aos alunos que uma pavimentação é semi-regular quando é composta por mais de um tipo de polígono, porém, dispostos sempre num mesmo arranjo em cada vértice.

Alguns arranjos podem parecer possíveis quando a soma dos ângulos em torno de um vértice é muito próxima de 360°. Um exemplo é o arranjo composto de um pentágono, um hexágono e um heptágono, no qual faltam pouco mais que 3° para perfazer 360°. O professor deve estar atento para que os alunos não sejam enganados pela falsa impressão de que as peças se encaixam, salientando a importância de uma comprovação rigorosa.

O Kit Polígonos permite os arranjos das onze pavimentações regulares e semi-regulares possíveis. Murari (1999) apresenta um estudo detalhado sobre estas pavimentações.

<u>Pavimentações de Penrose</u>

Roger Penrose, físico e entusiasta por recreações matemáticas, descobriu que é possível tesselar uma superfície de maneira não periódica, utilizando apenas dois quadriláteros, denominados kite e dart (fig.4), formados pela combinação dos dois triângulos encontrados na geometria do pentágono (fig.5).



kite dart

fig.4

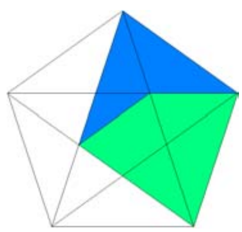


fig.5

Com esses dois polígonos também podemos ter tesselações periódicas, utilizando, por exemplo, o arranjo em forma de losango, obtido pela união de um kite e um dart.

Porém, as denominadas Tesselações de Penrose são não periódicas, isto é, não podem ser obtidas através de um único arranjo, em escala fixa. Isto quer dizer que, se tivéssemos uma transparência de uma dessas tesselações, não haveria como movê-la de maneira que ela coincidisse novamente com a tesselação original, a não ser, talvez, por rotação, pois algumas apresentam simetria rotacional.

Todas elas apresentam maior número de kites do que de darts. Quanto maior a área pavimentada, mais o valor da razão entre essas quantidades se aproxima da "relação de ouro".

Atividade

A construção das peças é simples e envolve o estudo dos ângulos do pentágono regular, triângulos isósceles e quadriláteros. As peças podem ser confeccionadas pelos alunos da mesma maneira que o Kit Polígonos, utilizando o Cabri Gèométre II.

Com alunos do ensino médio podemos utilizar este jogo para estudar e aplicar conceitos de trigonometria, calculando o seno e o co-seno dos ângulos envolvidos e a medida dos lados das peças.

Inicialmente pedimos aos alunos que montem algumas tesselações obedecendo as regras:

- colocar lados iguais juntos,
- a soma dos ângulos ao redor de um nó deve ser 360°, e
- não podem ser formados losangos com as duas peças.

Alguns grupos poderão encontrar a solução para a atividade, outros não conseguirão tesselar o plano (sua carteira), pois poderão ocorrer espaços em que não será possível encaixar nenhuma das peças.

Através da análise das diversas soluções, irão descobrir que mais uma regra é necessária para que seja possível realizar a tarefa com êxito. O professor sugere que as peças sejam marcadas em seus vértices (fig.6) e pede aos alunos que escrevam uma condição, através da observação de uma tesselação. Eles devem concluir que, para montar a tesselação, só podem coincidir vértices que tiverem a mesma cor.

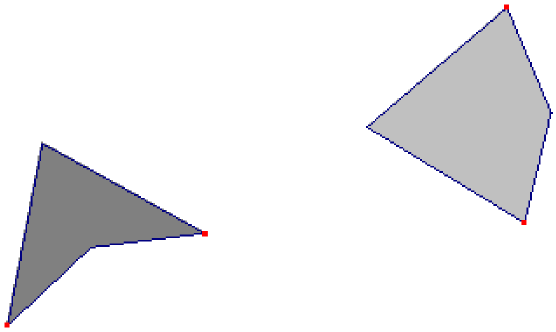


fig.6

Como sugestão, eles podem fazer curvas nas peças de modo que, ao montarem a tesselação, as curvas de uma peça se unam às da peça adjacente (fig.7).

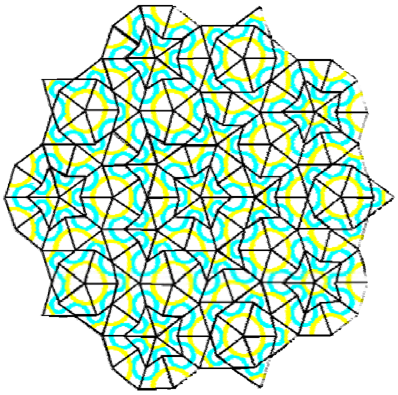


fig.7

Analisando a tesselação, o professor explica que ela é aperiódica, pois não há um padrão que se repete em uma seqüência fixa, ou seja, não há translação dos arranjos de forma ordenada. Seria pertinente mostrar outras tesselações periódicas para que façam comparações. Após isso, pode ser solicitado que verifiquem os diversos tipos de arranjos (ou nós) que surgem (fig.8).

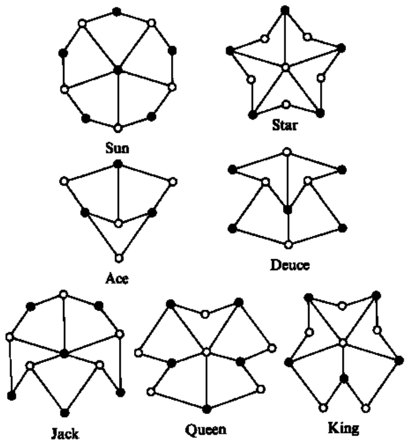


fig.8

O professor pode sugerir que alguns grupos iniciem uma tesselação pelo arranjo em forma de sol (sun) e outros pelo em forma de estrela (star). Porém uma condição deve ser satisfeita: a pavimentação sempre deve apresentar simetria em relação a todos os eixos de simetria do arranjo inicial. Eles verificarão que, a medida em que acrescentam as peças (inflacionam a pavimentação), mais a área tesselada se aproxima da forma de um pentágono (fig.9).

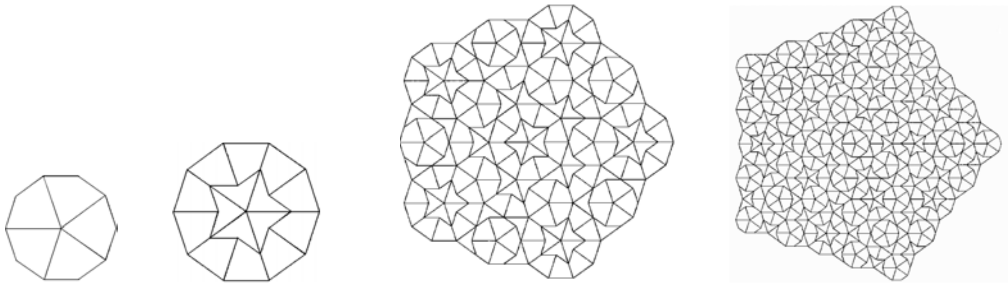


fig.9

Estas duas tesselações apresentam simetria rotacional. Pode-se pedir que encontrem o eixo de rotação e verifiquem em quantos graus ela deve ser rotacionada. A utilização de uma transparência da tesselação pode facilitar o entendimento desta propriedade.

É interessante que eles anotem a quantidade de kites e de darts utilizados, verificando que a razão entre esses dois valores se aproxima do número de ouro (phi). Vale notar que a razão entre o maior e o menor lado das peças é exatamente este número.

Pode-se propor aos alunos que cortem as peças no seu eixo de simetria e montem outras tesselações, observando suas características e suas semelhanças com a anterior, buscando encontrar leis para a formação de outras Pavimentações de Penrose.

Poliminós

Considerem quadrados congruentes como os da figura 10. Juntando-os em conjunto de dois, com um lado em comum, obteremos os dominós (fig.11). Os quadrados unitários são os monominós.

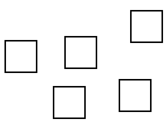


fig.10

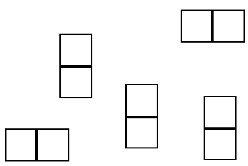


fig.11

Juntando a cada dominó mais um quadrado, de tal modo que ele tenha um lado em comum com algum dos dois já colocados, obtemos os triminós. Porém, como pode ser visto na figura 12, há dois tipos de triminós: tipo 1 (retangular) e tipo 2.

fig.12

Continuando o processo, com o triminó 1 obtemos os tetraminós tipo 1, 2*a*, 2*b* e 4; e com o triminó 2 obtemos, novamente, o 2*a*, o 2*b* e o 4, e, ainda, obtemos o 3*a*, o 3*b* e o 5 (fig.13). Note que tanto 2*a* e 2*b* como 3*a* e 3*b*, aparentam serem idênticos, mas eles são enantiomorfos, pois têm formas contrárias, só podendo coincidir se os retirarmos do plano e os virarmos.

Assim um polígono é um *n*-minó se, e somente se, é composto de *n* quadrados congruentes conectados pelo menos por um lado.

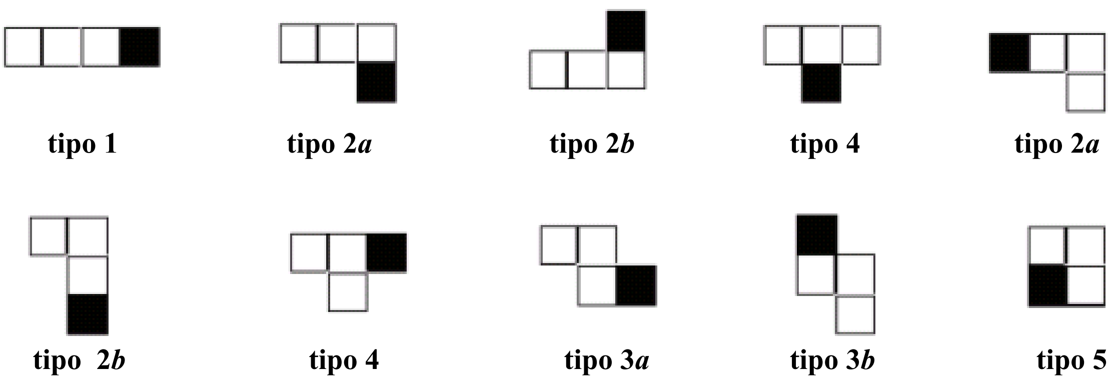


fig.13

BARBOSA (1993) sugere que na construção dos poliminós, faces opostas tenham cores diferentes, pois este cuidado permite que as peças enantiomorfas, sejam denunciadas quando usadas.

Com o uso de poliminós podem ser formulados problemas de tesselação parcial do plano dos mais variados tipos, quer com escolha livre de peças, quer fixando-se as peças a serem utilizadas. Através da descoberta dos possíveis padrões para o plano, o aluno desenvolve noções de rotação, translação e reflexão. Também é aconselhável o uso de poliminós no estudo de áreas e perímetros de figuras côncavas ou convexas e no estudo de semelhança de figuras.

Optamos por nos restringirmos à análise dos **Tetraminós**, pois os dominós e triminós apresentam pouca versatilidade para o estudo do tema tesselações, enquanto que os pentaminós e hexaminós são, respectivamente, em número de 12 e 35 tipos, além de serem compostos por maior número de quadrados, o que dificulta sua construção, manipulação e visualização espacial.

É importante que seja realizado, inicialmente, um trabalho de familiarização dos alunos com os poliminós, sua construção e sua denominação.

Atividade

É muito grande o número de possibilidades de uso dos tetraminós no ensino de diversos tópicos de geometria. Como nos limitamos a apresentar apenas uma atividade para cada jogo, optamos por uma muito interessante, sobre semelhança de figuras planas. São desenvolvidas noções de *razão de semelhança entre dois polígonos*, *razão entre suas áreas* e a relação existente entre estas duas razões.

O professor pode, inicialmente, pedir aos alunos que construam uma ampliação de cada um dos tetraminós utilizando peças livres. Surgirão muitas possibilidades, mesmo para ampliações congruentes e com a utilização das mesmas peças, pois elas podem estar dispostas de formas diferentes. Aproveitando a variedade de soluções, pode-se explicar que algumas ampliações, aparentemente diferentes, podem coincidir por rotação e, portanto, podem ser consideradas idênticas (fig.14). Outras são enantiomorfas. O professor deve estar atento para que sejam verificadas as condições de semelhança, pedindo que comparem a medida dos lados do tetraminó com a dos lados correspondentes na sua ampliação. É possível usar denominações como réplica dupla, tripla, etc., introduzindo o conceito de razão de semelhança.

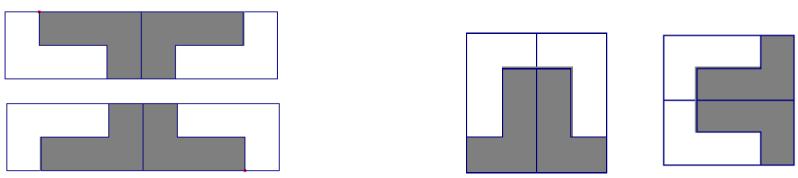


fig.14

Após, o professor pode pedir aos alunos para construírem várias réplicas diferentes do tetraminó tipo 5 (de forma quadrada), utilizando apenas o tipo 2*b* e o 2*a* (em forma de L e L invertido). A figura 15 nos mostra um exemplo de uma ampliação. Depois de analisarem diversas possibilidades, eles verificarão que é impossível construir, por exemplo, uma réplica de lado cinco. Através de questionamentos devem descobrir que em todas as ampliações o número de quadradinhos unitários deve ser múltiplo de quatro, já que cada peça utilizada é composta por quatro quadradinhos. Um quadrado de lado cinco é composto por 25 quadradinhos, logo, utilizando quatro tetraminós, ficaria faltando um para ser preenchido. Pode-se perguntar se é possível construir, utilizando só os dois tipos propostos inicialmente, um quadrado de lado seis. Eles verificarão que, apesar de ter trinta e seis quadradinhos, que é um valor múltiplo de quatro, isto não é possível. É importante discutir com os alunos as condições para existência das ampliações.

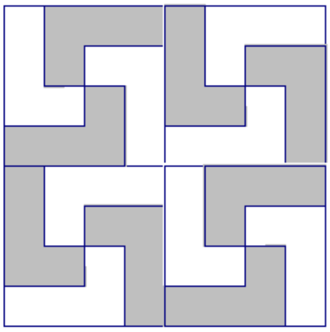


fig.15

Em uma tabela os alunos registram a medida dos lados do tetraminó ampliado. Eles também deverão registrar a quantidade de quadradinhos unitários da ampliação e verificar "quantas vezes" ela aumentou em relação ao tetraminó original. Através de uma discussão com a classe, o professor deve buscar estabelecer uma relação entre a razão de semelhança e a razão entre as áreas. Neste momento o professor pode fazer comentários sobre grandezas unidimensionais e bidimensionais. Damos um exemplo de como pode ficar a tabela.

Tetraminó original: -2 unidades de lado
-4 quadradinhos

Ampliação:

Lado	Quadradinhos	Quantas vezes aumentou o lado	Quantas vezes aumentou a área
4	16	2	4 ou (2^2)
8	64	4	16 ou (4^2)
12	144	6	36 ou (6^2)

Para complementar a atividade pode-se utilizar o laboratório de informática e o Tetris, um jogo composto por tetraminós que "caem" e devem ser encaixados de maneira que as linhas horizontais se completem e desapareçam. Os alunos desenvolvem noções de rotação e aumentam sua percepção espacial.

Conclusão

Sabemos que não esgotamos as possibilidades de uso dos jogos aqui apresentados, pois nosso interesse estava voltado para o estudo do tema "Tesselações" no ensino de Geometria. Porém, ao propor essas atividades esperamos ter contribuído para ampliar o leque de sua aplicação. O estudo do espaço físico e dos entes geométricos desenvolve habilidades de percepção e criação. O uso dos jogos permite que muitos objetivos sejam alcançados, como a colaboração, a disciplina e a confiança. O tema tesselações desperta o interesse dos alunos e possibilita que os conceitos geométricos tenham aplicação prática, podendo ser "manipulados" e melhor compreendidos. Esperamos, assim, poder colaborar para que o ensino de Geometria não se limite a definições e classificações, mas que, em associação com a arte, desperte o interesse do aluno pela exploração do espaço que o cerca, desenvolvendo sua autoconfiança e criatividade.

Palavras-chave: Tesselações, jogos, geometria.

Referências Bibliográficas

- BARBOSA, R. M., *Descobrindo Padrões em Mosaicos*. , São Paulo: Atual, 1993.
- DAFFER, P. G. O.; CLEMENS, R. S., *Geometry: an investigative approach*, Menlo Park: Addison Wesley, 1977.
- DANTE, L. R., *Criatividade e resolução de Problemas na prática educativa matemática*, trabalho de Livre-Docência, UNESP, Rio Claro, 1988.
- MURARI, C., *Ensino-Aprendizagem de Geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios*, Tese de Doutorado, vol. I e II, UNESP/IGCE, Rio Claro, 1999.
- PEREZ, G., *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino da Geometria para as camadas populares*, Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Unicamp, Campinas, 1991.
- PENROSE, R., *The role of aesthetics in purê and applied mathematical reserch*, Bull. Inst. Math. Appl.,1974.
- POLYA, G., Didática da Resolução de problemas de Matemática. São Paulo: Ática, 1ª edição, 1991.