

## O TRACKER PHYSICS NO ENSINO DE MATEMÁTICA À LUZ A TEORIA DE DUVAL

*Julio Cesar Meister*  
*PPGEMAT/UFRGS*  
*jcm.matematica@gmail.com*

*Márcia Rodrigues Notare*  
*PPGEMAT/UFRGS*  
*marcia.notare@gmail.com*

### **Resumo:**

Este artigo é um recorte da dissertação desenvolvida no Programa de Pós-graduação em Ensino de Matemática da UFRGS. Analisamos, a partir da teoria de Duval, resultados obtidos pelos alunos na interpretação de gráficos utilizando o software Tracker Physics. O software nos permite analisar passo a passo o movimento de uma bola em queda livre, bem como desenhar os diversos gráficos que este movimento pode fornecer. Com base nos dados, os alunos analisam a situação e interpretam os resultados de diversas maneiras.

**Palavras-chave: Registros de Representação Semiótica; Tracker Physics; Análise de Gráficos.**

### **1. Introdução**

Este artigo apresenta um recorte de uma pesquisa que buscou investigar as mobilizações entre as diferentes representações semióticas na interpretação de gráficos com o auxílio do software Tracker Physics. A experiência empírica foi realizada na Escola Estadual Antônio de Castro Alves, no município de Alvorada, Rio Grande do Sul, durante o mês de novembro de 2015. O público da escola é, em geral, de classe média e não apresenta dificuldades em função de carência social. Dessa forma, foi possível propor aos alunos atividades, ao longo do ano, em que o smartphone fosse utilizado como ferramenta para o desenvolvimento de atividades que exploram conceitos matemáticos.

A coleta de dados foi feita por meio de gravações em vídeo, pela câmera do smartphone, gravações em áudio, com o auxílio de gravadores, fotos e questionários. Um diário de bordo, bloco de notas digital, também foi utilizado e colaborou para a organização e a análise dos dados.

A atividade proposta ocorreu em quatro tardes das duas últimas semanas de novembro de 2015. Cada encontro teve duração de duas horas e vinte minutos. Neste artigo, vamos debater

o segundo encontro, no qual os alunos fizeram uso da gravação de uma bolinha em queda livre e analisam o movimento no Tracker Physics.

## 2. Os registros de representação semiótica

Duval (2009) considera a aprendizagem em Matemática um campo privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais. O privilégio é dado pela necessidade de utilizarmos diferentes sistemas de expressão e representação além da linguagem natural ou das imagens, como por exemplo: escrituras algébricas, notações simbólicas para objetos, gráficos cartesianos e esquemas.

Duval (2009) levanta dois argumentos importantes sobre a aprendizagem matemática e suas representações. Inicialmente temos que não é possível existir compreensão em matemática se não distinguirmos os objetos matemáticos de suas representações. “Toda confusão entre o objeto e sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão” (DUVAL, 2009, p.14). Representações inertes, que não sugerem um tratamento produtor, transformam um conhecimento adquirido rapidamente em um conhecimento inutilizável, destacado de seus contextos de aprendizagem. O segundo argumento é que as representações semióticas aparentam ser o meio que o sujeito possui para exteriorizar suas representações mentais, ou seja, para comunicar ao outro. Portanto, as representações semióticas são indispensáveis para a comunicação e o desenvolvimento da atividade matemática.

Mas se um conceito matemático só pode ser tratado por meio de uma representação, como não confundir o objeto com sua representação? Vê-se então a necessidade de termos ao menos duas representações em torno de um mesmo conceito matemático. É por meio da conversão entre estas representações que podemos obter a compreensão conceitual. Portanto, não é a compreensão conceitual que possibilita a conversão entre duas ou mais representações, mas o contrário.

Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. Ora, na matemática, diferente de outros domínios de conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivamente ou instrumentalmente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.) O acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. (DUVAL, 2011, p. 21)

Duval (2011) afirma, resumidamente, que como exemplos de representações semióticas podemos citar uma frase em linguagem natural, e não as palavras desta frase. Bem como uma equação pode ser uma representação semiótica, mas não os algarismos e letras nela presentes. Precisamos das unidades elementares (signos) como as letras, algarismos ou até palavras chave, para darmos sentido a uma representação semiótica.

Entre outros exemplos, temos também as escritas algébricas e formais e as representações gráficas.

Chamaremos de registro os diferentes tipos de representações semióticas e abaixo temos um quadro com os quatro tipos distintos de registros (DUVAL, 2003).

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
<b>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS:</b>  Os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua natural <ul style="list-style-type: none"> <li>• Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar;</li> <li>• Argumentação a partir de observações, de crenças;</li> <li>• Dedução válida a partir de definição ou de teoremas</li> </ul>	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3) <p>Apreensão operatória e não somente perceptiva;</p> <p>Construção com instrumentos</p>
<b>REGISTROS MONOFUNCIONAIS:</b>  Os tratamentos são principalmente algoritmos	Sistema de escritas: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Numéricas (binárias, decimal, fracionária...);</li> <li>• Algébricas</li> <li>• Simbólicas (línguas formais.</li> <li>• Cálculo</li> </ul>	Gráficos cartesianos. <p>Mudanças de sistema de coordenadas;</p> <p>Interpolação, extrapolação.</p>

Tabela 01: Diferentes registros de representação semiótica da atividade matemática

Fonte: (MACHADO, 2010, p.14)

Para Duval (2009), a atividade matemática e sua compreensão consiste na mobilização de, ao menos, dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na troca de registro de representação. Apesar de, por exemplo, em uma resolução de problema, um determinado tipo

de registro poder ser usado prioritariamente, em algum momento a passagem de um registro para outro deve existir.

Temos duas transformações que ocorrem sobre os registros de representação: o tratamento e a conversão. Enquanto os tratamentos são transformações dentro de um mesmo tipo de registro, a conversão são transformações de um registro para outro. Um exemplo de conversão seria passarmos do desenvolvimento de uma equação para uma representação gráfica.

Segundo Duval (2003) para analisarmos uma conversão, devemos comparar a representação do registro de partida com a representação do registro de chegada. A partir disto, temos duas situações: “ou a representação terminal transparece na representação de saída e a conversão está próxima de uma situação de simples codificação” (DUVAL, 2003, p.19), conversão congruente, “ou ela não transparece absolutamente”, o que denominamos de conversão não-congruente.

Dentre as transformações de uma representação semiótica, temos o tratamento. O tratamento sobre objetos matemáticos é dependente do sistema semiótico utilizado. Como exemplo, o autor traz o cálculo numérico, as operações básicas, cujos procedimentos dependem do sistema escolhido (escritura binária, decimal ou fracionária, por exemplo).

A seguir, apresentamos parte da pesquisa realizada, que analisa as mobilizações entre diferentes tipos de registros, bem como suas conversões. As análises são feitas com a coleta de dados em um dos encontros realizados na pesquisa para a dissertação do autor.

### **3. Um recorte da experiência realizada**

Ao todo foram escolhidos nove alunos para a realização da pesquisa. Os alunos foram divididos em grupos de quatro e cinco pessoas. Os grupos ficaram em cantos distintos na sala de aula e cada um possuía um *netbook* para efetuar as atividades. Os alunos escolhidos já possuíam maior desenvoltura frente às câmeras devido a uma atividade que fez uso de vídeos, onde os alunos deveriam gravar uma vídeo aula. Outro aspecto importante é a desenvoltura com a escrita e a fala, importante para a coleta de dados. Portanto, a facilidade com a matemática não foi prioridade na escolha destes alunos.

Neste artigo, vamos apresentar e analisar a experiência realizada no segundo encontro da pesquisa. Este encontro iniciou com instruções básicas sobre o funcionamento do Tracker Physics. Os alunos foram divididos em dois grupos, mas cada um realizou o rastreamento da bolinha em queda no vídeo gravado no primeiro encontro. Como existem imperfeições no rastreamento do objeto, em função da marcação exata do centro da bolinha, os alunos obtiveram mapas e resultados levemente diferentes. Cada aluno posicionou a origem do plano cartesiano onde achou mais conveniente, portanto apareceram diferenças na escala e nos gráficos desenhados. A primeira pergunta do questionário foi “como a escolha da posição da origem do plano cartesiano pode influenciar nos resultados dos gráficos?”. A Figura 01 mostra um *printscreen* da tela da aluna J, que fez sua análise com a origem do plano cartesiano no início da queda. Podemos observar, ao lado direito da tela, o eixo y do gráfico do deslocamento exibindo números negativos.

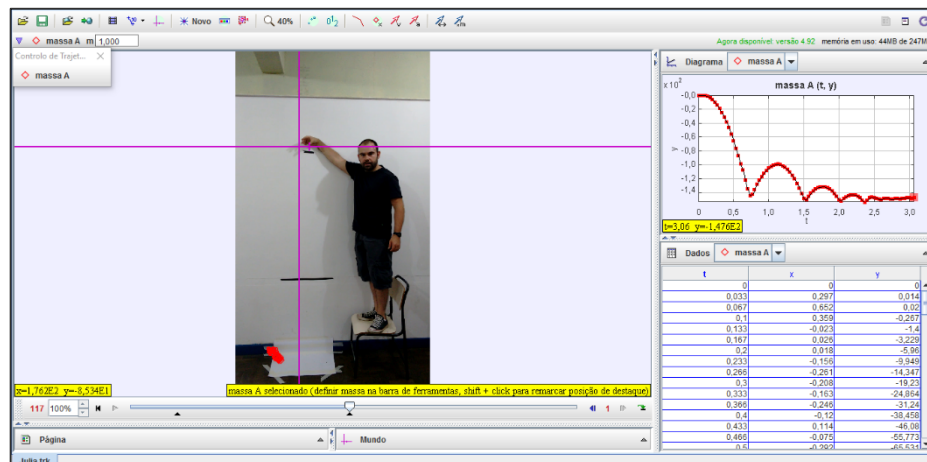


Figura 01: Tela da aluna J

Como a origem é móvel, podemos colocar a origem também na região do chão, onde a bola toca o solo ou no meio da trajetória. A Figura 02 mostra a resposta fornecida pelo aluno A.

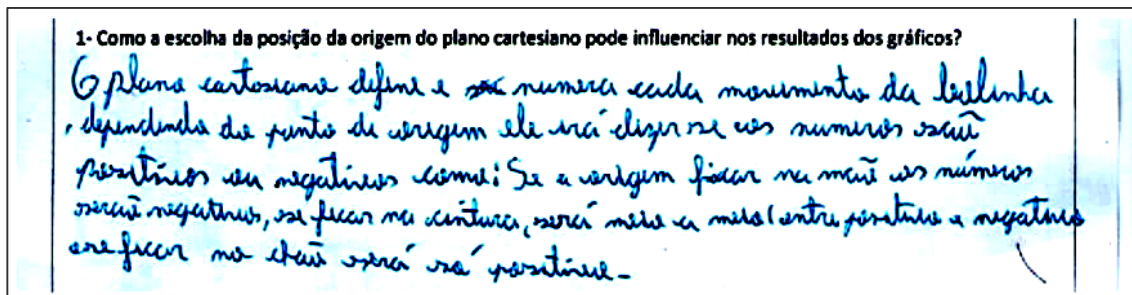


Figura 02: resposta do A.

Transcrição da resposta: “O plano cartesiano define e numera cada movimento da bolinha, dependendo do ponto de origem ela irá dizer se os números são positivos ou negativos como: se a origem ficar na mão os números serão negativos, se ficar na cintura será meio a meio (entre positivo e negativo) e se ficar no chão será só positivo”.

Segundo Duval (2011), o computador não promove novos registros semióticos. O benefício do computador é promover um tratamento na velocidade mental sobre um determinado registro. Tais conclusões apontadas pelos alunos poderiam não ser alcançadas sem o uso de um software. Precisaríamos de horas para produzirmos à mão as mesmas representações que os alunos podem simular imediatamente trocando a origem do plano cartesiano com o mouse.

Em relação aos registros, como registro de partida temos um registro monofuncional gráfico e como registro de chegada um registro multifuncional escrito. Trata-se de uma conversão congruente, visto que o registro de partida transpõe as unidades de sentido do registro de chegada. Podemos observar, pelos registros analisados, que os alunos expressaram, por meio da escrita, suas concepções sobre a posição da origem no plano cartesiano.

Na segunda questão: “Ao observarmos os gráficos feitos pelo Tracker Physics, como podemos relacionar o movimento da bola com os gráficos de deslocamento e velocidade?”, os alunos observaram os gráficos da Figura 03 e os relacionaram com o movimento da bolinha em queda. Os alunos puderam diferenciar a função de ambos os gráficos em relação ao movimento da bola, interpretando seus comportamentos. A Figura 04 mostra a resposta da aluna J sobre esta análise.

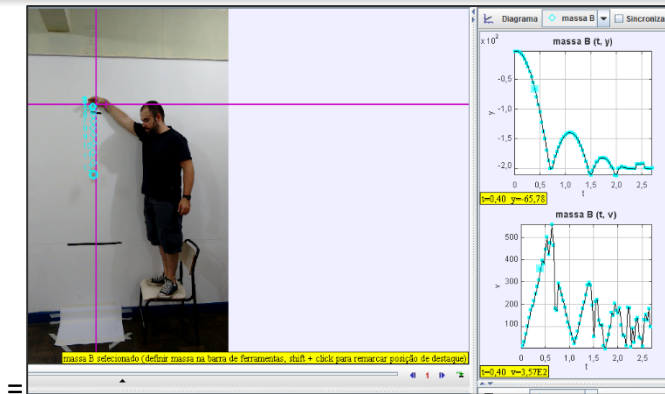


Figura 03: Gráficos de deslocamento e velocidade

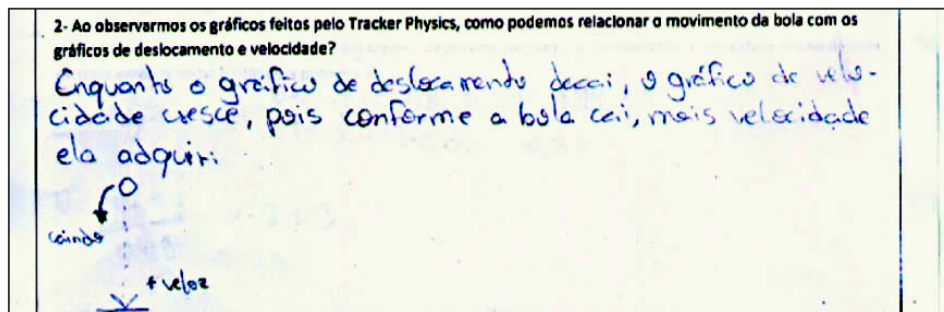


Figura 04: Resposta aluna J

Segue a transcrição da resposta: “*Enquanto o gráfico do deslocamento decai, o gráfico da velocidade cresce, pois conforme a bola cai, mais velocidade ela adquire*”. A aluna ainda insere um desenho para representar o que ela pretende dizer. Observe, no desenho, o sinal + ao lado da palavra veloz.

Podemos afirmar que J mobiliza dois registros monofuncionais gráficos, gráfico do deslocamento e da velocidade, para um registro multifuncional escrito e posteriormente para um registro monofuncional gráfico, agora em forma de um esquema. A conversão entre os registros monofuncionais gráficos para o multifuncional escrito é congruente, enquanto que a segunda conversão: do registro multifuncional escrito para o registro monofuncional gráfico é não congruente. A não congruência se explica pelo fato do registro de chegada não transparecer absolutamente os significados do registro de partida.

Com o uso do mesmo gráfico, os alunos responderam à questão 3: “Em diversos intervalos, temos que, enquanto o gráfico do deslocamento é decrescente, o gráfico da velocidade é crescente. Por que isso ocorre?”. O objetivo desta questão foi promover a relação entre os gráficos e as grandezas físicas envolvidas. Abaixo temos o resultado das três respostas do aluno A2, de forma que podemos fazer uma análise sobre o desenvolvimento do raciocínio e explicitar a conexão entre as três questões.

1- Como a escolha da posição da origem do plano cartesiano pode influenciar nos resultados dos gráficos?  
Com a origem definida, o trajeto que a bolinha fazer vai indicar qual quadrante da se encontra, seja positivo ou negativo.

Figura 05: resposta 01 do aluno A2

2- Ao observarmos os gráficos feitos pelo Tracker Physics, como podemos relacionar o movimento da bola com os gráficos de deslocamento e velocidade?  
Os dois gráficos possuem aspectos diferentes (um parábola e outro mais linear).  
Parece que o deslocamento é decrescente pois a bola vai caindo até parar e o gráfico da velocidade é crescente, pois o objeto vai ganhando velocidade quando cai.

Figura 06: resposta 02 do aluno A2

3- Em diversos intervalos, podemos observar que enquanto o gráfico do deslocamento é decrescente, o gráfico da velocidade é crescente. Por que isso ocorre?  
O gráfico da velocidade é crescente porque ao longo da descida a bolinha vai ganhando velocidade.  
O gráfico do deslocamento é decrescente porque a bolinha caindo e dependendo da origem ela vai para os quadrantes negativos.

Figura 07: resposta 03 do aluno A2



A quantidade de registros mobilizados por A2 no decorrer da resolução das três questões é interessante. Para explicitar as mobilizações e conversões, vamos colocar os dados na Tabela 02.

Questão 1	Questão 2	Questão 3
<ul style="list-style-type: none"> <li>Conversão: Registro monofuncional gráfico (deslocamento) para o registro multifuncional escrito.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Mobilização: registros monofuncionais gráficos (deslocamento e velocidade) e do registro monofuncional algébrico (o aluno identificou a família de função que o gráfico pertence).</li> <li>Conversão dos registros mobilizados para o registro multifuncional escrito.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Conversão: Registro monofuncional gráfico (deslocamento) para o registro multifuncional escrito.</li> </ul>

Tabela 02: análise das respostas fornecidas por A2.

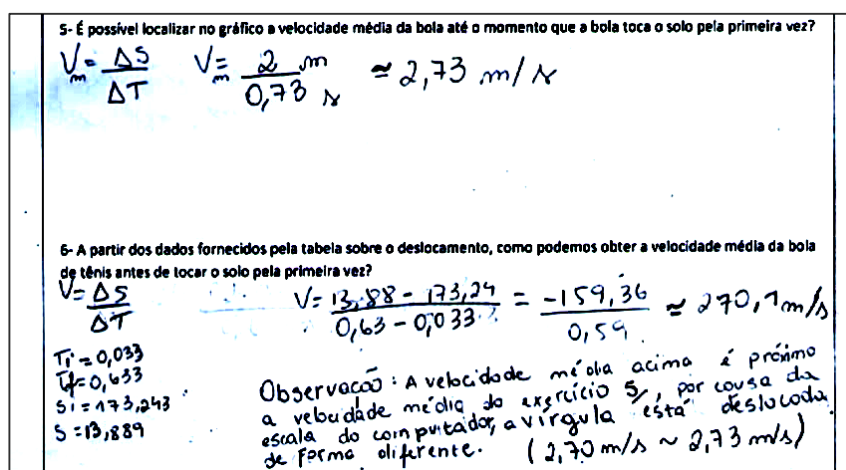
Ao responder a terceira questão, A2 retoma a resposta fornecida na primeira questão sobre a influência dos dados fornecidos no gráfico do deslocamento a respeito da posição da origem.

Na quarta questão, “A velocidade da bola no instante mais próximo de tocar o solo corresponde com a velocidade instantânea calculada com o uso do modelo físico no primeiro encontro?”, o objetivo foi comparar os resultados obtidos pela fórmula da física para o movimento de queda livre (questão explorada no encontro 1) com os dados exibidos pelo software.

Portanto, os alunos partem de um registro monofuncional algébrico, cujo tratamento é um cálculo sobre a fórmula ( $v = g.t$ , tal que  $g = 9,8m/s^2$ ), fornecida no primeiro encontro para um registro monofuncional gráfico e tabular fornecido pelo software. Trata-se de uma conversão congruente pelo fato do registro de chegada transparecer o registro de partida. Vamos omitir a foto da resposta dos alunos pelo fato de que grande parte das respostas afirmam que concordam com a proximidade da resposta obtida e a da fornecida pelo software.

Nas quinta e sexta questões, solicitamos aos alunos que obtivessem o resultado da velocidade média a partir da análise do gráfico e da tabela, respectivamente, exibidas pelo software. Enquanto a tabela é precisa, de acordo com o rastreamento do software, o exato instante que a bola toca o solo, quando representado pelo gráfico, se mostra impreciso devido à coleta dos dados que é relativa ao observador do gráfico. Portanto, os resultados são aproximados.

Na Figura 08 temos os cálculos realizados por A2, que mostram o cálculo da velocidade média obtida pelos dados exibidos no gráfico na questão 5 e o cálculo obtido pelos valores fornecidos na tabela do software.



5- É possível localizar no gráfico a velocidade média da bola até o momento que a bola toca o solo pela primeira vez?

$$V_m = \frac{\Delta S}{\Delta T} \quad V_m = \frac{2 \text{ m}}{0,73 \text{ s}} \approx 2,73 \text{ m/s}$$

6- A partir dos dados fornecidos pela tabela sobre o deslocamento, como podemos obter a velocidade média da bola de tênis antes de tocar o solo pela primeira vez?

$$V = \frac{\Delta S}{\Delta T} \quad V = \frac{13,88 - 13,24}{0,63 - 0,33} = \frac{-159,36}{0,59} \approx 270,1 \text{ m/s}$$

$T_i = 0,033$   
 $T_f = 0,633$   
 $S_i = 13,243$   
 $S_f = 13,889$

Observação: A velocidade média acima é próximo a velocidade média do exercício 5, por causa da escala do computador, a vírgula está deslocada de forma diferente. ( $2,70 \text{ m/s} \sim 2,73 \text{ m/s}$ )

Figura 08: respostas do aluno A2

O aluno A2 explicita não só a diferença entre os resultados obtidos, como também a diferença de escala. Ao analisarmos o vídeo, os alunos sabiam que a bola foi solta a uma altura de 2 metros, de forma que teríamos a velocidade em metros por segundo. Entretanto, o software calculou a distância em centímetros e o tempo em segundos, o que fornece a velocidade em centímetros por segundo. A diferença é salientada no canto inferior direito na sexta questão.

Observe que A2 utiliza 0,73s para efetuar seu cálculo na questão 5, enquanto que na questão 6 o tempo utilizado é 0,59s. Essa diferença dá-se pelo fato do aluno utilizar o momento inicial do gráfico plotado a partir do vídeo no qual, por um instante, o professor pesquisador ainda segura a bolinha. Ou seja, por uma fração de segundo o gráfico começa a ser desenhado com a bolinha ainda na mão do professor pesquisador, e é esta fração de segundo que não é percebida ao observamos o gráfico. Entretanto, quando o aluno observa os dados da tabela, fica claro o momento inicial em que a bola se move, ou seja, é solta no ar.

De acordo com Duval, na questão 5 temos a mobilização de dois registros: um registro monofuncional gráfico, de partida, e um registro monofuncional algébrico com o seu devido tratamento. Tal conversão entre registros é congruente.

Sobre a questão 6, temos a mobilização do registro monofuncional tabular para o registro monofuncional algébrico, com o seu devido tratamento. Importante salientar a observação de A2, em registro multifuncional escrito: “A velocidade média acima é próximo a velocidade média do exercício 5, por causa da escala do computador, a vírgula está deslocada de forma diferente”. Esta observação surgiu durante a solução da questão 6.

A relação de escala foi apontada pelo professor, que informou aos alunos que em alguns casos o software faz a medida da distância em centímetros, e não em metros. Logo, algumas conversões de unidade de medida neste sentido foram necessárias e logo percebidas pelos alunos.

Por último, no registro multifuncional escrito, citado acima, o aluno mobiliza os registros monofuncionais gráfico, tabular, algébrico com o registro multifuncional escrito. Tais mobilizações são exibidas na Figura 09, na qual os balões cinzas representam os registros citados e o balão central o conceito trabalhado.

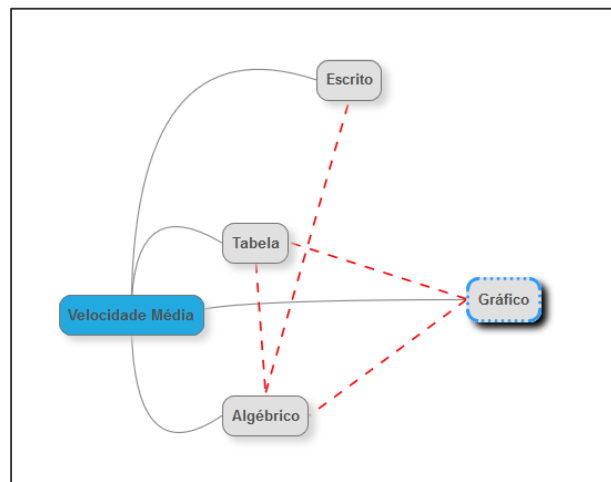


Figura 09: Esquema das representações mobilizadas

A análise das questões 5 e 6 estão juntas pelo fato do registro multifuncional escrito, ao final da questão, nos mostrar a comparação entre as mobilizações ocorridas na solução da questão 5 e questão 6.

#### 4. Considerações Finais

Podemos apontar os benefícios do uso do software Tracker Physics para a simulação de dados e interpretação de gráficos. Os alunos puderam analisar as diferenças nos gráficos, promovidas pela troca da posição da origem no plano cartesiano, bem como observar a diferença do sinal dos dados exibidos na tabela.

Nota-se também a mobilização necessária entre os diferentes registros para resolver as questões sobre velocidade média. Uma discussão colocada no primeiro encontro sobre a diferença entre velocidade média e instantânea pode ser mais aprofundada neste encontro.

Acreditamos no potencial do software Tracker Physics para auxiliar o aluno na aprendizagem de matemática, visto que o software nos promove muitas simulações e o tratamento sobre diferentes formas de registros, cabendo ao professor instigar as mobilizações entre estes registros.

#### 5. Referências

DUVAL, Raymond. Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1º Edição. São Paulo: PROEM, 2011, volume 1.

MACHADO, Silvia Dias Alcântara. Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. 7º Edição. Campinas: Editora Papyrus, 2010, 160 páginas.

DUVAL, Raymond. Semiósis e Pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. 1º Edição, São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009, Fascículo 1.