Realização SBEM 15 anos SBEM-PE
VIII ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM COMPROMISSO SOCIAL
RECIFE, 15 A 18 DE JULHO DE 2004
UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

OS SENTIDOS DO RACIOCÍNIO MULTIPLICATIVO E SUAS IMPLICAÇÕES PARA A DOCÊNCIA NAS SÉRIES INICIAIS

Yara Maria Leal Heliodoro
Universidade Católica de Pernambuco – UNICAP
yleal@terra.com.br

1- Introdução

Com este mini-curso, pretendo refletir sobre os vários sentidos envolvidos no raciocínio multiplicativo, com professores que lecionam de 1ª à 4ª série do ensino fundamental. Inicialmente, através de uma discussão, farei um levantamento das idéias multiplicativas com as quais o grupo trabalha com os seus alunos. Apresentarei, em seguida: 1. aspectos gerais acerca do raciocínio aditivo e multiplicativo, destacando as idéias dos tipos principais do raciocínio multiplicativo; 2. os trabalhos de alguns estudiosos que investigaram o desenvolvimento da compreensão das crianças em situações nas quais aparece o raciocínio multiplicativo; 3. algumas observações a partir da prática vivida.

As atividades terão uma abordagem prática à medida que as reflexões teóricas das discussões, exposições e relatos apresentados serão ancorados nas experiências de ensino e de aprendizagem da professora e dos alunos.

2- Os sentidos da multiplicação

Durante muito tempo, o ensino e a aprendizagem de algoritmos canônicos ocuparam um lugar de destaque no ensino das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Essa atitude reduz a importância do significado dessas operações.

O significado de uma operação refere-se basicamente às idéias e às ações subjacentes a ela. Por exemplo, para obter a resposta de 3 x 85, basta que eu some 85 três vezes. Nesse caso, a multiplicação é vista como um caso particular da adição porque as parcelas envolvidas são todas iguais; do mesmo modo, é possível obter a resposta para 85 : 3, identificando o número de vezes que você deve subtrair 3 de 85 até obter-se 0. No entanto, seria reducionismo tratar a multiplicação tão somente como uma outra forma de adição, como também seria reducionismo tratar a divisão como uma outra forma da subtração, uma vez que essas abordagens seriam insuficientes para que os alunos compreendessem e resolvessem outras situações relacionadas à multiplicação e à divisão.

Estudos, como os de Nunes & Bryant (1997), vêm demonstrando que a multiplicação e a divisão são operações complexas. Isso significa dizer que essas operações não podem ser reduzidas a simples operações que devam ser ensinadas às crianças logo após o ensino da adição e da subtração, porque existe uma série de sentidos de números novos a serem aprendidos - proporções, fatores escalares e funcionais e novos tipos de relações representadas por números - o que requer transformação qualitativa no raciocínio das crianças, de forma que elas saibam como e em quais situações devem efetuar a multiplicação e a divisão.

Nunes & Bryant (1997) afirmam que há uma prática estabelecida nas escolas em que o ensino da adição precede ao da multiplicação, pelas seguintes razões:

1. crença de que a multiplicação é mais difícil do que a adição;
2. a adição conduz à multiplicação porque a base da multiplicação é formada por alguns aspectos da adição.

Em relação à primeira assertiva, nada há a questionar, uma vez que de fato a multiplicação é mais difícil do que a adição, e quanto à segunda, ela está parcialmente certa, já que se pode resolver problemas de multiplicação através da adição repetida. O pressuposto da segunda assertiva tem sido questionado nos últimos anos por vários estudiosos, de modo que hoje já existe alternativa que se contrapõe a esta idéia de ensinar multiplicação como adição repetida. A Associação Japonesa de Educação Matemática alerta para a necessidade de os professores entenderem que a conexão entre estas duas operações não é de natureza conceitual, uma vez que existe diferença significativa entre o raciocínio aditivo e o raciocínio multiplicativo. O raciocínio aditivo refere-se a situações nas quais objetos ou conjuntos de objetos são reunidos ou separados (Nunes & Bryant 1997).

O axioma básico, considerado como a essência do raciocínio aditivo - o todo é igual à soma das partes, apresenta três situações distintas:

1. Para calcular o todo soma-se as partes - Carlos tem doze bolas de gude e seu irmão tem 9. Quantas bolas têm os dois irmãos?
2. Para obter-se o valor de uma parte subtrai-se a outra parte do todo - Tenho que ler um livro de 104 páginas. Já li 49. Quantas páginas tenho que ler para terminar a leitura deste livro?
3. Para comparar duas quantidades, verifica-se que parte da maior quantidade sobra, quando retira-se dela uma quantia equivalente à outra parte - Lúcia tem 49 figurinhas e Ana 27. Quantas figurinhas Lúcia tem a mais que Ana?

Nestas três situações acima, o invariante conceitual do raciocínio aditivo é a relação *parte-todo.* Os sentidos de números referentes às situações aditivas relacionam o tamanho de conjuntos (cardinalidade) às ações de unir e separar objetos e conjuntos. Como medidas de conjuntos, o número, envolve a disposição de objetos em um conjunto, tendo o zero como ponto de partida; o número visto como uma medida das transformações relaciona-se ao conjunto que é unido ou separado de um outro conjunto e o número visto como uma medida de uma relação estática (próprio dos problemas de comparação) relaciona-se ao conjunto que teria de ser unido ou separado de um outro, a fim de formar dois conjuntos iguais em número.

Em contraposição, no raciocínio multiplicativo o invariante conceitual é a existência de uma relação fixa entre duas variáveis (ou duas grandezas ou quantidades). Qualquer situação multiplicativa envolve duas quantidades em relação constante entre si. Ex:

1. Uma fila do cinema tem 12 cadeiras. Quantas cadeiras existem em 9 filas? As varáveis são números de filas e números de cadeiras: a relação fixa entre elas é 12 cadeiras por fila.
2. Sr. Antônio comprou três caixas de margarina. Cada caixa custou R$ 19, 80. Quanto ele pagou ao todo? As duas variáveis são caixas de margarina e reais; a relação constante é o preço por caixa.
3. O carro de Pedro faz 12 Km com 1 litro de gasolina. Esta semana ele rodou 467 Km. Quantos litros de gasolina ele gastou? As duas variáveis são quantidade de gasolina e quilometragem; a relação constante é de 12 Km de gasolina por litro (Nunes et al 2001).

A relação existente entre multiplicação e adição centra-se no processo de cálculo da multiplicação que pode ser feito, usando-se a adição repetida, graças à distributividade da multiplicação em relação à adição.

Nunes & Bryant (1997) distinguem três tipos principais de situação multiplicativa, a saber:

2.1- Situações de correspondência um para muitos

São dois os novos sentidos de número: proporção e fator escalar que se desenvolvem em situações de correspondência um-para-muitos. A correspondência um-para-muitos é a base para o conceito de proporção, representada por um par de números que permanece invariável em uma situação, até mesmo quando há mudança no tamanho do conjunto. No cotidiano é grande o número de situações que expressam a correspondência um-para-muitos: uma mão tem cinco dedos (1:5), um ônibus tem quarenta e dois assentos (1:42) etc. E, o outro sentido do número, fator escalar, refere-se ao número de replicações aplicadas aos dois conjuntos envolvidos na situação.

Alguns dos sentidos de número implícitos nestas situações multiplicativas relacionam-se a conjuntos. Os números aí encontrados, "uma mão", "cinco dedos", "um ônibus", "quarenta e dois assentos", indicam o tamanho do conjunto, o que significa dizer que há continuidade entre estas situações multiplicativas e as situações aditivas.

No entanto, há também diferenças:

1. As situações multiplicativas envolvem uma relação constante de correspondência um-para-muitos. Esta correspondência constante é a invariável na situação[1] e constitui-se a base para um novo conceito matemático, o conceito de proporção.

Nas situações aditivas para manter constante a diferença entre dois conjuntos, soma-se um mesmo número aos dois conjuntos. Isto é o que se constata em problemas do tipo: A diferença de idade entre Carlos e Sérgio é de 5 anos. Carlos tem 7 anos e Sérgio tem 2 anos. Daqui a 5 anos qual a diferença de idade entre Carlos e Sérgio? A solução para essa situação problema pode ser assim representada: (7+5) – (2+5) = 5.

E, em situações multiplicativas, para manter constante a correspondência entre "1-carro-para-4 rodas", cada vez que se acrescenta 1 carro para o conjunto de rodas, deve-se acrescentar 4 rodas para o conjunto de carros. Essa relação pode ser representada pela proporção 1:4 e suas equivalentes, por exemplo, 3:12. Nesse caso, foram somados números diferentes de objetos a cada conjunto, diferentemente da situação aditiva apresentada anteriormente.

[1] Este tipo de invariável não está presente no raciocínio aditivo.

2. A ação efetuada para manter uma proporção invariável é a replicação e seu inverso. Replicação é entendida como uma estratégia que envolve somar a cada conjunto a unidade correspondente, para o conjunto, de modo que se conserve a correspondência invariável um-para-muitos. No exemplo dado acima, a unidade a ser considerada no conjunto de carros é uma, e a unidade no conjunto de rodas é uma unidade composta de quatro.

3. Uma proporção mantém-se constante quando a replicação é efetuada, mesmo se os números de carros e de rodas muda. Ex. a proporção 1:4 permanece em um conjunto onde há 4 carros e 16 rodas. Aí está a razão porque uma proporção expressa a relação entre os dois conjuntos e não o número de objetos em qualquer um dos conjuntos.

3. Um novo sentido de número - fator escalar - pode ser identificado no número de vezes que uma replicação é efetuada. Por exemplo, iniciando com a situação simples "1 semana e 7 dias" e reproduzindo esta situação inicial cinco vezes. O "5", chamado de fator escalar, indica o número de replicações, e estabelece uma relação entre os dois conjuntos, semana e dias. Cinco expressa a relação entre 1 e 7 dias e entre 5 e 35 dias. O fator escalar deve ser aplicado a cada conjunto para que a proporção permaneça constante.

2.2-Situações que envolvem relações entre variáveis

Os sentidos de números em situações que envolvem relações entre variáveis são um fator, uma função ou uma quantidade intensiva.

Aqui também há semelhanças e diferenças, entre este tipo de situação multiplicativa (situações que envolvem relações entre variáveis) e o primeiro (situações de correspondência). Uma semelhança importante é a possibilidade de usar o mesmo tipo de operação, replicação e seu inverso, na resolução de problemas que envolvam relações entre duas variáveis e correspondência um-para-muitos entre conjuntos. Isso significa dizer que o número de replicações, chamado de fator escalar, é um sentido de número importante nos dois tipos de situação multiplicativa.

Diferenças significativas:

1. Os números nesse tipo de situação referem-se a valores sobre variáveis.

2.O raciocínio multiplicativo nas duas situações abordadas é resultante do modo como as relações invariáveis são expressas. Na situação um-para-muitos, a relação é representada por uma proporção (1:7) e na situação referente a variáveis diferentes são usuais expressões: um fator, uma função ou uma terceira variável ligando as duas variáveis. Por exemplo, numa discussão sobre preço de leite, o "preço por litro" é uma terceira variável que relaciona as duas primeiras, leite e litro. Essa terceira variável é um sentido de número novo de grande complexidade, porque ele se refere à relação entre quantidade de leite e preço. Tem-se aí um exemplo de quantidades intensivas porque nesse caso a quantidade refere-se às relações e não à quantidade real.

2.3-Situações que envolvem distribuição, divisão e divisões ao meio

A atividade de distribuir é uma ação relacionada à operação de dividir e à possibilidade de cortes sucessivos. A divisão e a multiplicação envolvem duas variáveis numa relação constante. Por diferentes razões é mais difícil perceber essa estrutura nos problemas de divisão. As relações parte-todo estão também envolvidas em distribuição e divisão, mas de forma diferente das relações envolvidas nos problemas aditivos, nas quais o tamanho das partes não precisam ser iguais.

Diferenças

1. A ação da distribuição é o ponto inicial da partição, diferente da situação de correspondência um-para-muitos.
2. Há relações novas a serem entendidas com a distribuição e cortes sucessivos ausentes na situação de correspondência um-para-muitos.
3. Uma divisão pode estar conectada a números fracionários.
4. Há uma função constante nas situações de co-variação enquanto nas situações de correspondência um-para-muitos há uma taxa constante.

Pelo exposto, fica evidente que as diferenças superam as semelhanças entre situações multiplicativas e situações aditivas. Esta constatação reforça a idéia de que a multiplicação não pode ser apresentada apenas como uma adição de parcelas iguais.

3- Entendimento das crianças em situações multiplicativas

São muitos os estudos acerca desta temática, entre os quais, destaco os de: Piaget (1965), Frydman e Bryant (1988), Nesher (1988), Leslie Steffe (1994), (apud Nunes & Bryant, 1997).

Os trabalhos de Piaget (1965) apontam que as crianças de 5/6 anos lidam muito bem com as idéias elementares da multiplicação. Ele chega a essa conclusão criando situações para que as crianças apliquem o raciocínio transitivo a situações de correspondência de um - para - muitos diferentes.

Piaget afirma que as primeiras idéias das crianças sobre multiplicação resultam do desenvolvimento do esquema de correspondência e seu uso em inferências transitivas. Ele acredita que se as crianças entendem que A=B e C=B, então A=C, elas deveriam também ser capazes de entender que se A=2B e A=C, então C=2B.

O método usado por Piaget na investigação sobre a compreensão das crianças destas relações consistia em pedir para elas estabelecerem dois tipos de correspondências: termo–a–termo e um–para–muitos entre diferentes conjuntos de objetos. A título de ilustração seguem algumas tarefas que ele desenvolveu com as crianças. Às crianças foi dada uma tarefa para elas colocarem flores azuis em vasos, em seguida recolhia-se as flores azuis, colocando-as em um buquê e as crianças colocariam uma pequena flor cor– de–rosa em cada vaso. Novamente, retirava-se as flores cor–de–rosa, colocando-as em um buquê único. Desse modo, as crianças sabiam que o número de flores azuis (A) era igual ao número de vasos (B) e que o número de flores cor–de–rosa (C) era igual ao número de vasos.

As flores azuis e rosas eram de tamanhos diferentes, para que as crianças não pudessem comparar o número de flores dos dois conjuntos tão facilmente. A conclusão de que os dois conjuntos de flores eram iguais, passa necessariamente pelo entendimento de correspondência termo–a–termo.

A partir desses dados, Piaget classifica os resultados em duas categorias:

1- Ou as crianças apoiadas na correspondência entre o conjunto de flores e de vasos inferem que o número de flores é igual nos dois buquês azul e rosa.
2- Ou as crianças falham, porque não reconhecem a necessidade desta equivalência numérica, apesar da intervenção do entrevistador, apontando que as flores de cada buquê, poderiam ser colocadas novamente nos vasos, colocando uma flor em cada vaso.

Em seguida, Piaget deu para as mesmas crianças uma outra tarefa que exigia o raciocínio: se A=2B e C=A, então C=2B.

Perguntou às crianças sobre o que aconteceria se as flores cor-de-rosa e azuis fossem distribuídas igualmente entre os vasos. Nesse caso, as crianças foram indagadas acerca do que aconteceria se as mesmas flores estivessem igualmente distribuídas nos vasos. 1. Quantas flores haveria em cada vaso? Se elas não estivessem seguras da relação entre flores (A) e vasos (B) elas poderiam, por si mesmas, colocando as flores nos vasos, ver através da ação que havia duas flores em cada vaso, ou seja, A=2B.

Em seguida, as flores foram deixadas de lado, mas os vasos permaneceram à vista e a nova tarefa seria pegar de uma caixa de tubos de plástico finos o número certo (C) de tubos, de modo que houvesse um tubo para cada flor. Com esta tarefa Piaget desejava verificar se as crianças poderiam entender a necessidade de usar o dobro de tubos em relação aos vasos (C=2B).

Frydman e Bryant (1988) aplicaram tarefas a crianças de 4 e 5 anos, nas quais eles pediam que estas distribuíssem doces de "faz de conta" igualmente para duas bonecas. As crianças facilmente construíram conjuntos equivalentes quando os doces estavam em unidades separadas, usando a correspondência termo-a-termo (um para A, um para B, e assim por diante). O mesmo não aconteceu quando elas foram informadas de que uma boneca gostava dos seus doces unidos, em duas unidades de cada vez (unidades duplas), enquanto que a outra gostava dos doces separados (unidades unitárias), mas que as duas deveriam receber o mesmo número de doces. Os resultados deixam claro que as crianças nessa faixa etária têm dificuldade de lidar com as relações um-para-muitos. Mas, também a dificuldade poderia ser a de não entender adequadamente a equivalência entre unidades duplas e doces unitários. Em outro momento, eles aplicaram tarefas a crianças de 4 anos: um pré-teste, uma tarefa experimental e um pós-teste. Na tarefa experimental, os doces duplos foram apresentados em duas cores, cujo objetivo era enfatizar o fato de que os duplos consistiam de exatamente dois doces. Esse recurso exerceu efeitos positivos, a maior parte das crianças saíram-se bem nas tarefas no pós-teste, aplicado sem indícios de cor,

Leslie Steffe (1994) investigou habilidades de crianças de 8 anos para efetuar a contagem dupla necessária para a replicação de correspondências um-para-muitos. Sua pesquisa foi desenvolvida através de estudos de casos, nos quais ele entrevistou as crianças em diferentes ocasiões sobre problemas do tipo produto cartesiano, concluindo que nem todas as crianças de 8 anos desenvolveram essa estratégia de contagem dupla.

Perla Nesher (1988) assinala que problemas do tipo "Mary tem três saias e quatro blusas diferentes; quantos trajes diferentes ela pode vestir mudando suas saias e blusas?" É mais complexo por, pelo menos, duas razões: 1. envolve dois conjuntos básicos, saias e blusas, e mais um terceiro conjunto, de trajes; 2. a correspondência um-para-muitos não é explicitamente indicada na formulação verbal. Compete a quem vai resolver o problema descobrir que para cada saia há quatro trajes possíveis. Esse tipo de problema, conhecido como um *problema de produto cartesiano,* foi constatado ser mais difícil do que outros de correspondência um-para-muitos.

4. Observações a partir da minha experiência

Tendo como referência minha experiência, como formadora em Programas de Formação Continuada de Professores e em Cursos de Formação Inicial nas disciplinas de Metodologia da Matemática e de Prática de Ensino, tecerei alguns comentários mais gerais, acerca do que observo na prática desenvolvida pelos professores do ensino fundamental, no ensino das operações.

Observo um certo descompasso entre a prática dos professores e as descobertas mais recentes das pesquisas, no trabalho com as quatro operações. Ainda é muito freqüente a ênfase dada ao ensino dos algoritmos, nas séries iniciais, ao invés da compreensão do desenvolvimento conceitual. Reconheço avanços significativos na prática dos professores, na medida em que eles investem para que o aluno compreenda o processo e não simplesmente siga os modelos apresentados. Os próprios livros didáticos já fazem referências aos processos fato que não se via até pouco tempo.

Considero esse avanço ainda incipiente, pois o aluno, na hora em que encontrar-se frente a uma situação problema, continuará perguntando: professor, qual é a conta? E o professor normalmente, responderá, ao invés de trabalhar a compreensão das idéias implícitas no enunciado do problema. Desse modo, é possível que a pergunta repita-se por muito e muito tempo.

A esse respeito, Nunes et al (2001) afirmam que centrar a aprendizagem escolar da multiplicação e da divisão no ensino do algoritmo restringe a reflexão sobre as relações entre aspectos das situações que envolvem tais operações.

Por diversas razões, ainda é freqüente encontrar, o professor trabalhando o conteúdo matemático, de forma descontextualizada, como se a matemática fosse um corpo de conhecimento isolado, apresentando-o para o aluno na linguagem matemática, associada a uma simbologia própria, sem ter a preocupação de estabelecer uma relação com situações do seu cotidiano.

Do ponto de vista da didática, a formalização da matemática é questionável, porque na maioria dos casos bloqueia os mecanismos de criação. Este tipo de apresentação é apreciado por uma minoria de alunos considerados bem dotados, candidatos a futuros matemáticos, os quais têm posição diferente da posição do aluno considerado mediano, com pouca experiência em matemática. Este último tem dificuldade de acompanhar longas formalizações, tendendo a reagir com desencanto e medo, ou aceitá-las como um dogma, com conseqüências negativas para a imaginação criadora.

Segundo Kline (1976: 120) a matemática existe para "ajudar o homem a compreender e dominar o mundo físico e, até certo ponto, os mundos econômico e social, a matemática serve a fins e propósitos. Se ela não tivesse esses valores não receberia nenhum lugar no programa escolar. Por ser ela extraordinariamente útil e que está em grande demanda e recebe tanta ênfase hoje em dia. Esses valores devem estar refletidos no currículo".

Sem sombra de dúvida, as questões aqui tratadas acerca do raciocínio multiplicativo, bem como outros estudos relacionados ao tema, como por exemplo os de Vergnaud (1991) de um modo ou de outro, vêm sendo discutidos nos encontros docentes há algum tempo, porém tais idéias ainda não foram incorporadas à rotina das salas de aula.

5. Considerações Finais

Não é a minha intenção, com este texto, apontar fórmulas milagrosas que sirvam de trilhas seguras para o trabalho do professor. De certo modo, acredito que estas reflexões poderão ajudá-lo a entender formas de pensar do seu aluno e a reorientar o seu processo de ensino e aprendizagem. Entre os desafios que estas questões apresentam, está a necessidade de mapear os conhecimentos que os alunos trazem acerca das idéias multiplicativas resultantes do seu estar no mundo resolvendo problemas.

Outra atitude será a de contemplar o ensino com situações que explorem diversas dimensões do raciocínio multiplicativo. A análise do material didático a ser utilizado poderá, com relação a este aspecto, indicar a necessidade de construção de situações variadas, que contemplem o raciocínio multiplicativo dentro da complexidade da situação que lhe é peculiar.

Assim, desde as séries iniciais, a criança, ao lidar com situações multiplicativas, na perspectiva abordada, estará sendo desafiada a fazer uso das idéias que estão presentes, por exemplo, na proporção, na função, conteúdos trabalhados nas séries finais do ensino fundamental.

Palavras chaves: raciocínio multiplicativo; ensino e aprendizagem; desafio.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KLINE, M. **O fracasso da matemática moderna.** São Paulo, Ibrasa, 1976.

NUNES, Terezinha e BRYANT, Peter. **Crianças fazendo matemática**.Trad. Sandra Costa, Porto Alegre, Artes Médicas, 1997.

NUNES et al. **Introdução à Educação Matemática**: os números e as operações numéricas. São Paulo: PROEM, 2001.

VERGNAUD G.**El Niño, las matemáticas y la realidad:** problemas de la enseñanza de las matemáticas em la escuela primaria. México: Trillas, 1991.