O JOGO DO NIM E OS CONCEITOS DE MDC E MMC

Hélio Oliveira Rodrigues – Secretaria de Educação/PE
helio_osr@ig.com.br
José Roberto da Silva - UPE; FAINTVISA/PE; FUNESO/PE
jrobertosilva@bol.com.br.

1 - Introdução

As crianças estão carregadas de energia e proporcionalmente a isto de curiosidade, partindo deste principio, sendo estes fatores essenciais aos jogos, acredita-se que a escola pode aproveitar o caráter lúdico do jogo no processo ensino-aprendizagem. Os professores ao laçarem mão de outros recursos didáticos que não sejam aqueles utilizados em "práticas tradicionais" poderão despertar nos aprendizes motivados pelos desafios aspectos que necessitam de algum modo estimulo para que se tornem pelo hábito crítico, reflexivos e criativos.

Ferrero (!991), por sua vez, aponta que o fato de que os jogos possibilitam o processo ensino-aprendizagem mais divertido, interessante e motivador não significa negligenciar a prática pedagógica, não devendo essa prática ser confundida como um conjunto de atividades sem ordem nem concerto. Portanto, pode-se apontar que o pré-requisito essencial que torna os jogos um recurso didático de alto valor é sem dúvida a presença de uma proposta educativa concreta, objetiva e bem elaborada, que na relação entre a matemática e os jogos ocorram aspectos comuns no que se refere a sua finalidade educativa. Diante tais considerações, acrescenta-se que os jogos ensinam os estudantes a dar os primeiros passos no desenvolvimento de técnicas intelectuais, fortalecem assim o pensamento lógico, desenvolvem hábitos de raciocínio, além de ensinam a pensar com espírito crítico. Esses aspectos, por certo, seriam essenciais para conduzir o indivíduo a uma boa formação em termos de formalização do pensamento matemático.

Estudos atuais têm apontado a grande dificuldade enfrentada por alunos em assimilar determinadas matérias e, caracterizando a matemática em especial para eles como é adjetivada "matéria difícil", "tediosa" e "desinteressante" apontam e esses dentre outros tem sido o motivo dessa disciplina ser responsável pela grande maioria das reprovações.

Segundo Rego & Rego (1999), os jogos didáticos ajudam as crianças a desenvolverem a habilidade de trabalhar com os outros para alcançar um fim comum, de tomar decisões baseadas em planos de ação e de negociar suas concepções com a de seus colegas. Também ajudam a desenvolverem a coordenação motora e a auto-estima.

Ao se introduzir os jogos em sala de aula, deve-se ter uma preocupação em fazer diversificações na escolha dos materiais a serem utilizados, uma vez que alguns alunos poderão ter apatia por determinados tipos de jogos e esta variação será um fator importante para atender a todos. Por essa necessidade de diversificação neste trabalho se optou pelo jogo Nim onde são apresentadas cinco variedades do jogo enquanto material sendo usadas duas destas versões.

2 - Da Origem a Recursividade Didática

2.1 - Um Breve Apanhado Histórico sobre o Jogo do Nim

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN's, 1997) tem sido, referência para práticas docentes e no que se refere à utilização dos jogos como recursos didáticos concederam-nos instrumentos que ensinam as crianças não apenas a vivenciarem situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia. Os significados das coisas passam a ser imaginados por elas. Além disso, acrescenta os PCN's, que com a utilização dos jogos as crianças passam a compreender e a utilizar convenções e regras que é empregado no processo ensino-aprendizagem. Essa compreensão favorece sua integração com o mundo social bastante complexo e proporciona as primeiras aproximações com futuras teorizações.

"*Para crianças pequenas, os jogos são as ações que elas repetem sistematicamente, mas que possuem um sentido funcional (jogos de exercícios), isto é, são fontes de significados e, portanto, possibilitam compreensão, geram satisfação, formam hábitos que se estruturam num sistema. Essa repetição funcional também deve estar presente na atividade escolar, pois é importante no sentido de ajudar a criança a perceber regularidades"* PCN´s (1997, p. 48). Em acréscimo, Segundo Lemos e Figueiredo (1990): os jogos em grupos representam também uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para a criança e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico.

Diante os vários argumentos anteriores quanto às diversas importâncias dos jogos em Educação Matemática, cabe destacar o papel da ênfase histórica seja sobre os conteúdos abordados em si bem como motivar além do aspecto lúdico os materiais a serem utilizados. Com isso, o termo jogo de um modo geral traz consigo uma grande variação de concepções lúdicas com uma ampla variedade de atividades humanas inspiradas muitas vezes a partir de situações cotidianas. E é nesse sentido que se deve buscar alguns aspectos históricos do jogo Nim que possibilitem aclarar suas regras e regularidades para extrair ensinamentos suficientes para iniciar um conhecimento.

Os primeiros trabalhos que se tem registro sobre o jogo do Nim segundo Gardner (1961), são atribuídos ao matemático Charles L. Bouton. Por sua vez, mesmo não se sabendo com certeza de onde se origina o nome Nim, em inglês arcaico, significa apanhar. Além disso, NIM invertido (win) significa vencer. Porém, além das raízes inglesas, também existe uma outra suposição afirmando que essa palavra pode ser de origem chinesa.

O jogo do Nim é composto por um número qualquer de peças e suas disposições podem ser feitas espalhadas sobre a mesa ou mesmo dispostas em torres. Diante esta disposição caracterizam-se as duas versões do jogo Nim, a versão 1 é aquela cuja a disposição é feita no plano e a variação 2 é quando as peças estão dispostas no espaço.

A denominação de o Nim ter uma origem chinesa foi proposta em 1901 por Charles L. Bouton, data em que apresentou uma teoria para a estratégia de vitória do jogo. Esta teoria está ligada, de modo surpreendente, com a aritmética dos números naturais no sistema binário de numeração. Estas idéias estão presentes na formulação mais recente de Berlekamp & Conway & Guy (1982), onde aparece uma curiosa invenção: a junção do Nim com os números, dando em **nímeros**.

2.2.- Características do Jogo do NIM

Nim, como afirma Paulo Figueiredo (1990): é um dos exemplos mais importantes dos jogos imparciais de estratégia, pois nele estão presentes as características mencionadas a seguir:

- Dois participantes: nele dois jogadores alternam-se efetuando movimentos;
- Perfeita informação: ambos os jogadores possuem, em todos os momentos, informações completa sobre a situação;
- Determinístico: não há interferência do acaso, ou seja, não é jogo de sorte. Jogos de dados, por exemplo, é um jogo de sorte;

- Imparcialidade: em cada posição de jogo, o acesso é igual para os dois jogadores;
- Finitude: o jogo deve terminar após um número finito de movimentos.

Diante as características gerais enunciadas acima, pode-se eleger algumas específicas e com isso explorar dificuldades experimentadas por professores no ato do ensino, tentando assim, com o jogo do Nim, vencer tais dificuldades. Por exemplo, como aponta Borin (1996): É possível demonstrar pelo método da indução, que em um jogo finito, no qual dois participantes realizam movimentos alternados, com perfeita informação, sem interferência do acaso, deveram ocorrer duas possibilidades:

1.- um dos jogadores possui estratégia vitoriosa, ou seja, uma seqüência de movimento tal que o adversário, independentemente das escolhas de lances que fizer, perde a partida;

2.- ambos os jogadores possuem uma estratégia de empate.

Se as regras excluem empates, como no caso do Nim, resta então, a primeira das possibilidades, ou seja, a existência de uma estratégia vitoriosa.

Nestes jogos finitos, existem também a posição de **perdedor** e a posição de **ganhador** que podem ser entendidas respectivamente como: aquela situação na qual toda jogada que fizer, permita ao adversário a vitória e, aquela na qual possa existir pelo menos uma posição que deixe o seu adversário na posição de perdido.

2.3.- Apresentação de 05 Variações do Jogo do Nim

Existem algumas variações do Nim. Mostraremos, segundo Rego & Rego (1999), as mais usadas, com suas regras e posteriormente apresentaremos o mapeamento da estratégia de vitória.

1 – jogo das correntes:

- uma peça;
- dois jogadores;
- cada jogador pode avançar um determinado número de casas;

- ganha aquele que colocar a peça na última casa.

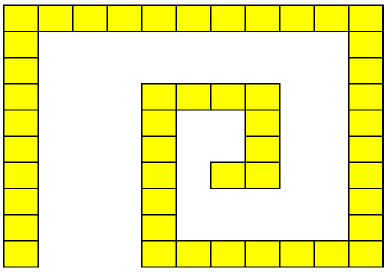

Figura 1

2 – tabuleiro circular:

- dois jogadores;
- cada jogador, pode retirar 1 ou 2 peças(sendo 2, estas têm que estar em casa vizinhas);
- perde aquele que não puder retirar peças.

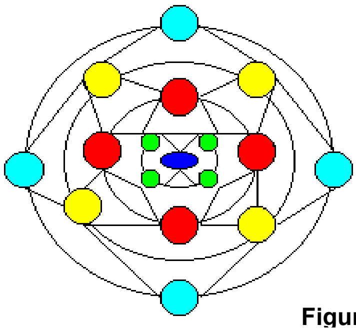

Figura 2

3 – tabuleiro em estrela:

- 2 jogadores;
- cada jogador, pode retirar 1 ou 2 peças (sendo 2, estas têm que estar em casas interligadas);
- perde aquele que não puder retirar peças.

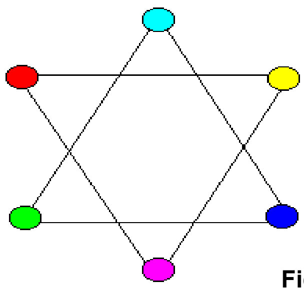

Figura 3

4 – jogo das torres (Nim II)

- dois jogadores ou duas equipes;
- cada jogador pode retirar no mínimo 1, no máximo toda a torre;

- não é permitido retirar peças de duas torres distintas na mesma jogada;
- perde aquele que não puder retirar peças.

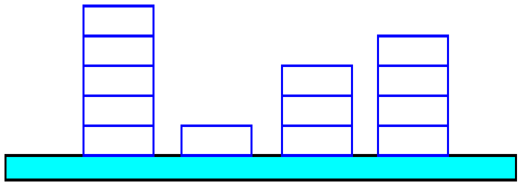

Figura 4

5 – jogo da rainha

- uma peça que possui os mesmos movimentos da rainha;
- o jogo pode começar com a rainha em qualquer lugar do tabuleiro;
- dois jogadores que jogam alternadamente;
- ganha aquele que colocar a rainha na casa marcada.

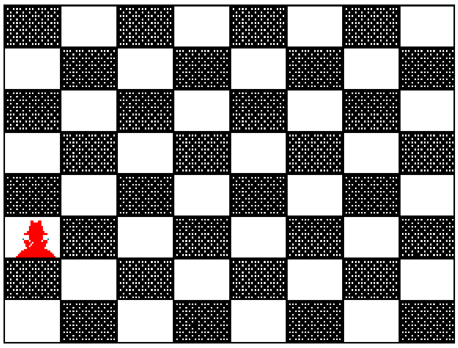

Figura 5

3 - Relevâncias Metodológicas Recursivas

Diante do embasamento apresentado no item 2 sobre o material (Nim) em si segundo o contexto histórico, características e variabilidades de formas torna-se possível perceber as múltiplas atividades didáticas recursivas que podem ser exploradas com o jogo do Nim.

Este trabalho metodologicamente investe na percepção de regularidades que serão mapeadas durante o ato (ação) das jogadas trazidas a partir das estratégias adotadas pelo jogador para vencer. Isto será estruturado mediante uma análise crítica de uma tabela construída relacionando as jogadas com as quantidades a ela associada onde as jogadas são caracterizadas pela retirada das peças. Com isso, se matematiza o discurso diante a atividade lúdica.

Após a discrição acima, recorrendo-se ao jogo das torres (Nim II), serão explorados em dois momentos seqüências didáticas a partir das jogadas. No primeiro momento 4.2.1 se apresenta a seqüência do Nim II enfocando as inter-relações entre o jogo em si e o Maximo Divisor Comum (MDC) e o Mínimo Múltiplo Comum (MMC); em seguida em 4.2.2 levando em consideração o cotidiano escolar respaldado na geometria clássica se busca o MMC a fim de confronta-lo com o momento 4.2.1. Por último em 4.2.3 utiliza-se a versão 1 apresentada neste estudo, ou seja o jogo das correntes para justificar a possibilidade de realizar-se procedimentos análogos com as outras três versões do Nim estruturando atividades didáticas a fim de ensinar o MDC e o MMC.

Caracterização de Estratégias a partir da Percepção de Regularidades

Ensinar os alunos a jogarem parece ser uma tarefa difícil, se o professor não tiver paciência e força de vontade. Tem-se que levar em conta que os significados matemáticos não são "transmitidos" nos jogos, cada aluno realiza uma construção pessoal. Este significado não é arbitrário, sendo estruturado passo a passo em um processo contínuo de erros e acertos. Para isso acontecer, é necessária uma constante interação entre o aluno e seus colegas e entre o aluno e o professor, além de oportunidades para que possa expor suas idéias e conhecer o pensamento dos outros.

Será apresentada uma sugestão de abordagem para caracterização de estratégias de vitória resultando num mapeamento do jogo, a qual vai ser estruturada a partir de algumas jogadas segundo as variações do jogo em si, como segue:

1º- Estratégia de Vitória

Analisando-se algumas situações do jogo do Nim, vê-se que quando existe apenas uma pilha de peças, então o jogador A ganha, desde que retire todas as peças da pilha. Caso existam duas pilhas com o mesmo número de peças, o jogador B ganha, copiando na outra pilha a jogada do primeiro. Quando existem duas pilhas com números diferentes de peça, A vence, desde que se retirem peças da pilha maior, deixando-a do tamanho da outra.

A análise fica mais complexa para jogos do Nim com mais de duas pilhas. Porém, é possível elaborar uma estratégia para vencer (ganhar) quando as suas pilhas são pequenas, sem usar uma teoria mais sofisticada. Isto será muito importante, pois as crianças podem encontrar tais estratégias, desenvolvendo seu raciocínio lógico.

2º- Mapeamento dos jogos

O mapeamento é caracterizado a partir da forma de jogar segundo a regra estabelecida para o jogo conforme o número de jogadas (número de elementos a ser retirado). Aproveitando o jogo das torres em pilhas (Nim II), será apresentado um procedimento para o mapeamento.

Apresentação da Proposta:

As atividades serão desenvolvidas em 02 momentos, como segue abaixo, enfocando respectivamente em cada uma delas a estratégia de vitória e o mapeamento do jogo.

Regras do jogo:

1. dois jogadores que jogam alternadamente;
2. cada jogador, na sua vez de jogar, pode retirar certo número de peças;
3. perde aquele que não puder mais retirar peças.

Tirando 1, 2, ou 3 peças:

- Posição de perdido para quem vai jogar.
  Posições {0,4,8,12,16...}
- Posição de ganho para quem vai jogar.
  Posições {1,2,3,5,6,7,9,10,11,...}

Estratégia vitoriosa: deixar múltiplos de 4 para o adversário.

Mapeando o jogo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	G	G	G	P	G	G	G	P	G	G	G	P

Obs. Toda posição de perdido leva para uma situação de ganho.

Estruturando o mapeamento em linguagem matemática:

P→ perdido: **P** = {0, 4, 8, 12, 16..}

G → ganho: **G** = {1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11,...}

P = {4n} $n \in N$

G = {4n + 1, 4n+2, 4n+3} $n \in N$.

$$N = P \cup G$$

4n — -1 → 4n –1 = 4(n-1) + 3
4n — -2 → 4n – 2 = 4(n-1) + 2
4n — -3 → 4n – 3 = 4(n-1) + 1

4n é perdido, pois só posso parti para 4n-3, 4n-2, 4n-1, que são situações de ganho para o adversário.

g — p, g, g

p — g, g, g

Tirando 1,3, ou 5 peças.

Mapeando o jogo

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
P	G	G	G	P	G	G	G	P	G	G	G	P	G	P

$$N = P \cup G$$

2n+1 — -1 → 2n
2n+1 — -3 → 2n - 2 = 2(n-1)
2n+1 — -5 → 2n - 4 = 2(n-2)

2n — -1 → 2n -1
2n — -3 → 2n - 3 = 2(n-1)
2n — -5 → 2n –5 = 2(n-2)

g — p, p, p

p — g, g, g

Na tentativa de corrigir as jogadas fracassadas, o aluno começa a se organizar, controlando seu comportamento através dos seguintes cuidados:

- leitura atenta das regras do jogo para compreender o que é permitido e possível;
- levantamento dos dados e formulação de hipóteses;
- execução da estratégia escolhida a partir da hipótese inicial;
- avaliação da hipótese, isto é, a verificação da eficiência da jogada para alcançar a vitória.

4 - O jogo do Nim e os Conceitos de MDC e MMC

Após o aluno ter a noção do mapeamento do jogo será interessante o professor iniciar o conceito de múltiplos e divisores aproveitando o próprio jogo. Isto poderá ser feito com a ajuda do conceito de perdido no jogo trazido no item anterior. Diz este conceito que para ganhar o jogo será preciso deixar múltiplos de 4 para o adversário, ou seja, 4n.

Como esta proposta está direcionada para o ensino fundamental de 5ª a 8ª série, deve-se tratar do assunto com todo cuidado para não confundir os alunos. Os conteúdos serão os conceitos de múltiplos e divisores onde se busca inclusive definir ambos. Um exemplo que serve simultaneamente para justificar tais preocupações seria compreender que "*Se a divisão de um primeiro número por um segundo número, é exata, podemos dizer que o primeiro é múltiplo do segundo e o segundo é divisor do primeiro*" Giovanni & Castrucci (1977). Usando o jogo como recurso, se tem:

P → perdido: **P** = {0, 4, 8, 12, 16..}.

Deve-se lembrar também que o número 1 é divisor de qualquer número e todo número diferente de zero é divisor de si mesmo. Assim como, de forma sucinta, para se obter o os múltiplos de um número, basta multiplicá-lo pelos naturais. Será outra oportunidade do professor comentar sobre o que é número natural. Ainda poderá dizer que todo número é múltiplo de si mesmo e que todo número múltiplo de 2 é chamado número par e todo número que não é múltiplo de 2 é chamado número ímpar.

Estes conceitos anteriores são muito importantes para o aprendizado do aluno, já que dá condições de interpretação de coisas abstratas, como números infinitos e também faz com que esse tenha a noção da importância do jogo do Nim para melhoria do raciocínio.

4.1 - Introdução as Noções de MDC e MMC com o Nim

Pode-se também através do jogo Nim, introduzir-se a noção de Máximo Divisor Comum (MDC) e Mínimo Múltiplo Comum (MMC). Para atender a tais finalidades pode-se usar as variações do jogo Nim, em especial o chamado jogo das torres.

O jogo contém 13 peças, conforme a figura 4 dispostos em torres, daí derivar seu nome. Lembrando as regras do jogo, uma delas diz que o jogador poderá retirar uma ou mais peças que quiser de uma mesma pilha, portanto o número máximo de jogadas será 13 (treze), e também poderá retirar toda a pilha, logo o número mínimo de jogadas é 4 (quatro). Levando-se em conta as jogadas dos dois jogadores concluímos que um deles vencerá o jogo.

Para se ganhar o jogo, se um jogador tiver feito n jogadas, o seu adversário terá feito (n-1) jogadas. Portanto será sempre um número par e um número ímpar de jogadas, já que após um número par, virá sempre um número ímpar e vice-versa.

Usando a técnica da decomposição em fatores primos, que é a técnica utilizada para se encontrar o MDC e o MMC de dois números, teremos o seguinte:

n , n-1	n
1 , n-1	n-1
1 , 1	
	n . (n-1)

Portanto, o MMC (n, n-1) será n (n-1), ou seja, o produto. Como o número máximo é 13 jogadas para se ganhar o jogo, se o primeiro jogador fizer 13 jogadas o adversário terá feito 12 jogadas, chegando a conclusão que o MMC (13,12) será 13. 12 = 156. Interpretando o jogo, seriam necessários 156 jogadas, para se repetir as mesmas jogadas feitas. Isto seria mais uma noção de possibilidades de eventos (probabilidades). Lembrando que as peças teriam que ser repostas. Para o número mínimo de jogadas ser 12, basta utilizar o mesmo raciocínio.

	1	n-1	
n	n-1	1	← **mdc**
1	0		

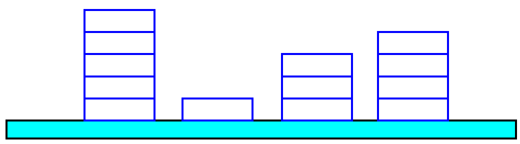

Figura 4

Se calcularmos o MDC (n, n-1) pela técnica do algoritmo de Euclides, teremos:

Logo concluímos que o MDC (n, n-1) será 1. Ou seja, só existe uma jogada em comum para se ganhar o jogo.

	1	n-1	
n	n-1	1	← **mdc**
1	0		

4.2 - Seqüência Didática das Atividades

4.2.1 - Explorando a Seqüência de Utilização do Nim II

a.-o jogador A, pega uma peça da primeira pilha;

b.-o jogador B, pega 3 peças restante da mesma pilha;

c.-o jogador A, pega uma peça da outra pilha;

d.-o jogador B, pega 3 peças da terceira pilha;

e.-o jogador A, pega 3 peças da quarta pilha e vence o jogo.

Utilizando o MMC, podemos verificar que o jogador A, fez 3 jogadas e o jogador B, fez 2 jogadas, portanto o MMC (3,2) será 6. Fazendo analogia com o número de jogadas, este número 6 significa uma jogada repetida. Ou seja, é a primeira jogada repetida, caso o jogador A, não tivesse ganhado o jogo. Lembrando que o MMC só será calculado após ter-se um ganhador, já que a última jogada vencedora, isso será a base para o cálculo do número de jogadas do perdedor (n-1).

4.2.2.- Explorando o MMC

Nesta proposta se trabalha a importância do MMC no cotidiano dos alunos, principalmente quando se refere ao jogo do Nim. Mas somar e subtrair frações são outra atribuição do MMC, que o faz de forma rápida. Outra forma de somar frações é usando o método geométrico. Vejamos como seria somar e subtrair frações usando este método:

- supondo que se deseja somar as frações $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$ usando o método geométrico.

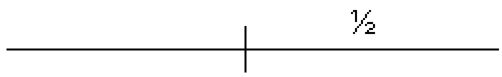

Figura 6

a.- segmento $\frac{1}{2}$. Em seguida tome um segmento e o divida ao meio:

b.- segmento ⅓. Agora tome o mesmo segmento anterior e o divida em três partes iguais:

c.- somando os dois segmento se obtém:

Pelo exposto acima, somar frações pelo método geométrico é algo muito demorado. Se for utilizado o MMC, facilitaria muito, tanto no aprendizado, como na rapidez dos cálculos. Haja vista que é menos complicado e fácil de aprender.

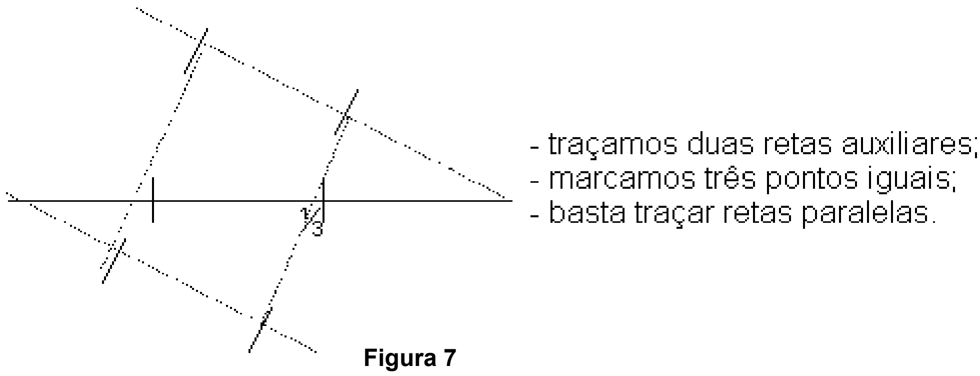

Figura 7

4.2.3.- Explorando outras Variações do NIM para O MMC

Como se viu anteriormente, nesta variação só existe uma peça, que é jogada alternadamente pelos jogadores e será estipulada a máxima quantidade de casas a ser percorrida por cada jogador. Ganha quem chegar primeiro ao final.

De acordo com a figura anterior, existem 56 casas a serem percorridas até o final. Determinando-se a quantidade máxima de 8 casas a serem percorridas, teremos:

- o Jogador A, inicia a partida com 8 casas (A1);
- o jogador B, joga mais 8 casas (B1);
- o jogador A, joga mais 8 casas (A2);
- o jogador B, joga mais 8casas (B2);
- o jogador A, joga mais 8 casas (A3);
- o jogador B, joga mais 8 casas (B3);
- o jogador A, joga mais 8 casas (A4) e chega ao final, vencendo o jogo.

Pelo que foi descrito acima, o jogador A, fez 4 jogadas e o jogador B, fez 3 jogadas. Calculando-se o MMC (4, 3), que será 12 e fazendo-se uma analogia com as jogadas, verifica-se que a 12º jogada, seria a primeira jogada repetida, se o jogo continuasse, em o jogador A, ter vencido o jogo. Cabe lembrar que em outras variações do Nim, como o tabuleiro circular, jogo da rainha, etc., o raciocínio empregado seria análogo e que os resultados obtidos em termos conclusivos seriam os mesmos.

Palavras chaves: recurso didático, jogo do Nim, conceitos de MDC e MMC.

Referências Bibliográficas

BERLEKMP, GUY e CONWAY. *Winning Ways*. Nova Iorque: Academic Press, 1982.

BORIN, J.. *Jogos e Resolução de Problemas: Uma Estratégia para as aulas de Matemática*. São Paulo: IME –USP, 1996.

CASTRUCCI e GIOVANNI. *A Conquita da Matemática*. Vol. 1. São Paulo: FTD, 1977.

FERRERO, L.. *El Juego y la Matemática*. Madrid: La Muralla, 1991.

GARDNER, M.. *Divertimentos Matemáticos*. São Paulo: Ibrasa, 1961.

LEMOS, M. e FIGUEIREDO, P.. *Nim e Outros Jogos*. Versão preliminar, 1990.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E Do DESPORTO. Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 1997.

KELEIS, A. Jogos. *Revista do Professor de Matemática.* .1º número de 1989. v. 14, pp. 21-28.

MELO, C. Um Jogo e Varias Versões *Revista do Professor de Matemática.* .1º semestre de 1985. v. 6, pp. 47-52.

REGO, R. & REGO, R.. *Matemáticativa II*. João Pessoa: Editora Universitária/UFPB, 1999.