MATRIZES: UMA TECNOLOGIA DE PONTA

Bruna Moustapha Corrêa
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
bruna.correa@uniriotec.br

Michel Cambrainha de Paula
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
michel.cambrainha@uniriotec.br

Adriano Maurício de Almeida Côrtes
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
adriano.cortes@uniriotec.br

Gladson Octaviano Antunes
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
gladson.antunes@uniriotec.br

Resumo:
O ensino de matrizes nos anos finais da Educação Básica sofre do problema da descontextualização, frequentemente originado pelo fenômeno conhecido como naturalização. Inspirados pelas reflexões de Felix Klein no início do século XX, denominada pelo próprio de translação histórica, propomos neste minicurso uma recontextualização do conceito de matrizes e suas operações usando como aplicação tecnológica motivadora o conjunto de técnicas que permitiu ao *Google* assumir a dianteira dos mecanismos de busca: o algoritmo *PageRank*. Por meio do processo de modelagem matemática do problema do ranqueamento da grande rede, e de uma sequência de atividades, apresentamos o conceito de matrizes e resolução de sistemas lineares como ferramentas para solução de um problema real. Dessa forma objetivamos apontar mais uma direção para a desnaturalização de matrizes, assim como contribuir para discussões sobre o conteúdo matemático na formação docente.

Palavras-chave: matriz; modelagem matemática; algoritmo de ranking; recontextualização; dupla descontinuidade.

1. Introdução

Tecnologia. Você certamente deve ter pensado em *smartphones*, computadores, *videogames*, *internet*. Você está certo! Exemplos não faltam a nossa volta: ao efetuar transações bancárias de onde estivermos pelo celular, ao fazer a declaração de imposto de renda no computador e depois enviá-la pela *internet*, ao armazenar arquivos nas nuvens, ao utilizar o sistema de localização geográfica (GPS), ao ouvir músicas *online*, ao fazer buscas na *internet* usando o *Google*, ao assistir televisão com sinal digital, etc. A essa extensa lista podemos ainda adicionar aplicações mais específicas como o lançamento de nanossatélites, os exames médicos de imagem, por exemplo, ressonância magnética, ultrassonografia 3D e *PET*

Scan[1], entre muitas outras situações. Todos os avanços tecnológicos que a nossa sociedade vivenciou ao longo da história, como por exemplo a Revolução Industrial; está vivenciando e experimentará nas próximas décadas nas mais diversas áreas têm pelo menos uma coisa em comum: foram alavancados pelo conhecimento matemático. Estamos presenciando e vivendo uma transição para a nova era da *Internet* Das Coisas (IOT – *Internet Of Things*), dos dispositivos vestíveis (*wearables*), da nanotecnologia, e a Matemática igualmente tem um papel preponderante para o desenvolvimento e a consolidação de cada uma dessas tecnologias. Um dos nossos grandes desafios como professores é mostrar para os estudantes esse importante papel que a Matemática desempenha, despertando neles maior interesse pela disciplina.

Para este minicurso, escolhemos abordar a relação entre matrizes e o mecanismo de ranqueamento de páginas da grande rede realizado pelo *Google*, conhecido como *PageRank*. As discussões pretendidas têm um potencial de se adaptarem tanto para estudantes do Ensino Médio, quanto para licenciandos. Além disso, elas podem servir a dois propósitos: motivação ou aplicação do estudo de matrizes.

A proposta de minicurso está organizada da seguinte forma: na próxima seção apresentamos a justificativa e a fundamentação teórica. Na seção 3, discutimos um pouco sobre o *PageRank* e sua relação com alguns conteúdos matemáticos. Na seção 4, fazemos uma breve descrição das atividades que pretendemos realizar no minicurso e, por fim, apontamos algumas perspectivas futuras.

2. Desnaturalização, Translação Histórica e Modelagem: a Fundamentação Teórica

Em geral, o ensino de matrizes se dá de maneira descontextualizada[2]. Como Bernardes (2016) indica em sua tese, as matrizes surgiram como uma técnica, contudo, em geral, são apresentadas como um objeto, muitas vezes com fim em si mesmo. Como Giraldo e Roque (2014) argumentam, é necessário que a visão naturalizada dos conceitos matemáticos seja superada, sobretudo, nos cursos de formação de professores. Ao abordar os conceitos matemáticos de modo naturalizado "sua existência, sua importância e seu papel na matemática contemporânea são assumidos como dados arbitrariamente, sem que sejam levadas em conta as demandas e tensões que impulsionaram sua gênese." (GIRALDO &

1 PET Scan sigla em inglês para Tomografia por Emissão de Pósitrons.

2 Empregamos aqui o termo "descontextualizado" no sentido empregado por Tatiana Roque. Ver, por exemplo (GIRALDO & ROQUE, 2014).

ISSN 2178-034X

ROQUE, 2014, p. 14). É nesse sentido que apontamos para uma recontextualização das matrizes, buscando destacar sutilezas relacionadas ao conceito de matrizes as quais a tecnologia pode deixar aparente, articulando-as ao ensino.

Entendemos que a perspectiva de visão naturalizada dos conceitos denunciada por Giraldo e Roque (e.g., 2014) tem relação com o processo de *translação histórica* apontado por Felix Klein já no início do século XX. Para entender tal processo é fundamental atentar para o que Klein denunciou como *dupla descontinuidade*.

> Klein lamentou a permanência de um sistema de 'duplo esquecimento': os iniciantes dos estudos em matemática têm que esquecer desde o primeiro semestre a matemática 'baixa', aquela tratada na escola. Tendo passeado nas regiões superiores da ciência durante as aulas, e passando nos exames para se tornar professor em tais escolas, ele tem de deixar toda esta matemática alta, para descender àquelas partes coaguladas. (KLEIN & SCHIMMACK, 1907, p.1 apud SCHUBRING, 2014, p. 49-50).

Visando desfazer essa dupla descontinuidade,

> Klein não optou por uma translação direta do novo saber matemático para a escola, mas percebeu a relação entre os dois domínios de saber [elementar e superior] como uma variável histórica, e assim propôs lidar com este desenvolvimento histórico como um processo de elementarização que ele chamou [...] 'translação histórica'. (SCHUBRING, 2014, p. 50).

Klein e Schimmack esclarecem que a translação histórica pode ser entendida como o processo de desenvolvimento da ciência no qual "partes superiores e mais complicadas tornam-se paulatinamente mais elementares, devido ao aumento na capacidade de esclarecer os conceitos e à simplificação da exposição" (KLEIN & SCHIMMACK, 1907, p.90 apud SCHUBRING, 2014, p. 50).

Nossa proposta é apresentar um uso para o conceito de matrizes que acreditamos ser, de certa forma, uma simplificação da exposição, uma vez que podemos, através da modelagem de uma situação oriunda de uma outra ciência, a saber, a Ciência da Computação, traduzir um problema real que envolve (literalmente) bilhões de variáveis e técnicas matemáticas avançadas em uma linguagem simples e acessível para um estudante do nível médio. Para este minicurso consideramos a Modelagem Matemática como em Almeida e Ferruzi (2009), "uma alternativa pedagógica na qual fazemos uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema não essencialmente matemática". Pretendemos, através das atividades propostas apresentar a Matemática como protagonista no desenvolvimento tecnológico recente, trazendo assim à tona a dimensão sócio-crítica da Modelagem Matemática, segundo a qual

> "As atividades de Modelagem são consideradas como oportunidades para explorar os papéis que a matemática desenvolve na sociedade contemporânea. Nem matemática nem Modelagem são 'fins', mas sim 'meios' para questionar a realidade vivida. Isso não significa que os alunos possam desenvolver complexas análises sobre a matemática no mundo social, mas que Modelagem possui o potencial de gerar algum nível de crítica". (BARBOSA, 2001, p. 4).

Além do caráter motivador para o estudo de matrizes que dará o tom do minicurso, as atividades aqui apresentadas podem também ser utilizadas pelo professor como uma aplicação posterior à apresentação do conteúdo. Esperamos, assim, que de uma maneira ou de outra, a experiência propiciada por este minicurso possa ser inspiradora para a prática docente dos participantes.

3. *PageRank*

Desenvolvido inicialmente na Universidade de Stanford a partir de 1995 por Larry Page, por isso o nome *"Page" Rank*, e posteriormente contando com a colaboração de Sergey Brin, ambos fundadores do *Google*, o *PageRank* (PR) é a métrica utilizada pela ferramenta de busca do *Google* para decidir a posição em que um site deve aparecer na lista exibida a partir de uma consulta. O PR de um site varia de 0 a 10, quanto mais próximo de 10 maior é a possibilidade dele aparecer bem posicionado na tela de resultados do *Google*.

Podemos pensar no PR como um mecanismo de "votos" que funciona da seguinte forma: cada *link* direcionando uma página para outra é considerado um "voto", como se fosse uma recomendação daquela página à página para a qual o *link* aponta. Quanto maior for o PR da página de onde sai o *link* maior peso terá o "voto" atribuído à página de destino. Dessa maneira, periodicamente, se faz uma espécie de eleição para se decidir quais páginas receberam mais "votos". O algoritmo PR funciona como o mecanismo de apuração desses votos.

Vamos detalhar tal algoritmo conforme Austin (2008). A cada página *web* P vamos atribuir uma medida de sua importância, que denotaremos por $I(P)$. Suponha, então, que a página P_j possui l_j *links*. Se um desses *links* apontar para a página P_i, então P_j irá passar $1/l_j$ de sua importância para P_i. Dessa forma a importância de P_i será a soma de todas as contribuições trazidas pelas páginas que apontam para ela. Sendo assim, se denotarmos por B_i o conjunto de todas as páginas que possuem *link* para P_i, então:

$$I(P_i) = \sum_{P_j \in B_i} \frac{I(P_j)}{l_j}$$

A expressão acima revela que para determinar a importância de uma página, primeiro precisamos conhecer a importância de cada uma das páginas com *links* que apontam para ela. Isso, em um primeiro momento, pode dar a impressão de que estamos aprisionados em uma espécie de *loop*. No entanto, quando reformulamos nosso problema em um contexto matricial percebemos que este não é o caso. De fato, consideremos a matriz $H = [H_{ij}]$ definida da seguinte forma:

$$H_{ij} = \begin{cases} 1/l_j\,, & se\ P_j \in B_i \\ 0\,, & caso\ contrário \end{cases}$$

Seja ainda o vetor $I = [I(P_i)]$ cujas componentes são as importâncias de cada uma das páginas P_i. Percebemos, então, que a condição acima, que define a importância da página P_i, pode ser expressa como $I = H.I$. Isto é, o vetor I é um autovetor da matriz H com autovalor correspondente igual a 1.

Vejamos um exemplo. Considere o esquema indicado na Figura 1 contendo uma *web* formada por 4 páginas e os respectivos *links* entre elas, representados na figura pelas setas.

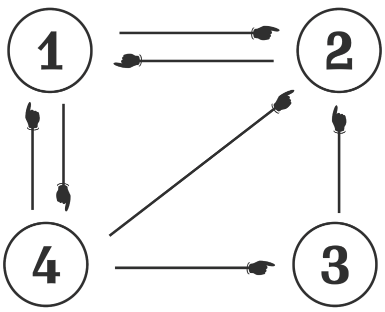

Figura 1: *Web* formada por 4 páginas e *links* entre elas.

Nesse caso, $l_1 = 2, l_2 = 1, l_3 = 1$ e $l_4 = 3$. Portanto, a matriz H é igual a

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O vetor de importância $I = (I(P_1), I(P_2), I(P_3), I(P_4))$ é a solução da equação:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ I(P_3) \\ I(P_4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(P_1) \\ I(P_2) \\ I(P_3) \\ I(P_4) \end{bmatrix}.$$

Uma solução possível, já que o sistema tem infinitas soluções, é $I = (6,5,1,3)$. O que significa que a página 1 é a mais importante nessa *web*, seguida das páginas 2, 4 e 3, nessa ordem. Em termos probabilísticos, podemos pensar o vetor I como uma distribuição de probabilidade, isto é, que a soma de todas as suas coordenadas seja igual a 1. Nesse caso, temos $I = (0{,}4; 0{,}33; 0{,}07; 0{,}2)$.

A modelagem que foi estabelecida nos permite explorar os seguintes tópicos: sistemas lineares, tradução de sistemas lineares para matrizes, motivar a definição da multiplicação entre matrizes, métodos iterativos e numéricos, matrizes estocásticas, autovalores e autovetores e grafos.

4. Atividades

Pretendemos desenvolver no minicurso atividades baseadas em um modelo reduzido do *PageRank* considerando *webs* contendo um número pequeno de páginas e a relação de *links* entre elas, como mostrado na Figura 1. Inspirados em Batti (2015), exploraremos situações nas quais o desenvolvedor de uma página pode avaliar o impacto causado no ranqueamento de sua página com a inserção de uma nova página. Apresentaremos um *applet* feito no *Geogebra* em que o aluno pode experimentar diversas situações de diferentes *webs* e, então, conjecturar como os *links* afetam o ranqueamento das páginas. Introduziremos, na medida do possível, algumas técnicas que permitem resolver casos mais próximos do real, envolvendo grande quantidade de páginas na *web*, como o método iterativo para encontrar soluções estacionárias, bem como a definição da matriz *Google*, introduzindo no modelo apresentado uma nova matriz conhecida como matriz de teletransporte.

As atividades abordadas envolvem os conceitos de matrizes, sistemas lineares, autovalores e autovetores, cadeias de Markov e grafos. No minicurso enfocaremos os conceitos de matrizes e de sistemas lineares.

Também pretendemos apresentar o *software Maxima* como uma ferramenta para resolver sistemas lineares, a partir da apresentação de redes com um número maior de páginas *linkadas*, usando como exemplo a página da SBEM para montar um modelo em menor escala do *PageRank*. Destacamos, ainda, que este minicurso pode contribuir para o enriquecimento do conhecimento matemático do futuro professor. Assim, pretendemos também discutir ao final das atividades como o seu desenvolvimento pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de matrizes, na medida em que amplia o repertório do professor para além do lugar comum da abordagem desse conceito.

5. Considerações Finais e Perspectivas

Por fim, gostaríamos, de destacar a importância de se atentar para as implicações que abordagens naturalizadas podem trazer para a formação de modo geral, especialmente no que diz respeito a um conhecimento sem fundamento, isto é, um conhecimento que não permite ao sujeito fazer articulações e conexões que ultrapassem os exemplos e a forma com que o conteúdo lhe foi apresentado.

Entendemos que a proposta aqui apresentada não tem intenção de sanar todos os problemas e as carências relacionadas ao ensino de matrizes. Nossa intenção é de mostrar como é possível apresentar para alunos da Educação Básica desenvolvimentos matemáticos de ponta e recentes. Reflexões sobre atividades como as propostas neste minicurso parecem ser promissoras nas discussões sobre formação de professores, sobretudo, num cenário como o da Educação Brasileira em que a lista de conteúdos a serem estudados pelos jovens na Educação Básica é muito extensa, perdendo-se, muitas vezes a oportunidade de discutir mais profundamente algum tema, sob a justificativa de que é preciso cumprir um programa. Além disso, destacamos que o uso da tecnologia permite que se ultrapasse as barreiras impostas pelas orientações curriculares. Quem poderia imaginar nossos estudantes do Ensino Médio trabalhando com matrizes de ordens superiores a 10 ou mesmo avaliando a convergência de um algoritmo numérico?

Nesse sentido, defendemos a autonomia do professor na seleção de materiais e temas para serem abordados em suas salas. Para tanto, é fundamental que o professor tenha um conhecimento matemático sólido; entendemos que essa solidez não se dá em “mais Matemática” apenas, mas também na possibilidade de revisitação da matemática já conhecida e aprendida com vistas para o ensino. No caso da proposta de atividades para este minicurso a ideia é não apenas apresentar um desenvolvimento de ponta, mas também motivar o estudo da Matemática em geral. A motivação vai ao encontro da perspectiva de desnaturalizar os conceitos matemáticos apresentados na medida em que esperamos, por exemplo, que os participantes compreendam por que o produto de matrizes é definido como tal.

Esperamos que as discussões ocorridas durante o minicurso façam os participantes refletirem sobre a sua [futura] prática. Também buscamos fomentar uma interação entre a Matemática e a Educação Matemática, especialmente visando à melhoria da formação do professor de Matemática, em face do papel que pesquisadores dessas duas áreas têm nas licenciaturas e devido à importância das discussões sobre o conhecimento de conteúdo matemático na formação desses profissionais.

6. Referências

ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. Alexandria, 2(2), p. 117-134, 2009.

AUSTIN, D. How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack (http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-pagerank). AMS Feature Columns, 2008.

BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., Caxambu. Anais. Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM

BATTI, J. C. Um pouco da matemática usada no algoritmo *PageRank* do *Google*. 2015. 63 f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Matemática) UFSC, Florianópolis, 2015.

BERNARDES, A. C. S. História e Ensino de Matrizes: promovendo reflexões sobre o discurso matemático. 2016. 272 f. Tese (Programa de Engenharia de Sistemas e Computação) UFRJ/COPPE, Rio de Janeiro, 2016.

GIRALDO, V. A. & ROQUE, T. M. História e Tecnologia na Construção de um Ambiente Problemático para o Ensino de Matemática. In GIRALDO, V. A. & ROQUE, T. M. (Org.), O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, p. 9-37, 2014.

SCHUBRING, G. A Matemática Elementar de um Ponto de Vista Superior: Felix Klein e a sua Atualidade. In GIRALDO, V. A. & ROQUE, T. M. (Org.), O Saber do Professor de Matemática: Ultrapassando a Dicotomia entre Didática e Conteúdo. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, p.39-54, 2014.