AS CONTRIBUIÇÕES DA VISUALIZAÇAO PROPORCIONADA PELO GEOGEBRA À APREDIZAGEM DE FUNÇÕES DERIVADAS EM CÁLCULO I

Frederico da Silva Reis
Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP.
fredsilvareis@yahoo.com.br

José Cirqueira Martins Júnior
Universidade do Estado da Bahia – UNEB.
jcjunior@uneb.br

Resumo:

O presente artigo aborda o ensino e a aprendizagem de funções Derivadas na disciplina de Cálculo I, em relação às contribuições da visualização pelo *software* GeoGebra. A metodologia de pesquisa foi qualitativa e procurou compreender a visão que professores de Cálculo tiveram de atividades exploratórias, sendo que as formas utilizadas para a coleta dos dados foram os registros de gravações em áudio, as próprias atividades exploratórias e questionários. Nesse contexto, eles fizeram uma experimentação relacionando as atividades com as principais definições que foram sugeridas pelo livro didático utilizado como suporte para a sua elaboração. O estudo aponta que o *software* GeoGebra contribui para que o professor reflita sobre a sua prática pedagógica quando faz uso das demonstrações e exemplos com gráficos de funções Derivadas, oportunizando aos alunos uma melhor interação e aprofundamento dos principais conceitos que envolvem tais gráficos.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem em Cálculo I; Derivadas; Atividades Exploratórias; Visualização; *Software* GeoGebra.

1. Introdução

A pesquisa em Cálculo I tem se tornado crescente no âmbito da Educação Matemática no Ensino Superior. O ensino de Cálculo apresenta dificuldades epistemológicas (SAD, 1998; REZENDE, 2003) e problemas como: a falta de conhecimentos prévios de Matemática por parte de muitos alunos, altos índices de reprovação, turmas muito cheias (MARTINS JÚNIOR, 2015; REZENDE, 2003), dentre outros que ainda merecem atenção de pesquisas para serem melhor compreendidos.

Apesar de existir uma tensão devido ao rigor no trabalho feito com essa disciplina (REIS, 2009), acreditamos que a sala de aula pode ser modificada por aquilo que o professor faz, associando, dessa maneira, o uso da tecnologia computacional ao ensino e, assim, apresentar um diferencial para a sua forma de trabalho e para a aprendizagem dos alunos.

Apresentamos atividades exploratórias que utilizam a visualização como aspecto teórico principal utilizado em sua realização (ARCAVI, 2003; MARTINS JÚNIOR, 2013, 2015; TALL, 1991), sendo elas um componente indispensável para a concretização desse trabalho.

Essas atividades foram elaboradas e adaptadas com base em outras atividades contidas no livro didático de Flemming e Gonçalves (2006). Optamos por escolher este livro pelo fato de ser utilizado em muitos cursos superiores brasileiros.

Neste trabalho, utilizamos a pesquisa Qualitativa em que os dados foram coletados a partir dos registros das atividades realizadas, questionários e pela gravação, em áudio, do diálogo entre os professores e, tal diálogo, serviu como registro para verificar se as atividades ofereciam contribuições no ensino e na aprendizagem com gráficos de funções Derivadas pela percepção desses professores de Cálculo I.

2. Fundamentação Teórica

O uso das tecnologias computacionais tem proporcionado muitas oportunidades para se observar e experimentar o que está acontecendo com muitos conteúdos que são trabalhados na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, a possibilidade de visualização e a múltipla representação dessas informações são exemplos disso. Nesse artigo, descrevemos uma pesquisa que ocorreu a partir de representações gráficas de funções Derivadas com professores da disciplina de Cálculo I ou disciplinas semelhantes.

Nesta pesquisa, iremos tratar da visualização que é proporcionada pelo uso do computador. O processo de visualização tem sido muito utilizado para realizar pesquisas, em especial no âmbito da Educação Matemática, possuindo elementos que são necessários aos processos de ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos em todos os níveis.

Mesmo sendo importante nos processos de ensino e na aprendizagem, a visualização ainda representa um assunto secundário em relação a muitos aspectos da Matemática, como por exemplo, os processos algébricos e geométricos, mas a sua utilização tem se tornado uma oportunidade para o desenvolvimento de pesquisas em Educação Matemática (ARCAVI, 2003; COSTA, 2002; PRESMEG, 2006; TALL, 1991; VILLARREAL, 1999).

Observando algumas definições gerais sobre a visualização elencamos, inicialmente, a que aparece no dicionário Aurélio (FERREIRA, 2004, p. 2069) em que a "visualização é o ato ou efeito de visualizar; transformação de conceitos abstratos em imagens reais ou mentalmente visíveis; processo de visualizar". Os conceitos abstratos ou mentalmente visíveis estão ligados aos aspectos cognitivos, ou seja, à mente humana e, também, ao que acontece durante a formação das imagens realizadas pelos mais diferentes indivíduos. Desse modo, não temos como desatrelar a visualização de algo relacionado à cognição pelo fato de possuir aspectos direcionados aos estudos de Psicologia e, em especial, aos processos de ensino e aprendizagem. Com isso, Presmeg (2006, p. 206, tradução nossa) afirma que "assim, a visualização inclui processos de construção e transformação, tanto imagem visual mental e todas as inscrições de natureza espacial, que podem ser implicadas no fazer Matemática". Notamos que, no fazer Matemática, a visualização está diretamente vinculada a esses processos e ao que pode acontecer no cérebro humano e, bem como, à construção de imagens que podem ser formadas durante a aprendizagem de conteúdos ligados a essa disciplina, sendo isso o que se justifica para usá-la.

Também como complementação a essas ideias, apresentamos a definição dada por Arcavi (2003) para quem:

> Visualização é a habilidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso de reflexão sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de descrever e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias previamente desconhecidas e entendimentos avançados. (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução nossa).

Nessa definição, notamos uma abrangência de aplicação da visualização e de como ela pode beneficiar o ensino e a aprendizagem. Também aparecem elementos que são característicos para um melhor desenvolvimento dos processos mentais e de como essas ideias podem se tornar aliadas para a compreensão de conteúdos matemáticos.

Quando tais imagens, oriundas de uma percepção ou abstração, são formadas no cérebro, elas começam a tomar forma na mente humana. Presmeg (2006) esclarece sobre a imagem visual e ainda caracteriza a pessoa que pode utilizá-la, da seguinte forma: "[...] uma *imagem visual* é tida como uma construção mental que representa a informação visual ou espacial, e um *visualizador* é uma pessoa que prefere usar métodos visuais quando existe essa opção" (PRESMEG, 2006, p. 207, tradução nossa, grifo da autora).

Enfatizamos que a visualização está relacionada com o ato de ver e está diretamente ligada ao pensamento e a função cerebral. Mesmo que muitos professores não valorizem a visualização como uma oportunidade de aprendizagem para os alunos, é inegável que ela contribui para isso. Porém, essas oportunidades variam de acordo com as propostas que podem ser feitas para os alunos e quais pensamentos eles podem mobilizar. No uso da cognição, trabalhando com processos mentais, os professores e alunos desenvolvem o pensamento matemático e, dentro desse componente, temos o pensamento visual-espacial, definido por Costa (2002, p. 263) como "o conjunto de processos cognitivos para os quais as representações mentais para objetos espaciais ou visuais, relações e transformações podem ser construídas, manipuladas e codificadas em termos verbais ou mistas".

Dessa forma, ao usar o pensamento visual é possível fazer operações intelectuais sobre o material perceptivo-sensorial e de memória, relacionando-as com a manipulação e transformação de ideias e, bem como, na tradução e comunicação dos métodos e conceitos que são utilizados para a exploração desse pensamento.

3. Procedimentos Metodológicos

Para a obtenção dos dados, a metodologia utilizada foi a da pesquisa Qualitativa, que tem sido um eixo norteador de trabalhos dentro da Educação e, consequentemente, em Educação Matemática (BICUDO, 2012; BORBA; ARAÚJO, 2012; GOLDENBERG, 2004; LÜDKE; ANDRÉ, 1986).

Neste trabalho, os dados foram coletados a partir das atividades realizadas, questionários e pela gravação, em áudio, do diálogo entre os professores e, tal diálogo, serviu como registros para verificar se as atividades oferecem contribuições no ensino e aprendizagem com gráficos de funções Derivadas pela percepção desses professores de Cálculo I.

As atividades exploratórias foram indispensáveis para a coleta dos dados, bem como, foi um fator decisivo para uma melhor realização dessas propostas. Desse modo, relatamos que Martins Júnior (2015) as representa como um:

> Conjunto de atividades, didaticamente planejadas, com o objetivo de permitir a exploração, a conjecturação, a dedução lógica, a indução, a intuição, a reflexão na ação e a mediação em relação aos conteúdos abordados para possibilitar a construção de conhecimentos realizados por seus atores, sendo essas atividades livres ou guiadas e, usando para isso, os meios necessários que possam dinamizar a relação entre a teoria e a prática e o ensino para a aprendizagem. (MARTINS JÚNIOR, 2015, p. 58-59).

Essas atividades exploratórias auxiliaram, conjuntamente com o dinamismo que o *software* GeoGebra proporciona, na exploração de conteúdos com gráficos de funções Derivadas de uma função e variável real.

ISSN 2178-034X

4. Descrição e Discussão a partir da produção da Atividade Exploratória

A realização dessa atividade exploratória ocorreu no laboratório de Educação Matemática na Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP, num período de duas horas. Para a sua realização tínhamos um computador com o *software* GeoGebra instalado e um gravador em áudio para capturar o diálogo que ocorreu entre os professores. Os participantes receberam todos os materiais necessários para fazer algum rascunho ou cálculos de algum item da questão como folhas de papel em branco, lápis, caneta e borracha.

A pesquisa foi desenvolvida com 04 professores de Cálculo I, todos com nível de Mestrado e com experiência nessa disciplina. Optamos por dividi-los em duplas. A primeira dupla de professores passou a ser chamada de Dupla A, pois realizaram a primeira atividade, sendo formada por um professor que tinha mais tempo de experiência em sala de aula com o outro que tinha menos tempo e, em seguida, a Dupla B que recebeu a segunda atividade. Trouxemos neste artigo a resolução de 01 dessas atividades exploratórias que foi extraída do livro de Flemming e Gonçalves (2006) e depois adaptada para a participação da Dupla A, que é a única dupla da qual faremos algumas descrições e análises. Maiores detalhes das outras atividades desenvolvidas podem ser consultados em Martins Júnior (2015). Os principais conteúdos das funções Derivadas nessas atividades envolveram domínio, imagem, raízes, pontos críticos, extremos, crescimento e decrescimento, concavidade, pontos de inflexão, limites no infinito e assíntotas.

Os critérios utilizados para a escolha dos professores que participaram de nossa pesquisa foram: trabalhar com a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral; possuir Mestrado na área de Matemática Pura ou de Educação Matemática; ser professor em uma Instituição de Ensino Superior Pública ou Privada; e disponibilizar-se a participar da pesquisa no Laboratório de Educação Matemática da UFOP para realização das atividades exploratórias.

Eles escolheram quem ficava manuseando o *software* GeoGebra e quem ficava com os rascunhos e, com isso, facilitou a dinâmica da pesquisa. Desse modo, a atividade usada nesse experimento está disposta a seguir, bem como, alguns de seus gráficos construídos e diálogos durante o experimento. Os diálogos aparecem em ordem crescente como em D_1 que representa o primeiro diálogo que achamos interessante analisar e os outros também obedecem a esse mesmo critério.

MODELO DA ATIVIDADE EXPLORATÓRIA

Construa no GeoGebra o gráfico da função, alterando as escalas dos eixos, se necessário, para obter uma janela de inspeção apropriada:

$$\mathrm{f}\,(x) = \frac{1}{4}\,x^4 - 2x^3 - \frac{1}{2}\,x^2 + 30x + 10$$

Com base na visualização do gráfico construído e utilizando os recursos adequados do GeoGebra, pede-se:

1) Encontre o domínio da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente o domínio encontrado?

2) Encontre a imagem da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo y, visualizando a existência do gráfico da função;

b) É possível justificar algebricamente, nesse momento, a imagem encontrada?

3) Estime as raízes da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do eixo x, visualizando a existência de raízes da função;

b) Qual é a quantidade e natureza de todas as raízes?

4) Analise os pontos críticos da função:

Sugestão:

a) Construa a Reta Tangente (4ª janela), passeando ao longo do gráfico da função;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos críticos encontrados?

5) Discuta a existência de extremos da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 1ª (Entrada), estimando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os extremos encontrados?

6) Analise os intervalos de crescimento e decrescimento da função:

Sugestão:

ISSN 2178-034X

a) Mova a Reta Tangente, passeando ao longo do gráfico da função;

b) O que podemos observar em relação à reta tangente na Janela de Álgebra?

7) Analise a concavidade da função:

Sugestão:

a) Construa a Função Derivada 2ª (Entrada), verificando seu sinal;

b) Como podemos verificar algebricamente a concavidade?

8) Discuta a existência de pontos de inflexão da função:

Sugestão:

a) Analise o gráfico da Função Derivada 2ª, verificando suas raízes;

b) Como podemos verificar algebricamente os pontos de inflexão encontrados?

9) Analise os limites no infinito da função:

Sugestão:

a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não desses limites?

10) Discuta a existência de assíntotas:

Sugestão:

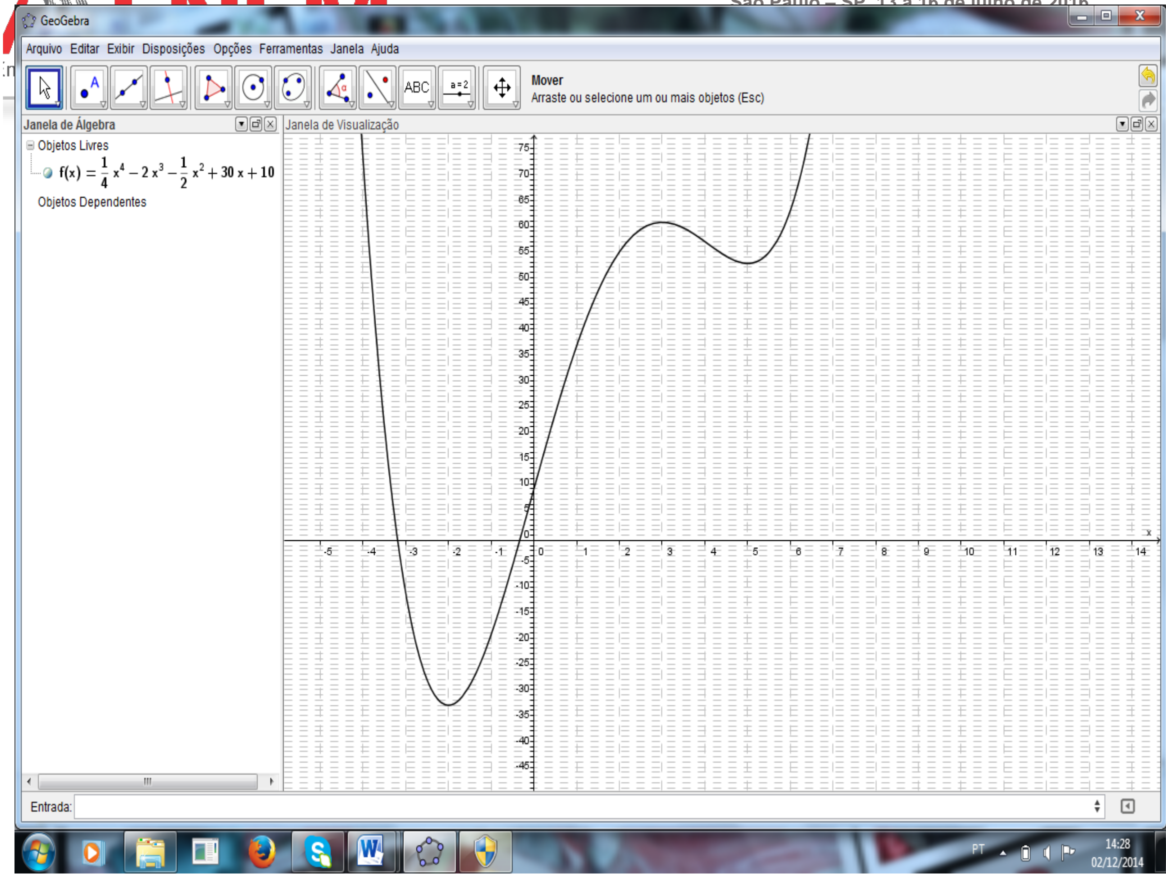
a) Passeie ao longo do gráfico da função;

b) Como você justificaria algebricamente a existência ou não de assíntotas?

Após uma breve leitura da atividade, os professores plotaram a função polinomial no *software* GeoGebra e acabou na representação gráfica, conforme a figura 1. Os professores foram resolvendo as questões no *software* GeoGebra e no rascunho e, na medida do possível, tentavam se aproximar do contexto da sala de aula para produzir um parecer a respeito da contribuição dessas atividades para as demonstrações com gráficos de funções Derivadas. Trouxemos alguns dos diálogos que ocorreram durante a solução de determinados itens das questões, que estão numerados de forma crescente. Na solução do item 1, que pediu o domínio da função:

> Notamos que existe uma tendência dos alunos para olharem o gráfico nas proximidades de sua origem e esquecem que existem infinitos pontos que podem ser percorridos pela função para tentar verificar se tem algum problema e, talvez devido aos exemplos construídos em anos anteriores onde os professores ao construírem o gráfico de uma função mais simples no quadro trabalhavam as informações mais próximas de sua origem ou simplesmente, como é polinomial então $x \in \mathbb{R}$ e isso ainda acontece até

Figura 1. Gráfico de f(x) na atividade 1A.



sse modo, o *software*
que está acontecendo
e x. Você concorda,
melhorada nisso aí.
lomínio são os reais?
ção e nesse momento
é muito importante.
omínio completo da
ra completar o nosso

FONTE: Martins Júnior (2015, p. 68).

Percebemos, nesse diálogo, uma dificuldade que muitos alunos ainda trazem de anos anteriores no estudo do domínio de funções, que a localização destas, geralmente, está próxima da origem do sistema cartesiano. Desse modo, o *software* GeoGebra está gerando uma possibilidade de ampliação do que ocorreu com o domínio da função polinomial e o motivo dele pertencer aos reais.

O *software* usado é bastante dinâmico e, caso o professor que o manuseie, não tome cuidado com o tempo de exploração dos itens das questões que são propostas, pode perder tempo durante o processo de ensino e dificultar a aprendizagem dos alunos. Como sugestão, eles mencionam que é indispensável o uso do aspecto algébrico, que é uma característica bastante usada por professores durante as aulas de Cálculo I; o que completa o uso do *software* GeoGebra é justamente a visualização que ele permite associada ao aspecto algébrico desenvolvido pelos professores, seja na sala de aula ou no laboratório de Educação Matemática.

Prosseguindo agora para o item 4 da atividade que solicitava a análise dos pontos críticos da função, os professores apagaram o ponto B da resposta anterior e construíram a reta tangente, fixando nela o ponto A e exploraram a função, subindo ou descendo, tentando perceber o que acontecia ao deslocá-la. Fizeram isso no *software* e dava para ver que existiam três pontos críticos; a respeito do que aconteceu, afirmaram:

> Conseguimos ver quando a reta tangente está em cima dos pontos críticos, ela fica praticamente horizontal ao eixo x e é essa a definição que usamos para mostrar aos alunos que existem os pontos críticos, sendo eles máximos ou mínimos, podendo ainda ser locais ou absolutos. Ao verificar a posição quando a reta fica em cima deles, temos os seguintes pontos encontrados: temos um ponto de mínimo que é absoluto e está localizado em $(-2, -32)$, depois um máximo relativo em $(3; 61{,}75)$ e, por último, um mínimo relativo em $(5; 53{,}75)$. Desse modo, conseguimos verificar algebricamente quando derivamos a função e igualamos a zero, ou seja, $f'(x) = 0$. Isso fica interessante quando podemos fazer uma conexão daquilo que o GeoGebra mostra com aquilo que pode ser construído na sala de aula com os alunos: as definições e a visão que o *software* proporciona que são os dois aspectos que precisam ser levados em consideração e associados na hora de se utilizar algum *software* de Matemática nas aulas de Cálculo. (D_3 da Dupla A).

Existe a definição da inclinação da reta tangente que é usada pelos professores na determinação dos pontos críticos de uma função, quando ela permanece totalmente horizontal no eixo das abscissas, então, fornece um valor que pode ser um valor de mínimo ou de máximo em uma função. Notamos neste diálogo, que os professores pelas suas experiências, relataram que a utilização do *software* GeoGebra daria para fazer a comprovação das definições que são usadas nas fases de demonstração do conteúdo ou a parte teórica. Ele funciona como um recurso que apoia o processo de ensino para os professores e ajuda os alunos na aprendizagem, proporcionando uma melhor compreensão do que representam esses valores encontrados, que são confrontados com a parte algébrica que é utilizada pelos professores durante a solução de questões como essas com seus alunos.

Após a realização das questões dessa atividade, finalizamos pedindo aos professores que dessem o seu parecer em relação às possíveis contribuições, eles mencionaram que:

> Para mim, contribuem sim. Elas permitem ver o que está acontecendo com a função, conseguimos ver o seu deslocamento ou o movimento do ponto, da reta e das derivadas encontradas, os motivos para compreender o que representa aquele ponto de máximo ou de mínimo, onde a função muda a sua concavidade, o porquê da função ir para o infinito, podendo entender os motivos de aproximação das assíntotas e nunca tocá-las e essa é a oportunidade de justificar as definições já realizadas e tudo em tempo real, em que a mídia tradicional seria difícil para se trabalhar nas aulas de Cálculo I. Já para mim, a principal contribuição é justamente a facilidade para se trabalhar esses conteúdos que, para os alunos iniciantes ou repetentes são difíceis, as coisas são mais dinâmicas e, mesmo se errar ou coisa parecida, dá para você rever as definições e colocar outros exemplos mais simples ou complexos, tentando associá-los à intuição que os alunos precisam ter para aprender. Podemos aproveitar aquilo que os alunos estão enxergando para inserir as definições e os exemplos. Essas atividades favorecem a aprendizagem, mas antes disso o professor precisa trabalhar as definições e as demonstrações que também são necessárias e suficientes. (D_8 da Dupla A)

5. Considerações Finais

Olhando para os nossos dados coletados, percebemos evidências que tornaram possíveis estabelecer conexões que relacionam aspectos que envolvem a visualização no ensino e na aprendizagem de gráficos com funções Derivadas. As impressões dos professores foram válidas pelo fato de terem contato com os alunos e, ao estabelecer a conexão entre o ensino e a aprendizagem, extraímos os seus relatos para encontrar as possíveis contribuições.

Entre algumas dessas contribuições encontramos que essas atividades: auxiliam no processo de demonstrações das principais definições que são usadas para os gráficos com funções Derivadas; agiliza o trabalho do professor na exploração da intuição e da visualização que é proporcionado pelo *software* GeoGebra, oferecendo aos alunos um melhor entendimento para os conteúdos que estão sendo demonstrados; facilita a confrontação do aspecto algébrico com o aspecto visual, para trazer um momento oportuno de usá-los tanto no ensino do professor como na aprendizagem para os alunos; dinamiza o desenvolvimento das aulas e proporciona ao professor trabalhar as demonstrações com mais facilidades relacionando os aspectos abstratos com os que podem ser mais concretos para a aprendizagem dos alunos.

Chamamos a atenção para a possibilidade de "verificação visual" do *software* que nos remete a aspectos da imagem visual, retomando algumas ideias de Arcavi (2003), que conseguiu relacionar tais aspectos aos processos algébricos e, estes por sua vez, estão intrínsecos na relação dos conteúdos de Cálculo I. Este autor conseguiu permear a possibilidade de visualização usando representações algébricas ou algorítmicas, sendo que essa relação é bastante importante no ensino para completar o entendimento e proporcionar uma compreensão necessária para a formação e a construção de alguns conceitos matemáticos. Nesse sentido, ele aponta que a "visualização pode acompanhar um desenvolvimento simbólico, desde que uma imagem visual, mostre o seu valor concreto [...]" (ARCAVI, 2003, p. 220, tradução nossa).

Enfatizamos que a visualização depende de uma experiência anterior e se aprimora conforme as etapas vão sendo construídas, isto contribui tanto para professores como para os alunos alcançarem um nível cognitivo mais avançado. Aqui, faz necessário entrar em cena o professor que conecta as informações visuais e as algébricas, para mostrar aos alunos como a utilização de atividades exploratórias pode ser usada para oferecer subsídios que se tornam indispensáveis no processo de ensino para a aprendizagem de definições de gráficos com funções Derivadas.

Acreditamos que a sala de aula pode ser modificada por aquilo que o professor faz, podendo tornar um diferencial para a sua forma de trabalho e para a aprendizagem de seus alunos.

6. Agradecimentos

Agradecemos à DEUS por trazer entendimento sobre a coleta, análise e conclusão da Dissertação, a UNEB pelo apoio financeiro com a bolsa PAC e, bem como, a UFOP por modelar a construção de um Mestre em Educação Matemática.

7. Referências

ARCAVI, A. The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. In: **Educational Studies in Mathematics**, n. 52, p. 215-241, 2003.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa Qualitativa e pesquisa Quantitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 111-124.

BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2012, p. 23-29.

COSTA, M. C. M. Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização. **Actividades de Investigação na Aprendizagem da Matemática e na**

Formação de Professores. PONTE, J. P. (Org.). Escola Superior de Educação de Coimbra, p. 257-274, 2002.

FERREIRA, A. B. **Novo dicionário Aurélio da Língua Portuguesa**. 3. ed. 2. impres. Curitiba: Positivo, 2004.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. **Cálculo A: funções, limite, derivação e integração**. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

GOLDENBERG, M. **A Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais**. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MARTINS JÚNIOR, J. C. Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra. In: Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, XVII, Vitória, **Anais...** Vitória: SBEM, p. 1-12, 2013.

MARTINS JÚNIOR, J. C. **Ensino de Derivadas em Cálculo I: Aprendizagem a partir da visualização com o uso do GeoGebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática). Universidade Federal de Ouro Preto: Ouro Preto, 2015.

PRESMEG, N. Research on visualization in learning and teaching mathematics: emergence from psychology. In: BOERO, P.; GUTIÉRREZ, A. (Orgs.). **Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future**. Roterdã: Sense Publishers, p. 205-235, 2006.

REIS, F. S. Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). **Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates**. Recife: SBEM, p. 81-97, 2009.

REZENDE, W. M. *O* **Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo: São Paulo, 2003.

SAD, L. A. **Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 1998.

TALL, D. Intuition e rigor: the role of visualization in the Calculus. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (Orgs.). **Visualization in teaching and learning Mathematics**. Washington: Mathematical Association of America, p. 105-119, 1991.

VILLARREAL, M. E. **O pensamento matemático de estudantes universitários de Cálculo e tecnologias informáticas**. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista: Rio Claro, 1999.