ORIGAMI: O USO COMO INSTRUMENTO ALTERNATIVO NO ENSINO DA GEOMETRIA.

Aline Claro de Freitas
Universidade Estadual Paulista – Júlio de Mesquita Filho – Presidente Prudente
aline_claro@yahoo.com.br

José Roberto Nogueira
Universidade Estadual Paulista – Júlio de Mesquita Filho – Presidente Prudente
jrobnog@gmail.com

Resumo:
Frente à realidade do ensino contemporâneo que demanda a necessidade de diversificar o uso de estratégias de ensino, pretendemos propor uma abordagem, por meio de material concreto e que pode tornar-se bastante significativa no ensino da matemática. Este trabalho discute sobre a história, aplicações clássicas e utilização do *origami* em sala de aula. Após uma breve apresentação histórica sobre o *origami*, apresentamos uma abordagem axiomática deste instrumento. Dois dos três famosos problemas matemáticos gregos da antiguidade que não podem ser solucionados através da régua e compasso: trissecção do ângulo e duplicação do cubo encontram uma solução por meio das técnicas de *origami*. Além disso, apresentamos sugestões de roteiros de aulas e a atividade aplicada em sala de aula que obteve resultado satisfatório.

Palavras-chave: aprendizagem; geometria; *origami*; trissecção; axioma.

1. Introdução

O ensino de matemática tem se tornado um verdadeiro desafio. No cotidiano escolar verifica-se o baixo rendimento na disciplina e as avaliações externas comprovam o despreparo dos alunos. Requer-se a diversificação de metodologias na prática docente, projetando um cenário mais atraente e motivador ao aluno e tornando possível o desenvolvimento de habilidades e competências. Neste contexto é que uma nova abordagem da geometria pode ser de grande valia. Aqui será proposto um recurso alternativo com o intuito de trazer significado não só à geometria, mas à matemática como um todo: o *origami*.

Em verdade, por muito tempo o ensino da geometria desempenhou, tão somente, um papel secundário no ensino da matemática. Seu resgate poderá minimizar as deficiências encontradas e o uso do *origami*, neste sentido, se mostrar bastante profícuo. Aliás, é sabido que a utilização de recursos concretos e lúdicos no ensino da matemática pode trazer ganhos na significação dos conteúdos, permitindo que o aluno faça a apropriação do conhecimento e tenha uma aprendizagem mais eficaz. Apesar de ser uma técnica conhecida há mais de dois milênios, é pouco difundida como recurso metodológico de ensino. No Brasil é também chamada de dobradura e usualmente tratada apenas como forma de arte ou diversão. Como bem pontuou Robert J. Lang (2010), as figuras de *origami* possuem uma beleza estética que agrada tanto ao matemático como o leigo. Parte do seu apelo é a simplicidade do conceito, onde é possível fazer desde construções pouco elaboradas até as mais complexas por meio da definição de uma sequência de dobragem.

Este campo é rico e variado, com conexões nos diversos campos da matemática como: divisão binária, construção de frações ou proporções racionais, determinação de frações irracionais, construções geométricas diversas, entre outras. Estimular a inserção dessa metodologia, ainda pouco utilizada nos processos de ensino certamente concorrerá para o aprimoramento do ensino da matemática.

2. Contexto histórico do Origami

Acredita-se que o *origami* seja criação japonesa. Apesar de o papel ter sido desenvolvido na China, os *origamis* mais antigos encontrados datam do século VI d.C., mesmo período em que o papel chegou ao Japão, trazido pelos monges budistas. Ademais, a própria palavra "*origami*" deriva de duas palavras japonesas. A expressão *Ori* significa dobrar e *Kami* possui dois significados: papel e deus. *Ori* e *Kami* formam assim a palavra *origami* que designa precisamente a arte de criar figuras diversas utilizando-se apenas papéis e dobraduras, sem cortá-los ou colá-los. (FREITAS, 2013)

Inicialmente, a arte foi dominada pelos nobres em razão do custo elevado da matéria prima. De fato, o papel era tido como artigo de luxo e o *origami* utilizado para adornar cerimoniais religiosos. Após o papel tornar-se mais popular, a técnica se difundiu e já em 1876 integrava o currículo escolar japonês. O *origami* passou a compor parte relevante na cultura japonesa. Era possível reconhecer as diferentes classes sociais e profissões, por exemplo, a partir da constatação de quais dobraduras os indivíduos possuíam. A disseminação da técnica culminou por aperfeiçoá-la e sua prática alcançou o mundo. No Brasil ocorreu mais tardiamente e era privilégio das famílias portuguesas mais abastadas.

O origami ganhou ainda mais notoriedade com a lenda do pássaro grou, ave sagrada no Japão. A lenda dizia que o pássaro viveria mil anos e qualquer pessoa que dobrasse mil pássaros de papel teria seu desejo atendido. Uma menina, chamada Sadako, sofria com sequelas deixadas pela bomba atômica de Hiroshima, e ao conhecer essa lenda, iniciou sua jornada na esperança de sobreviver, mas acabou falecendo antes de completar os mil pássaros. Sua obstinação inspirou milhares de crianças a arrecadarem dinheiro para erigir um monumento em sua homenagem. Num gesto de protesto e de apelo pela paz mundial, foram gravadas as seguintes palavras: “Este é o nosso grito. Esta é a nossa prece. Construir a paz no mundo que é nosso”. (OLIVEIRA, 2004). O Tsuru (pássaro grou) se consubstanciou em um símbolo da paz, a prática do *origami* adquiriu no Japão uma conotação muito mais artística e filosófica do que científica. O alemão Friedrich Froebel foi o pioneiro em desenvolver um método pedagógico. Posteriormente, o inglês Arthur H. Stone registrou os flexágonos como exemplo de aplicação do *origami*, permitindo de forma recreativa verificar conceitos matemáticos. Na formalização desta técnica Humiaki Huzita e Koshiro Hatori destacaram-se nos estudos que enumeravam as possíveis dobragens em *origami* e as combinações entre elas sendo esta a primeira descrição formal.

3. AXIOMAS DE HUZITA HATORI

Humiaki Huzita se destacou quando apresentou seis operações para definir uma dobragem com um único vinco que, por si só, alinha várias combinações de pontos e retas já existentes. Estas operações ficaram conhecidas como axiomas de Huzita e fornecem a primeira descrição formal para as construções geométricas por *origami*. Anos mais tarde, em 2002, Koshiro Hatori apresentou uma sétima dobragem que completa a lista dos sete axiomas de Huzita-Hatori. Os axiomas de Huzita-Hatori, retirados de Cavacami e Furuya (2010), são os descritos a seguir:

Axioma 1: Dados dois pontos, P_1 e P_2, existe apenas uma dobra que passa por eles.

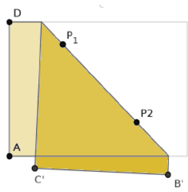

Figura 1: Axioma 1

Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 3

Axioma 2: Dados dois pontos, P_1 e P_2, há uma dobragem que os torna coincidentes.

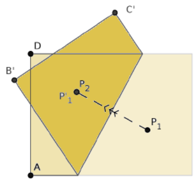

Figura 2: Axioma 2
Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 3

Axioma 3: Dadas duas retas, r_1 e r_2, há uma dobra que as torna coincidentes.

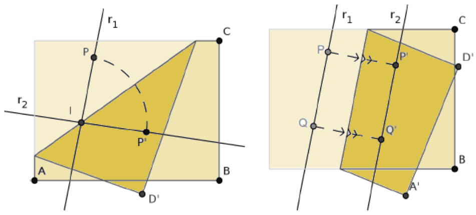

Figura 3: Axioma 3
Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 4

Axioma 4: Dados um ponto P e uma reta r, há uma dobra perpendicular a r que passa por P.

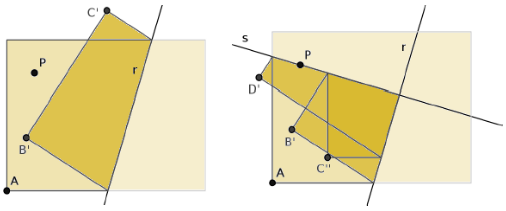

Figura 4: Axioma 4
Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 4

Axioma 5: Dados dois pontos, P_1 e P_2, e uma reta r_1, se a distância de P_1 a P_2 for igual ou superior à distância de P_2 a r_1, há uma dobra que faz incidir P_1 em r_1 e que passa por P_2.

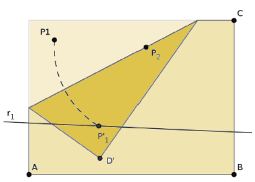

Figura 5: Axioma 5
Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 4

Axioma 6: Dados dois pontos, P_1 e P_2, e duas retas, r_1 e r_2, se as retas não forem paralelas e se a distância entre as retas não for superior à distância entre os pontos, há uma dobragem que faz incidir P_1 em r_1 e P_2 em r_2.

ISSN 2178-034X

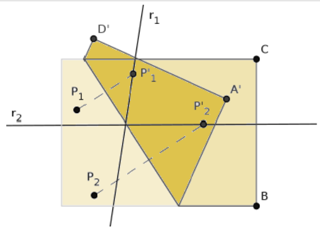

Figura 6: Axioma 6
Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 5

Axioma 7: Dado um ponto, P, e duas retas, r_1 e r_2, se as retas não forem paralelas, há uma dobragem que faz incidir P em r_1 e é perpendicular a r_2.

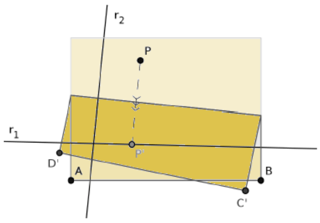

Figura 7: Axioma 7
Fonte: CAVACAMI e FURUYA, 2010, p. 5

4. Problemas clássicos da antiguidade grega.

Três importantes problemas são conhecidos como “Os três problemas clássicos da antiguidade grega”. Segundo Howard Eves (2011), a importância destes problemas é que não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso não marcados, embora sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção. Além disso, a busca pela solução destes problemas possibilitou inúmeras descobertas matemáticas em diversas áreas como: as secções cônicas, muitas curvas cúbicas e quárticas e várias curvas transcendentes, o desenvolvimento de partes da teoria das equações ligadas a domínios de racionalidade, números algébricos e teoria de grupos. Apresentaremos aqui dois dos três problemas, sendo estes possíveis de serem solucionados através do Origami

4.1 Trissecção do ângulo.

O problema de dividir um ângulo arbitrário em n partes iguais era de grande interesse dos gregos, pois através deste recurso poderia ser construído um polígono regular de n lados. Tal problema pode ser solucionado através do *origami*. Utilizando uma folha de papel quadrada de dimensão qualquer, apresentamos um método para trisseccionar um ângulo agudo. Para encontrar a trissecção, basta seguir a rotina da Figura 5.1:

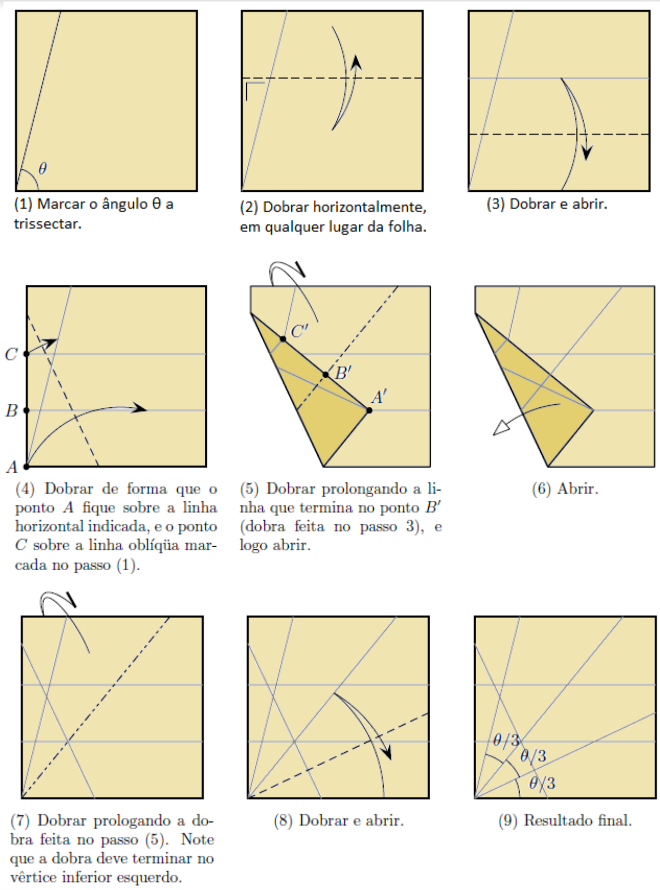

Figura 8: Trissecção.
Fonte: LUCERO,2006a, p 1-2

O passo que não pode ser realizado pela régua e compasso é o de item 4 que é dado pelo axioma 6 de Huzita.

Demonstração: Na figura abaixo foi reproduzida o resultado final juntamente com a dobra do passo (4).

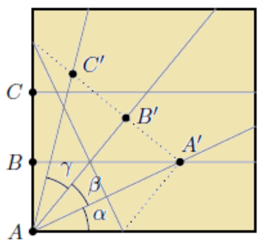

Figura 9: Demonstração trissecção.
Fonte: LUCERO, 2006a, p.2

Queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma$. Da dobradura (8) sabemos que $\alpha = \beta$. Além disso, os triângulos $AB'A'$e $AB'C'$ são congruentes. De fato: Como $AB = BC$ da dobra (3) resulta que $B'A' = B'C'$; da dobra (5) temos que AB' é perpendicular a AC'. Assim, temos que $\beta = \gamma$

4.2 Duplicação do Cubo

O segundo problema que também não é possível de ser solucionado com régua e compasso não marcados, mas possível através das técnicas do origami é a duplicação do cubo.

> Conta Eratóstenes que, certa vez na antiga Grécia, os habitantes da ilha de Delos perguntaram ao oráculo de Apolo o que fazer para combater uma peste que assolava o povo. A resposta do oráculo foi que o altar de Apolo, de forma cúbica, devia ser duplicado. Assim, teria nascido o problema geométrico da duplicação do cubo, também conhecido como "problema deliano, que se tornou um dos problemas clássicos da Antiguidade." (BOYCE, 1996; HEATH 1981 apud LUCERO, 2006, p.1).

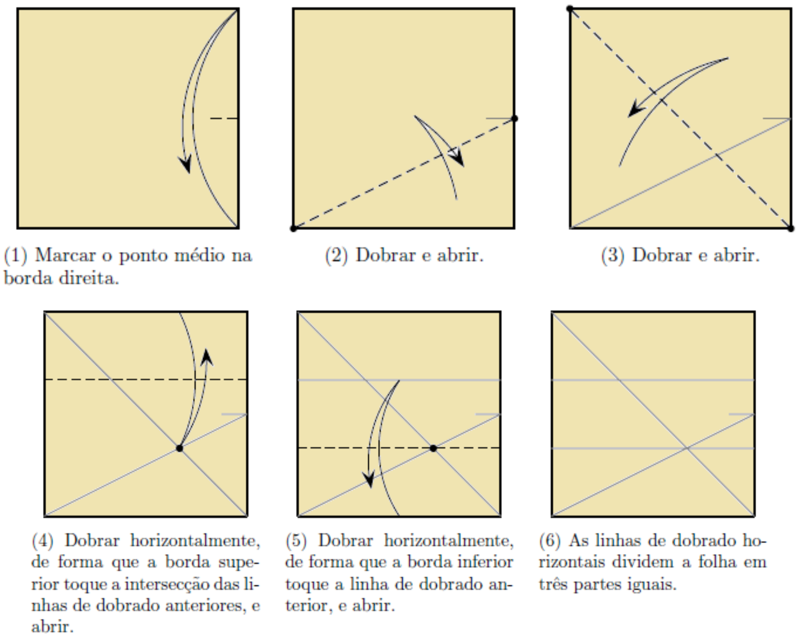

Figura 10: Procedimento duplicação do cubo.
Fonte: LUCERO,2006b,p. 2

Algumas linhas da dobradura não relevantes foram eliminadas, e finalmente encontramos $\sqrt[3]{2}$.

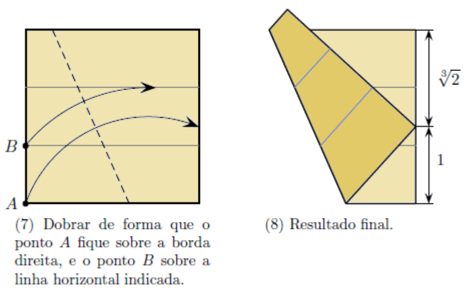

Figura 11 : Passos (7) e (8) duplicação do cubo.
Fonte: LUCERO,2006b,p. 2

*Demonstração:*A demonstração está de acordo com Lucero (pag 3, 2006). Os passos de (1) a (6), dividem o quadrado em três partes iguais.

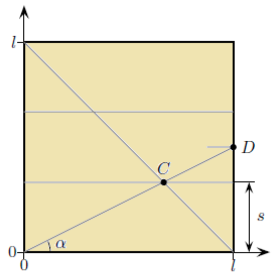

Figura 12: Demonstração duplicação do cubo – parte 1.
Fonte: LUCERO,2006b,p. 3

De fato: tome a folha com comprimento l, e insira um eixo coordenado (x, y), no canto inferior esquerdo da figura. O ponto C está à mesma distância da borda inferior e da borda direita, tomemos como s esta distância. As coordenadas dos pontos são: $C = (x_C, y_C) = (l - s, s)$ e $D = (x_D, y_D) = (l, \frac{l}{2})$. Considerando C: $\tan\alpha = \frac{s}{l-s}$. Considerando D: $\tan\alpha = \frac{l/2}{l}$. Assim: $\frac{s}{l-s} = \frac{l/2}{l} \Longrightarrow l = \frac{1}{3}$. Pelos passos (4) e (5) as linhas horizontais tem a distância de $\frac{l}{3}$ entre si. Observe agora a figura:

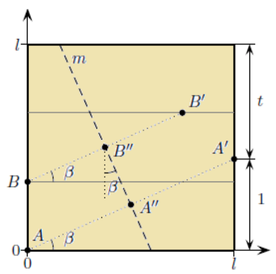

Figura 13: Demonstração do cubo – parte 2.
Fonte: LUCERO,2006b,p. 4

De acordo com os passos (7) e (8) podemos determinar as seguintes coordenadas: $A = (0,0)$; $B = \left(0, \frac{l}{3}\right)$; $A' = (l, 1)$; $B' = \left(a, \frac{2l}{3}\right)$; sendo a abcissa do ponto B'. A partir também da dobra (7), temos que A'' e B'' são os pontos médios dos segmentos AA' e BB' respectivamente. Logo $A'' = \left(\frac{l}{2}, \frac{1}{2}\right)$; e $B'' = \left(\frac{a}{2}, \frac{l}{2}\right)$. Pela geometria da figura os três ângulos que são representados por β são iguais. Assim: A partir do vértice A: (I) $\tan\beta = \frac{1}{l}$. Considerando o vértice em B: (II) $\tan\beta = \frac{\frac{l}{3}}{a}$. Considerando o vértice em B'': (III) $\tan\beta = \frac{l - a/2}{l - 1/2} = \frac{l-a}{l-1}$. Igualando (I) = (II) $\frac{1}{l} = \frac{\frac{l}{3}}{a} \Longrightarrow a = \frac{l^2}{3}$. Igualando (II) = (III)

$\frac{\frac{l}{3}}{a} = \frac{l-a}{l-1} \Longrightarrow l^3 - 3l^2 + 3l - 3 = 0 \Longrightarrow (l-1)^3 - 2 = 0$ E substituindo $t = l - 1$ temos: $(t)^3 - 2 = 0 \Longrightarrow t = \sqrt[3]{2}$ que prova a solução do problema deliano.

Com dobraduras de papel é possível resolver qualquer equação cúbica, o que é impossível de ser feito com régua e compasso.

5. Resultados

Para verificar a influência do *origami* em sala de aula, foi desenvolvido um projeto que consistia em confeccionar dobraduras simples para que os alunos conhecessem os principais elementos geométricos. Esta atividade foi realizada em duas turmas do 7º ano de uma escola pública de Presidente Prudente com duração de 8 aulas em cada uma. O projeto foi apresentado à professora e alunos, que aceitaram participar voluntariamente da pesquisa e acordaram que desenvolveriam as atividades com compromisso e atenção. Inicialmente foi aplicado um questionário com o propósito de obter uma avaliação diagnóstica para a verificação dos conhecimentos prévios dos discentes acerca dos elementos geométricos. Os discentes deveriam escrever uma definição e/ou representar o que entendiam por: ângulo; ângulo reto; bissetriz; retas paralelas; retas perpendiculares; retas concorrentes; segmento de reta; triângulo; triângulo equilátero; quadrado e vértice. Cerca de 70% dos alunos deixou a maior parte dos itens em branco. A professora relatou que a sala apresenta grandes dificuldades de aprendizado devido à defasagem em conteúdos de anos anteriores. A análise diagnóstica foi tabulada, os itens em branco foram considerados como erros. A maior parte dos alunos enfrentou dificuldade tanto em representar como em descrever os elementos geométricos. No item que se refere ao quadrado, grande parte representou por um quadrilátero com ângulos retos, mas sem congruência dos lados. A maior assertiva foi quanto à representação do triângulo. Os resultados das duas salas foram semelhantes, com pequena variação entre elas. A média de acertos em ambas as salas ficou abaixo de 20%.

As aulas envolvidas no projeto foram ministradas durante quatro semanas seguidas, acontecendo em aulas duplas em cada uma das salas. O material utilizado foi baseado em Carneiro e Spira (2005). As atividades desenvolvidas através do recurso do *origami* foram: determinação de retas perpendiculares a um ponto dado; construção de duas retas paralelas; construção da reta mediatriz a um segmento dado; determinação da reta bissetriz de um ângulo qualquer; determinação da altura e ortocentro de um triângulo; construção de triângulo equilátero; construção do quadrado; verificação da razão áurea; construção de pentágono regular; trissecção de um ângulo agudo. Na última aula, após a realização das atividades, os alunos responderam novamente ao questionário conceitual. Observou-se que todos os elementos pesquisados obtiveram melhora após o trabalho com o *origami*. A média de acertos subiu consideravelmente nas duas salas. Além disso, a maior parte dos alunos não deixou questões em branco e conseguiu além de definir, representar grande parte dos conceitos. Segue abaixo os gráficos que comparam os resultados entre a avaliação diagnóstica e a avaliação final.

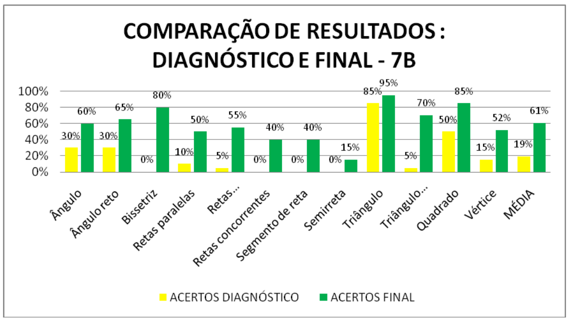

Gráfico 1: Comparação de resultados 7ºB
Fonte: Autoria própria.

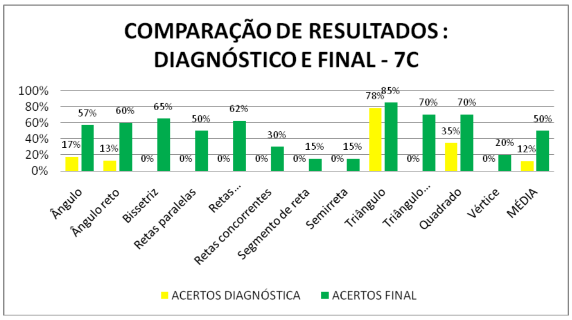

Gráfico 2: Comparação de resultados 7ºC
Fonte: Autoria própria.

Além da reaplicação do questionário após a realização das atividades foi solicitado aos alunos que respondessem sobre seu grau de satisfação em relação às aulas. A maior parte dos discentes afirmou que a atividade foi interessante, diferente e divertida. Muitos deles disseram que a realização das atividades não foi fácil, pois não têm contato com o uso de dobraduras usualmente, entretanto a maioria acrescentou que a confecção do *origami* parece uma brincadeira e que gostaram do desafio. O desenvolvimento do projeto foi agradável sendo perceptível a empatia dos aprendizes em relação ao material utilizado. Os resultados espelham o que foi descrito por Manso (2008, p.3)

> Os resultados deste estudo apontam para que ao trabalhar com as dobragens, a grande maioria dos alunos da turma: (1) conseguiram desenvolver uma aprendizagem consistente, através da organização das ideias; (2) demonstraram entusiasmo por novos desafios e por novas descobertas; (3) desenvolveram a sua

capacidade de autocrítica; (4) reconheceram o valor do trabalho em grupo e a importância do papel do professor.

Uma pequena parcela descreveu que gostou bastante das atividades no início do projeto, mas acharam que elas se tornaram um tanto repetitivas no decorrer das aulas. O cansaço demonstrado pelos alunos devido a necessidade da repetição de procedimentos também foi relatado por Manso (2008). Assim, com esta pesquisa, constatou-se melhoras tanto no aspecto intelectual quanto no atitudinal. Houve elevação de cerca de 40% na média de acertos das avaliações. Ainda foi notória a motivação para o desenvolvimento dos procedimentos bem como a cooperação entre os pares.

6. Considerações Finais

A geometria do *Origami* desenvolvida a partir da década de 70 fundamenta a técnica que pode ser muito eficaz na resolução de diversos problemas matemáticos. O axioma 6 é o diferencial que permite solucionar questões que outrora não eram possíveis com os instrumentos euclidianos. Este item torna possível a resolução de equações cúbicas como a trissecção do ângulo e o problema deliano.

A inserção deste instrumento no ensino tem sido alvo de estudo nos últimos anos, inclusive por alunos mestrandos do PROFMAT, entretanto ainda não repercutiu em sala de aula de maneira desejável. Até mesmo o currículo oficial do estado de São Paulo (2010) embora tenha sido reestruturado a partir do ano de 2008, não aborda o uso do *origami* como instrumento de ensino. O uso de dobraduras pode ser muito útil no ensino da matemática. A utilização de materiais concretos em sala torna a aula dinâmica e a aprendizagem mais significativa. O trabalho desenvolvido em campo alcançou a receptividade dos alunos. Percebe-se, contudo, que a utilização sequenciada do mesmo instrumento também o torna cansativo. Alguns alunos relataram em suas avaliações que as atividades finais tornaram-se repetitivas. Conclui-se que é imprescindível no cotidiano da sala de aula diversificar metodologias e estratégias, por isso propusemos o *origami* como mais um instrumento que auxilie o docente nesta importante e desafiadora missão que é o ensino da matemática.

7. Agradecimentos

Agradeço à fundação Capes pelo apoio financeiro no desenvolvimento deste projeto.

8. Referências

CAVACAMI, Eduardo. FURUYA ,Yolanda Kioko Saito. **Explorando Geometria com Origami**. Departamento de Matemática da Universiade Federal de São Carlos. www.dm.ufscar.br/ yolanda/origami/origami.pdf, 2009

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática. Campinas:** Editora Unicamp, 2004, p.843.

FREITAS, Bruno Amaro. **Os problemas clássicos da geometria: uma abordagem com o uso do Origami.** 2013. 47f. Dissertação (Mestrado). -Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro - 2013

LANG, Robert J. **Origami and Geometric Constructions**, 2010. Disponível em: < http://www.langorigami.com/science/hha/origami_constructions.pdf>. Acesso em 06 mar. 2015.

LUCERO, Jorge C. **A trisecção de um ângulo**, Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, 2006ª. Disponível em: <www.mat.unb.br/**lucero**/origami/Notas_3.pdf>. Acesso em 10 out. 2015

______ **O problema Deliano**, Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, 2006b. Disponível em: <www.mat.unb.br/~**lucero**/origami/Notas_2.pdf>. Acesso em 10 out. 2015.

MANSO, Roberta L. D. **Origami: uma abordagem pedagógica para o ensino de geometria no 9ºano.** 2008 244f. Dissertação (Mestrado).**-** Universidade de Lisboa, Lisboa.

MONTEIRO, Liliana Cristina Nogueira. **Origami: História de uma Geometria Axiomática.** 2008.111f. Dissertação (Mestrado).**-** Universidade de Lisboa, Lisboa, 2008.

OLIVEIRA, Fátima Ferreira. **Origami: Matemática e Sentimento**, 2004. Disponível em: http://www.nilsonjosemachado.net/20041008.pdf. Acesso em 01 set. 2015.

SÃO PAULO (ESTADO) Secretaria da Educação. **Currículo do Estado de São Paulo**: Matemática e suas Tecnologias. São Paulo: SEE, 2010.

ISSN 2178-034X