

## MODELAGEM MATEMÁTICA E O ALGORITMO SIMPLEX

*Grazielle Santiago de Souza*  
*UFRRJ*  
*grazi.santiago23@outlook.com*

*Arthur da Silva Moraes*  
*UFRRJ*  
*arthurmoraes@hotmail.com*

### **Resumo:**

Este minicurso tem como objetivo mostrar a relação da Modelagem Matemática com o tema de pesquisa do grupo PET Matemática e Meio Ambiente da UFRRJ. O trabalho apresenta resultados obtidos através de 3 experimentos feitos no grupo de Ensino, Pesquisa e Extensão. Os experimentos são feitos em um processo de reutilização de água, onde se aborda também o processo de filtragem caseira. Através dos dados que foram obtidos – água de entrada, saída e água desperdiçada – utilizou-se um recurso da programação linear, o Algoritmo Simplex, para podermos ter definido um valor ideal de água (em litros) que pode ser filtrado de forma que seu desperdício seja mínimo, ou seja, no contexto da modelagem matemática, procuramos resultados prescritivos.

Em contexto com a modelagem dentro da sala de aula, interdisciplinarmente une-se a matemática e o meio ambiente, onde os alunos podem de forma cognitivista aprender o como, o porquê de reutilizar a água, fazendo com que vejam a matemática de forma utilitária no seu cotidiano.

**Palavras-chave:** Modelagem matemática; Simplex; Reuso de água; Filtragem; educação ambiental;

### **Objetivos do Minicurso:**

- 1) Evidenciar os aspectos cognitivos no processo de construção de modelos matemáticos para alunos da educação básica;
- 2) Abordar exemplos referentes ao projeto, de acordo com o tema do minicurso;

### **Justificativa:**

A modelagem matemática tem diferentes concepções e é um dos assuntos mais abordados na atualidade da educação matemática. Dessa forma, poder pautar temas interdisciplinares e que despertam

a curiosidade do corpo discente é de suma importância para que seja feita um aproveitamento de trabalhos e projetos acadêmicos para o dia-a-dia da sala de aula. Com esse minicurso, o professor da educação básica poderá vivenciar a prática da modelagem (programação linear) e posteriormente, desenvolver em sala de aula com os alunos.

### **Metodologia:**

- 1) O conceito de modelagem e sua apresentação através do contexto com a Educação Matemática.
- 2) Conceituação de Modelagem Matemática: O que é, modelagem e a relação com a programação linear, programação linear e o algoritmo simplex.
- 3) O trabalho desenvolvido pelo PET Matemática e Meio Ambiente e sua correlação com o algoritmo simplex.
- 4) Constituição de grupos com os inscritos no minicurso.
- 5) Desenvolvimento de atividades com programação linear do algoritmo simplex.
- 6) Discussões acerca do minicurso: a possibilidade da construção do pensamento matemático e as possibilidades de trabalho na Educação Básica, questões relevantes ao trabalho desenvolvido.

### **1 – Modelagem Matemática: Conceito e aplicação**

Entende-se a modelagem matemática como sendo um conjunto de etapas que tem como objetivo final fornecer uma descrição matemática de um dado fenômeno do mundo real. Tal descrição, que geralmente é feita por meio de equações, é chamada de modelo matemático. Segundo Goldbarg “Um modelo é um veículo para uma visão bem estruturada da realidade. Um modelo pode também ser visto, com os devidos cuidados, como uma representação substitutiva da realidade.”.

Isso significa que, quando queremos e pensamos em um modelo (matemático ou não), queremos algo que seja próximo à, não igual à realidade, algo que seja similar de forma que as conclusões tiradas através da análise possam ser estendidas à realidade.

Em consequência, para a formalização desse modelo é indispensável definir:

- . A estrutura relacional do sistema representado.
- . O comportamento funcional de cada subsistema ou componente atômico.
- . Os fluxos de inter-relacionamento.

Pode-se abordar a classificação dos modelos pelas propriedades que os mesmos são capazes de representar. Sob esse aspecto, Goldbarg cita Ackoff (1971), destacam-se os seguintes grupos:

- Modelos icônicos: as características relevantes dos objetos reais são representadas como se parecem, mas normalmente com mudança de escala; são, portanto, imagens, daí o termo icônico. Um modelo de um carro de Fórmula 1, em escala 1:30, colocado num túnel de vento, é o exemplo da modelagem à qual nos referimos.
- Modelos analógicos: usam um conjunto de propriedades para representar outro conjunto de propriedade. O desenho das linhas do metrô ou então o diagrama unifilar de uma instalação hidráulica são exemplos desse tipo de modelo
- Modelos simbólicos: Os modelos simbólicos usam letras, números e outros símbolos para representar as variáveis e suas relações. Em grande parte dos casos, tomam a forma de relações lógicas ou matemáticas (equações). De uma forma geral, todos os modelos e, em especial, os modelos simbólicos são desenvolvidos de uma forma interativa por aproximações.

Para o minicurso, o modelo utilizado será o simbólico, onde trabalharemos com variáveis e as relações existentes nelas.

### **1.1 – Implicações da Modelagem para o Ensino e a Aprendizagem**

Algumas implicações dos trabalhos já desenvolvidos com Modelagem podem ser enumeradas, são elas:

- a) maior interesse do(s) Grupo(s);
- b) maior interação no processo de ensino e aprendizagem;
- c) demonstração de uma forma diferenciada de conceber a educação, o ensino e a aprendizagem, o que leva à adoção de uma nova postura pelo professor;
- d) a ruptura com o currículo vigente;
- e) as Diretrizes Curriculares e a Modelagem Matemática;
- f) a indissociabilidade entre Ensino e Pesquisa na Modelagem Matemática;
- g) a Modelagem Matemática e a contextualização.

## 2 – Programação Linear

### 2.1 – Conceito e aplicação

A programação linear, no campo da programação matemática, é uma área da pesquisa operacional com vasta aplicação em apoio à decisão. O termo “programação”, tanto linear quanto matemática, não tem a ver diretamente com programação de computadores, ou linguagem de programação. Este termo tem origem em suas aplicações, originalmente desenvolvido para resolver problemas industriais. Assim, o termo “programação” da programação linear está relacionado ao planejamento de recursos escassos visando atender as condições operacionais. Estas, por sua vez, são representadas por equações e funções lineares. A aplicação da programação linear em apoio à decisão ocorre na condição que se decide para atingir um objetivo. Este, por sua vez, é resultante da alocação ótima dos recursos. Por isso caracterizamos a programação linear como uma técnica de otimização.

### 2.2 – Algoritmo Simplex

Hillier (2006) define o simplex:

“(…) o método simplex, um procedimento para solucionar problemas de programação linear. Desenvolvido por George Dantzig em 1947, provou ser um método extremamente eficiente que é usado rotineiramente para solucionar problemas imensos nos computadores de hoje.” (HILLIER, 2006, p. 101).

Sabendo que o método simplex é um procedimento para solução de problemas de programação linear (P.L.), sabemos que ele utiliza de métodos como equações de primeiro grau para buscar uma solução e também na álgebra sistema de variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , de acordo com a quantidade de variáveis de informação forem dadas para encontrar a resposta do problema.

### 3 – O trabalho do grupo PET Matemática e Meio Ambiente

#### 3.1 – Reutilização da água e Filtragem de água:

O grupo PET Matemática e Meio Ambiente da UFRRJ tem como um dos projetos principais a reutilização da água e o processo de filtragem que é feito com essa água que vai ser reutilizada através de um filtro caseiro, que pode ser montado facilmente por qualquer pessoa, utilizando recursos tecnológicos de pouco custo e que são fáceis de encontrar em qualquer lugar.

O texto abaixo, do Brasil Escola, define água de reuso:

“A água de reuso pode ser definida como a água residuária que está dentro de padrões estabelecidos para a sua reutilização. Normalmente a água residuária é proveniente do banho, cozinha, processos de fabricação industrial e águas de infiltração, sendo geralmente tratada em Estações de Tratamento de Esgoto. Existem dois tipos principais de reuso: o indireto e o direto. O reuso indireto é aquele em que a água é utilizada pelo homem e liberada novamente nos corpos hídricos sem ou com tratamento prévio. O reuso direto, por sua vez, é o uso planejado da água residuária. Dessa forma, são realizados tratamentos, e essa água é transportada até seu local de uso. Nesse último caso, a água não é lançada no meio. A água de reuso possui uma qualidade inferior quando comparada à água potável e não é usada diretamente para o consumo. Em grande parte dos casos, sua utilização engloba geração de energia, refrigeração de equipamentos, lavagem de carros, irrigação de campos para cultivo, combate a incêndios, limpeza de ruas e irrigações de jardins. Todas essas atividades não necessitam da utilização de água potável, sendo assim, a água de reuso faz com que maior quantidade de água potável seja disponibilizada, ajudando, portanto, no problema de abastecimento. A água de reuso é, sem dúvidas, uma ótima alternativa para a atual crise

hídrica na qual o Brasil encontra-se. A reutilização da água promove o uso sustentável de recursos hídricos, diminui a quantidade de esgoto lançada nos rios e lagos, além, é claro, de aumentar a disponibilidade para fins em que há necessidade de potabilidade.” (Brasil Escola, 2016).

O processo de filtragem utilizado, é bastante conhecido por professores, principalmente do Ensino Fundamental I, onde se utiliza muito o processo de ensino e aprendizagem cognitivista. O filtro caseiro utiliza de recursos que são fáceis de serem encontrados e além do mais, traz uma consciência ambiental para os alunos. A água que seria desperdiçada após uma lavagem de roupa, poderá ser reaproveitada para mais fins domiciliares, como lavar pano de chão, lavar calçada, entre outras atividades.

### **3.2 – Como utilizar o algoritmo Simplex no projeto do processo de filtragem?**

#### **3.2.1 – Escolha do Tema**

Nesse tópico surge a proposta do tema central para a utilização com os alunos, que é o processo de filtragem e a reutilização da água, colocando-os a procura de um modelo para resolver o problema com a quantidade de água filtrada de modo que o seu desperdício seja mínimo.

Tema: Aproveitamento da água de reuso no filtro caseiro.

Autor: PET Matemática UFRRJ

Orientador: Prof. Dr. Pedro Carlos Pereira

O tema sugere que o aluno tenha o maior aproveitamento da água que vai ser reutilizada depois que ela passar pelo filtro caseiro, encontrando assim, um modelo matemático que satisfaça esse processo. O tema escolhido faz correlação com o trabalho do grupo PET Matemática.

#### **3.2.2 – Processo exploratório**

O processo de escolha do tema deu-se a partir da visita técnica a sede da CEDAE-RJ (Companhia Estadual de Águas e Esgotos – Rio de Janeiro) que é uma das companhias de tratamento de água mais conhecidas do mundo. A CEDAE opera e mantém a captação,

tratamento, adução, distribuição das redes de águas, além da coleta, transporte, tratamento e destino final dos esgotos gerados dos municípios conveniados do Estado do Rio de Janeiro.

Foram levantados dados sobre como é feito o processo de filtragem de água etapa por etapa e como é feita a distribuição da água no estado do Rio de Janeiro.

No processo de filtragem/tratamento da CEDAE, existem diversas etapas, como na figura a seguir:

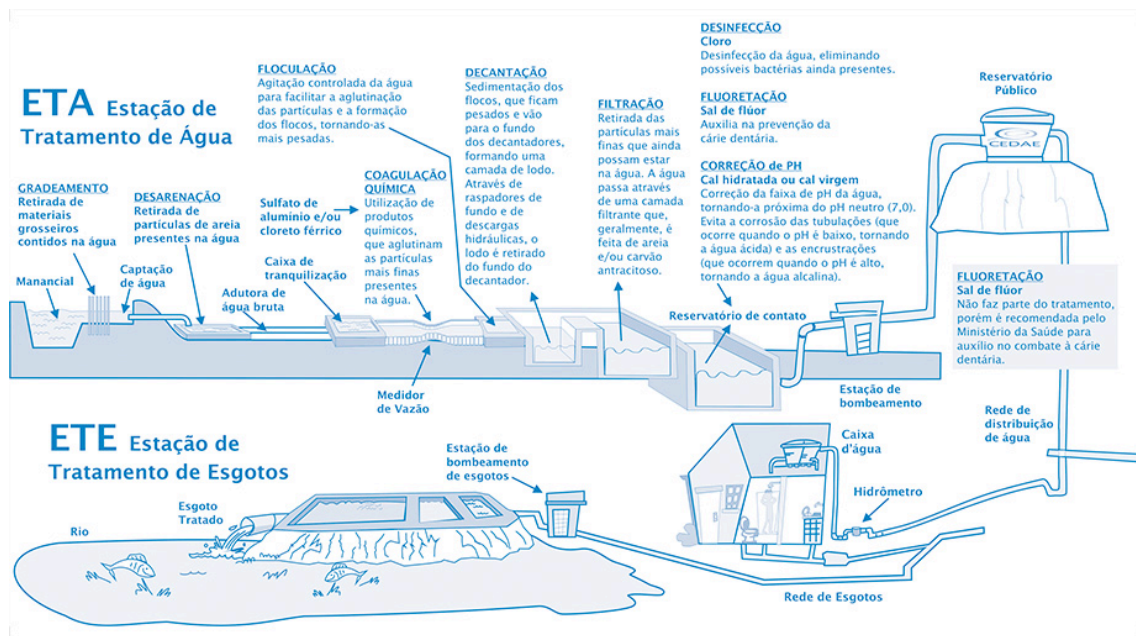


Figura 1 – Ilustração: Estação de Tratamento de Água e Estação de Tratamento de Esgoto

A pesquisa foi feita no ETA-Guandu, que é considerada a maior estação de tratamento de água do mundo, de forma contínua. Durante a visita técnica foi observado que esse processo pode ser feito em casa, através de um modelo menor e com material que pode ser encontrado facilmente. Na própria CEDAE existe um modelo de filtro, que mostra cada material que é utilizado, chamado “Corte de um Filtro”.



Figura 2 – Modelo de filtro (corte)

Através desse modelo, foi montado um modelo de processo de filtração, que é bastante conhecido e tem diversos exemplos na internet, utilizando material reciclado e de fácil acesso:

- Garrafa pet – 2litros
- Tesoura sem ponta
- Chumaço de algodão
- Areia fina
- Areia grossa
- Cascalho fino (pedra 0)
- Cascalho Grosso (a partir de pedra 2)
- Água barrenta

Com esse material é possível trabalhar a construção do filtro, da seguinte forma:

- ✓ Após cortar o fundo da garrafa, vire-a de cabeça pra baixo;
- ✓ Coloque um chumaço de algodão na boca da garrafa, de forma que não haja folga e que não ceda após serem colocados todos os outros materiais;
- ✓ Adicione, respectivamente, uma camada de areia fina, uma de areia grossa, o cascalho fino e, por fim, o cascalho grosso.





Figura 3 – Ilustração do filtro caseiro

Após essas etapas, o filtro estará pronto e a partir da experimentação desse processo de filtragem, poderá ser aplicada a modelagem matemática no processo de reutilização de água, onde a questão pertinente será: Qual o máximo de água utilizada para ter o máximo de água reaproveitada?

Utilizando o algoritmo Simplex, de forma que será otimizado esse procedimento, procuramos um modelo, uma solução ótima para o caso adiante.

### 3.2.3 – Levantamento do problema

Com base nos dados levantados, temos questionamentos pertinentes sobre o que será avaliado: Como utilizar o processo de filtragem de água em sala de aula? A correlação da Matemática com o processo existe? Como achar um modelo matemático que diga a quantidade ideal de água para ser filtrada? O tipo de material utilizado influencia no processo de filtragem? Qual o impacto socioeconômico e as consequências para o meio ambiente?

#### Processo Exploratório

O grupo Pet Matemática e Meio Ambiente fez diversos experimentos, onde eram utilizadas quantidades variadas de água suja para podermos encontrar um padrão onde seria encontrada a quantidade máxima de água utilizada inicialmente. Uma das ideias principais do minicurso é a montagem do filtro com os alunos, de modo que os mesmos tenham acesso ao processo de

ensino cognitivista e a partir desse ponto com seus resultados formar modelos para utilizar no algoritmo simplex.

Com base nos dados que foram recolhidos nas amostras do grupo PET – Matemática e Meio Ambiente, foi montada a questão abaixo:

TABELA 1	Água de entrada	Água retida	Água de saída	Tempo (min)
FILTRO A (2L)	8L	3,5L	5,5L	50
FILTRO B (3L)	18L	6,7L	11,3L	112

Tabela 1 – Tabela com os dados dos experimentos

1 – O grupo PET – Matemática e Meio Ambiente da UFRRJ trabalha com o processo de filtragem de água, encadeado com a água de reuso. E nesses trabalhos são necessários que sejam montados filtros caseiros. Os dois modelos de filtros disponíveis, A e B suportam 2 e 3 litros, respectivamente. Baseado na tabela acima, qual o máximo de água que pode ser usada nesses processos acima, para que seja obtido “lucro” máximo?

SOLUÇÃO: As variáveis  $x_1$  e  $x_2$  serão os tipos de filtros, A e B respectivamente. A função Z será a água de saída, que pode ser comparada a um “lucro” e as restrições é o tempo. Logo temos:


$$\text{Max } Z = 5,5 x_1 + 11,3 x_2$$

$$8 x_1 + 18 x_2 \leq 40$$

$$3,5x_1 + 6,7x_2 \leq 112$$

A partir dessas equações utilizamos a ferramenta PHP Simplex para fazer o cálculo:

## PHPSimplex



Romero Rodrigues,  
fundador do Buscapé

Qual é o objetivo da função? Maximizar ▼

Função: 5,5  $X_1$  + 11,3  $X_2$

Restrições:

8  $X_1$  + 18  $X_2$  ≤ 40

3,5  $X_1$  + 6,7  $X_2$  ≤ 112

$X_1, X_2 \geq 0$

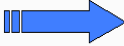
Continuar

Figura 4 – Montagem da função na ferramenta online PHP Simplex

## PHPSimplex

Nós passamos o problema para a forma padrão, adicionando variáveis de excesso, de folga, e artificiais, onde necessário (mostrar/ocultar detalhes)

- Como a restrição 1 é do tipo '≤' é necessária a variável de folga  $X_3$ .
- Como a restrição 2 é do tipo '≤' é necessária a variável de folga  $X_4$ .

<p><b>MAXIMIZAR:</b> <math>5,5 X_1 + 11,3 X_2</math>  <math>8 X_1 + 18 X_2 \leq 40</math>  <math>3,5 X_1 + 6,7 X_2 \leq 112</math>  <math>X_1, X_2 \geq 0</math></p>		<p><b>MAXIMIZAR:</b> <math>5,5 X_1 + 11,3 X_2 + 0 X_3 + 0 X_4</math>  <math>8 X_1 + 18 X_2 + 1 X_3 = 40</math>  <math>3,5 X_1 + 6,7 X_2 + 1 X_4 = 112</math>  <math>X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0</math></p>
--	---	--

Nós passamos a construir a primeira tabela do método Simplex.

Continuar  
Solução direta

Figura 5 – Inserção de variáveis de folga

Tabela 1			5.5	11.3	0	0
Base	C <sub>b</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>
P <sub>3</sub>	0	40	8	18	1	0
P <sub>4</sub>	0	112	3.5	6.7	0	1
Z		0	-5.5	-11.3	0	0

Mostrar os resultados como frações.

A variável que vai sair da base é P<sub>3</sub> e a que entra P<sub>1</sub>.

Continuar

Figura 6 – Tabela do PHP Simplex indicando a variável que sai.

Tabela 2			5.5	11.3	0	0
Base	C <sub>b</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>
P <sub>2</sub>	11.3	2.22222222222222	0.44444444444444	1	0.05555555555556	0
P <sub>4</sub>	0	97.11111111111111	0.52222222222222	0	-0.37222222222222	1
Z		25.11111111111111	-0.47777777777778	0	0.62777777777778	0

Figura 7 – Tabela do PHP Simplex indicando a variável que entra

Operações intermédias (mostrar/ocultar detalhes)

Linha pivô (Linha 1):

$2.22222222222222 / 0.44444444444444 = 5$   
 $0.44444444444444 / 0.44444444444444 = 1$   
 $1 / 0.44444444444444 = 2.25$   
 $0.05555555555556 / 0.44444444444444 = 0.125$   
 $0 / 0.44444444444444 = 0$

Linha 2:

$97.11111111111111 - (0.52222222222222 * 5) = 94.5$   
 $0.52222222222222 - (0.52222222222222 * 1) = 0$   
 $0 - (0.52222222222222 * 2.25) = -1.175$   
 $-0.37222222222222 - (0.52222222222222 * 0.125) = -0.4375$   
 $1 - (0.52222222222222 * 0) = 1$

Linha Z:

$25.11111111111111 - (-0.47777777777778 * 5) = 27.5$   
 $-0.47777777777778 - (-0.47777777777778 * 1) = 0$   
 $0 - (-0.47777777777778 * 2.25) = 1.075$   
 $0.62777777777778 - (-0.47777777777778 * 0.125) = 0.6875$   
 $0 - (-0.47777777777778 * 0) = 0$

Figura 8 – Operações intermediárias do PHP Simplex

## Método Simplex



Operações intermediárias (mostrar/ocultar detalhes)

Tabela 3		5.5	11.3	0	0	
Base	$C_b$	$P_0$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
$P_1$	5.5	5	1	2.25	0.125	0
$P_4$	0	94.5	0	-1.175	-0.4375	1
Z		27.5	0	1.075	0.6875	0

Mostrar os resultados como frações.

A solução ótima é  $Z = 27.5$   
 $X_1 = 5$   
 $X_2 = 0$

Figura 9 – Tabela com o resultado, indicando a quantidade de água ideal para o tipo de filtro, de modo que tenha “lucro” máximo.

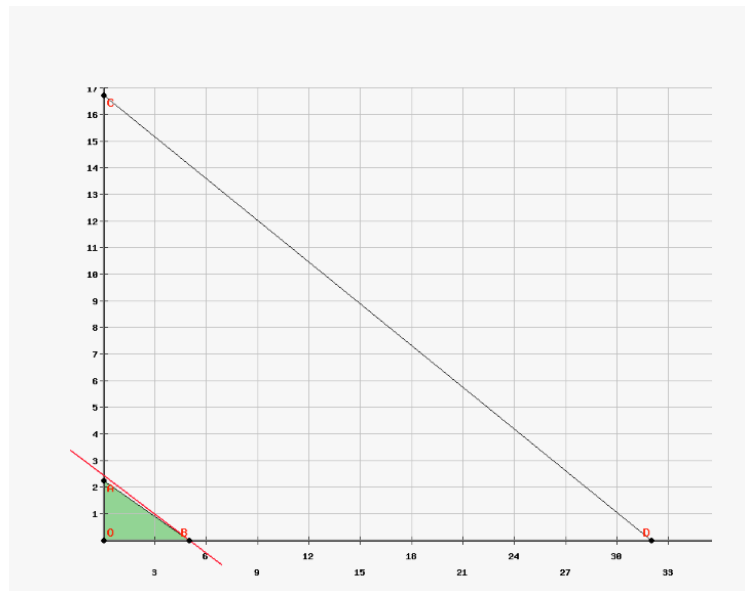


Figura 10 – Gráfico que mostra o polígono de decisão (área viável de uso de água)

Tivemos como resultado a utilização de 27,5 litros de água para que possamos ter o máximo de água reaproveitada no processo de filtragem.

Através desse modelo, muitos outros, envolvendo problemas podem ser formulados. Como, por exemplo, a quantidade de filtros necessária para uma quantidade  $X$  de pessoas, a quantidade de água desperdiçada mínima e etc. Um dos levantamentos que pode ser feitos acerca desse problema de P.L. é sobre a parte geométrica existente nesse sistema de variáveis. Pode-se também trabalhar com o modelo de Matrizes de sistemas e análise de dados, além de

mostrar aos alunos a inserção da matemática em lugares onde não se vê explicitamente que ela existe.

### Considerações Finais

O minicurso busca explicitar caminhos e sugestões de como utilizar a Modelagem Matemática em sala de aula, fazendo uma correlação da Programação Linear com a Matemática utilizada na álgebra linear das escolas – matrizes, sistemas e dados – além de trazer como tópico um tema transversal que é o meio ambiente, usando fatores que são encontrados no dia-a-dia para a construção e execução do problema. Visto que a análise de dados é importante e que o uso de recursos tecnológicos é um dos grandes aliados dos professores no processo de ensino e aprendizagem, o professor pode propor desafios acerca de dados obtidos nesse processo de filtragem e além de mais, de temas que envolvam a matemática e o meio ambiente de forma coligada. O principal objetivo é fazer com que o aluno perceba o processo que conduz a um produto mais significativo.

### Referências

GOLDBARG, Marco Cesar – Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos / Marco Cesar Goldbarg, Henrique Pacca L. Luna. -2.ed. – Rio de Janeiro: Elsevier, 2005 – 10a reimpressão. il.

HALL ROSE, Interdisciplinarietà y Educación Ambiental: algunas reflexiones. En: Congreso Internacional Ponencias Extratexas e Prácticas en Educación Ambiental. Ponencias, Santiago de Compostela, 1996.

HILLIER, Frederick S. Introdução à pesquisa operacional/ Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman; tradução Ariovaldo Griesi; revisão técnica João Chang Junior. - São Paulo: McGraw-Hill, 2006.

<<http://www2.unirio.br/unirio/ccet/matematica/events/palestra-modelagem-matematica-o-que-e-para-que-serve-e-como-fazer>> Acesso em 04/06/2016 às 00h48min.

<<https://www.cedae.com.br/apresentacao>> Acesso em 05/06/2016 às 12h30min.

<<http://www.marcogandra.com.br/2012/08/o-que-e-programacao-linear.html>> Acessado em 04/06/2016 às 02h03min.

SANTOS, Vanessa Sardinha Dos. "Água de reuso"; Brasil Escola. Disponível em <<http://brasilecola.uol.com.br/biologia/Agua-reuso.htm>>. Acesso em 04/06/2016 às 12h12min.