

## A EQUIVALÊNCIA, O LIVRO DIDÁTICO E OS TRÊS MUNDOS DA MATEMÁTICA

*Sidney Silva Santos*  
*Universidade Anhanguera de São Paulo*  
*sidneysilvanm@gmail.com*

*Rosana Nogueira de Lima*  
*Universidade Anhanguera de São Paulo*  
*rosananlima@gmail.com*

### **Resumo:**

O presente estudo tem por objetivo analisar a abordagem dada ao conceito equivalência entre números fracionários em livros didáticos do 6º ano do ensino fundamental recomendados no PNLD de 2014, à luz da teoria dos Três Mundos da Matemática. Busca-se investigar se, neles, ao introduzir-se a noção de equivalência entre números fracionários, é proposta uma jornada pelos Três Mundos da Matemática. Foi realizada uma pesquisa documental, para a qual estabeleceram-se algumas categorias de análise dos livros escolhidos. Para este artigo, apresenta-se a análise de um único livro, sob um dos critérios: a presença ou não de características de cada um dos mundos matemáticos. Verificou-se que o livro de 6º ano escolhido apresenta características de todos os mundos, porém uma relação entre elas parece ser deixada a cargo do professor. Por outro lado, a presença dessas características pode guiar o aluno no desenvolvimento do conceito de equivalência.

**Palavras-chave:** Equivalência; Números fracionários; Três Mundos da Matemática; Livro didático; Educação Matemática

### **1. Introdução**

Em nossas leituras sobre pesquisas relacionadas ao ensino e à aprendizagem de números racionais na representação fracionária, assim como em nossa experiência docente, observamos que estudantes chegam ao Ensino Médio com pouca ou nenhuma compreensão do conceito desses números e seus diferentes subconstrutos e como operar com eles. De acordo com Kieren (1979), para o conceito de números racionais ser construído efetivamente por um indivíduo, ele deve ser exposto a uma diversidade de *interpretações* sobre esse conjunto numérico, que foram posteriormente nomeadas de subconstrutos. Kieren (1980) determina cinco subconstrutos como fundamentais: parte-todo, razão, quociente, medida e operador.

Pesquisas como a de Ferreira da Silva (1997), Bezerra (2001), Freire (2011), Garcia Silva, Campos, Pinheiro e Souza (2013) revelam dificuldades enfrentadas por estudantes na aprendizagem de números fracionários. Salientamos que usamos “números fracionários” para

nos referir aos números racionais positivos na representação fracionária, isto é, todo e qualquer número que pode ser apresentado na forma  $\frac{a}{b}$ , com  $a \in \mathbb{Z}_+$  e  $b \in \mathbb{Z}_+^*$ . De acordo com Rodrigues (2005), essas dificuldades, geralmente, permeiam todo o Ensino Fundamental, Médio e também o Superior.

O ensino de números fracionários é um tema desenvolvido na escola desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, crescendo em sofisticação até os anos finais desse nível de escolaridade. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, “seu estudo se justifica, entre outras razões, por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico).” (BRASIL, 1998, p.103). Esses Parâmetros destacam também o uso de números racionais na representação fracionária para cálculos envolvendo dízimas periódicas, uma vez que essa representação favorece a obtenção de resultados com precisão, enquanto para a utilização da representação decimal, é necessário recorrer a aproximações no caso de dízimas periódicas.

Além disso, nesses mesmos Parâmetros, acrescenta-se que

O conceito de equivalência assim como a construção de procedimentos para a obtenção de frações equivalentes são fundamentais para resolver problemas que envolvem a comparação de números racionais expressos sob a forma fracionária e efetuar cálculos com esses números. (BRASIL, 1998, p. 103)

Relatam ainda a importância de o estudante reconhecer que um número fracionário pode ser representado por diferentes e infinitas escritas, por exemplo, que  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{4}$ ,  $\frac{4}{8}$ ,  $\frac{8}{16}$ , etc. são diferentes representações do número fracionário  $\frac{1}{2}$ .

Mesmo com a relevância do conceito de equivalência sendo evidenciada para o ensino, pesquisas em Educação Matemática que tratam dele nem sempre o têm como foco principal. Algumas, como a de Schastai, Pilatti e Silva (2012), discutem operações com números fracionários a partir da utilização de frações equivalentes. Outras, como Garcia Silva, Campos, Pinheiro e Souza (2013), tratam de equivalência como um complemento da introdução de números fracionários a partir de diferentes subconstrutos. Considerando que raras são as pesquisas que têm equivalência de números fracionários como foco principal, entendemos a relevância de se pesquisar esse conceito.

Jahn, Ferreira da Silva, Leme da Silva e Campos (1995) uma das pesquisas que encontramos com foco em equivalência entre números fracionários, investigaram como os conceitos de número fracionário e equivalência são nos anos iniciais do ensino fundamental a partir da análise de livros didáticos. Nessa análise, observaram, dentre outros aspectos, o uso prioritário de figuras geométricas divididas em partes congruentes e com todos os cortes aparentes, o que prioriza o uso da técnica da dupla contagem, em detrimento de ideias formais envolvidas nos conceitos. Por entendermos números fracionários, em especial a equivalência entre eles, como um conceito fundamental para a compreensão desses números, e o livro didático como um importante apoio do professor para o ensino, vimos a necessidade da análise de alguns deles.

Assim, nossa pesquisa, ainda em desenvolvimento, tem por objetivo investigar como o conceito de equivalência entre números fracionários é introduzido em livros didáticos de 6º ano do ensino fundamental. Para isso, escolhemos as coleções de livros didáticos aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e, para essa análise, utilizamos a teoria dos Três Mundos da Matemática, buscando, nas abordagens apresentadas em cada livro para este conceito, características dos diferentes mundos matemáticos. Dado que a pesquisa se encontra em fase inicial de análise dos livros, neste artigo, apresentamos a análise de somente um deles.

O estudo da equivalência de números fracionários se justifica por considerarmos importante que o aluno consiga reconhecer que uma fração pode ser representada por diferentes e infinitas representações. Além disso, pesquisadores como Lins e Silva (2007) destacam que “a ideia mais importante sobre frações é a de frações equivalentes” (LINS; SILVA, 2007, p. 17), pois, a partir dessa noção, é possível comparar e operar com números fracionários, além de facilitar a maneira que esses números se relacionam a razões e proporções, conceitos abordados em quase toda a vida escolar dos estudantes.

Já a escolha do quadro teórico se dá pela possibilidade de, com ele, analisar números fracionários representados por figuras ou por um conjunto de elementos, a partir de ideias do Mundo Conceitual Corporificado; números fracionários representados por símbolos, como no Mundo Operacional Simbólico; e, principalmente, as características formais envolvidas nos conceitos de números fracionários e equivalência, considerando o Mundo Formal Axiomático, como apresentaremos na próxima seção.

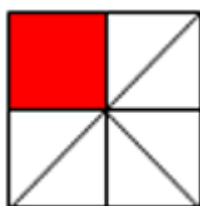
## 2. Fundamentação teórica

Tall (2013) desenvolveu um quadro teórico baseado em sua própria experiência como pesquisador em Matemática e em Educação Matemática, e também como professor de todos os níveis de escolaridade. Além disso, considerou, também contribuições de outros autores que elaboraram pesquisas sobre o desenvolvimento do pensamento matemático. Nessa teoria, Tall (2013) destaca três tipos diferentes, porém, interligados de conhecimento Matemático, que habitam o Mundo Conceitual Corporificado, o Mundo Operacional Simbólico e o Mundo Formal Axiomático.

O Mundo Conceitual Corporificado, ou simplesmente mundo corporificado, é caracterizado pelas percepções que um indivíduo tem ao se deparar com objetos matemáticos, e pelas ações que exercemos sobre eles, utilizando linguagem cada vez mais sofisticada para classificar e definir propriedades do conceito em jogo. Tais objetos podem ser manipulados física ou mentalmente.

Encontramos características do Mundo Corporificado ao trabalharmos com equivalência entre números fracionários, por exemplo, por meio do subconstruto parte-todo em quantidades contínuas, envolvendo a divisão de uma figura geométrica em partes congruentes, como na Figura 1. Nela, alguns traços da divisão do quadrado maior não estão visíveis.

Figura 1: Figura geométrica dividida em partes com traço não visível.



Na Figura 1, o estudante pode perceber que a figura foi dividida em quatro partes congruentes, e a parte pintada de vermelho representa  $\frac{1}{4}$  da figura. Também pode-se observar que a figura foi dividida em oito partes congruentes, apesar de uma delas não ter o traço demarcando a divisão. Nessa configuração, a parte pintada de vermelho representa  $\frac{2}{8}$  da figura. Como ambos,  $\frac{1}{4}$  e  $\frac{2}{8}$  representam a mesma parte pintada de vermelho, observa-se a equivalência entre esses números fracionários a partir de elementos da figura, o que é característica do mundo corporificado.

O Mundo Operacional Simbólico, ou simplesmente mundo simbólico, compreende os símbolos que utilizamos e manipulamos em aritmética, álgebra, cálculo dentre outros. As ações efetuadas em objetos matemáticos são representadas e comprimidas por eles.

Nesse mundo, os símbolos que utilizamos em aritmética, álgebra, cálculo, e outros, são usados de maneira especial. Por exemplo, o número fracionário  $\frac{3}{6}$  comprime uma dualidade de interpretações: o *processo* de comparar a parte do todo, e o *conceito* de número  $\frac{3}{6}$ . Símbolos que atuam duplamente tanto como processo quanto como conceito tornam-se o que Gray e Tall (1994) nomearam de um *proceito*.

Quando trabalhamos, por exemplo, com números fracionários e escrevemos o símbolo  $\frac{1}{2}$ , estamos utilizando características do mundo simbólico. Durante a exploração do conceito de equivalência entre números fracionários, é preciso perceber, simbolicamente, por exemplo, que  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{2}{4}$  são equivalentes, pois multiplicando-se por dois o numerador e o denominador da primeira fração, obtém-se a segunda.

Finalmente, o Mundo Formal Axiomático, ou mundo formal, é o mundo das deduções lógicas, demonstrações de propriedades de objetos matemáticos por meio de definições, axiomas e teoremas. Este mundo em sua totalidade é trabalhado na Matemática do ensino superior. Entretanto, é possível trabalhar com características formais com estudantes da Educação Básica, por exemplo, quando se apresenta a definição de equivalência entre números fracionários referindo-se àqueles que representam a mesma quantidade, porém, escritos de forma diferente. Além disso, a necessidade de se considerar partes congruentes de uma figura, como utilizado na Figura 1, também é característica do mundo formal.

A jornada pelos Três Mundos da Matemática não é hierárquica, isto é, não é necessário compreender características de um mundo para compreender o próximo. Ao contrário, um conceito matemático envolve características de todos os mundos matemáticos, que podem estar inter-relacionadas. Assim, cada indivíduo aprende por caminhos diferentes, utilizando-se de suas experiências anteriores, rumo à construção do conceito matemático em jogo.

Considerando a importância e a relevância de se trabalhar com características de todos os mundos matemáticos no ensino e na aprendizagem do conceito de equivalência entre números fracionários, analisamos, neste artigo, se em um livro didático aprovado pelo PNLD

utilizam-se características desses mundos ao introduzir-se o conceito de equivalência, o que permitiria que um estudante iniciasse uma jornada por mundos matemáticos.

O uso desse quadro teórico justifica-se por entendermos que se trata de uma teoria inovadora, ainda não utilizada em pesquisas envolvendo a equivalência entre números fracionários conhecidas por nós. A única pesquisa relacionada a números fracionários que faz uso desse quadro teórico é a de Freire (2011), que não discute o conceito de equivalência.

### 3. Procedimentos metodológico

Para atingir nosso objetivo, elaboramos uma pesquisa documental, isto é, aquela realizada a partir de documentos “que não receberam ainda um tratamento analítico, ou que ainda podem ser reelaborados de acordo com os objetivos da pesquisa” (GIL, 2008, p. 51). O primeiro passo da pesquisa documental consiste na exploração das fontes primárias, que são documentos que constituem obras ou textos originais, ou seja, materiais que ainda não tenham sido trabalhados ou discutidos por outros pesquisadores (BOOTH; COLOMB; WILLIAMS, 2005).

Considerando livros didáticos com fonte primária, escolhemos para nossa pesquisa as 10 coleções de livros didáticos aprovadas na última avaliação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) dos anos finais do Ensino Fundamental em 2014. Embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) indiquem que a ideia de equivalência entre números fracionários seja iniciada a partir do segundo ciclo do Ensino Fundamental, o que corresponde aos 4º e 5º anos, optamos por analisar os livros didáticos do 6º ano por entendermos que é nesse ano que o conceito de equivalência entre números fracionários é abordado mais profundamente.

Realizamos uma análise prévia dos capítulos dos 10 livros de 6º ano que apresentam ou utilizam o conceito de equivalência, para observar o tipo de abordagem utilizada para introduzi-lo. A partir dessa análise prévia, classificamos esses 10 livros em quatro diferentes grupos de acordo com características comuns na introdução de equivalência, para que possamos realizar uma análise mais aprofundada e detalhada de um livro de cada grupo. Os livros foram classificados em quatro grupos: no Grupo 1 estão os livros que introduzem equivalência por meio de quantidades contínuas; o Grupo 2 é caracterizado pelos livros que apresentam o conceito de equivalência por meio de uma situação-problema; compõem o Grupo 3 os livros didáticos que iniciam a abordagem de equivalência utilizando tanto quantidades contínuas

quanto discretas; e, finalmente, o Grupo 4 é formado por aqueles que introduzem a ideia de equivalência por meio de atividades que encaminham o aluno para o entendimento do conceito.

Para a análise dos livros didáticos de 6º ano, utilizamos os seguintes critérios: verificar as estratégias utilizadas pelos autores ao introduzirem o conceito de equivalência entre números fracionários; verificar o uso dos subconstrutos dos números racionais na forma fracionária presentes nessa introdução; verificar o uso de quantidades contínuas ou discretas na exploração da noção de equivalência entre números fracionários; verificar quais características dos mundos corporificado, simbólico e formal estão presentes na introdução de equivalência entre números fracionários; investigar se elementos discutidos na revisão de literatura de nossa pesquisa estão presentes nesses livros; e investigar as estratégias sugeridas no Manual do Professor de cada livro didático.

Considerando que a pesquisa ainda está em andamento, para este artigo, escolhemos analisar um livro didático do Grupo 4 a partir do critério de verificar quais características dos Três Mundos da Matemática estão presentes na introdução de equivalência entre números fracionários apresentada.

#### 4. Descrição e análise de dados

Neste artigo, apresentamos a análise do livro didático intitulado *Ideias e desafios*, que, segundo o Guia do PNL D 2014 (BRASIL, 2013), apresenta um tratamento satisfatório aos conjuntos dos números naturais, inteiros, racionais e reais, e além disso, “a apresentação dos novos números é bem contextualizada em situações reais” (BRASIL, 2013, p. 43).

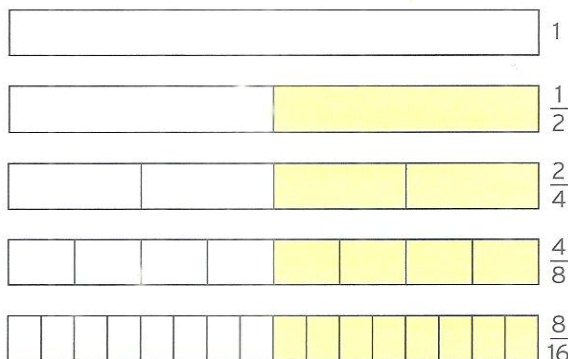
Os conteúdos matemáticos abordados nesse livro estão divididos em unidades que, por sua vez estão organizadas em capítulos. Ao iniciarem o estudo dos números racionais, as autoras reservam duas das 11 unidades que compõem o livro de 6º ano para tratar desse conceito. Na primeira delas, a *Unidade 8: Números racionais: representação fracionária*, estudam-se esses números e seus algoritmos por meio da representação fracionária. Na segunda, a *Unidade 9: Números racionais: representação decimal*, apresentam-se esses números utilizando sua representação decimal e como operar com eles. Logo, nossa análise se dá somente em capítulos da Unidade 8.

Na introdução da ideia de equivalência entre números fracionários, no *Capítulo 2: Equivalência e simplificação de frações*, apresenta-se a seguinte afirmação: “existem frações que têm numeradores e denominadores diferentes, mas podem representar a mesma parte de um mesmo inteiro” (ONAGA; MORI, 2012, p. 163).

Entendemos que, nessa afirmação, pretende-se chamar a atenção dos estudantes para números fracionários que representam a mesma quantidade, porém são escritos de maneira diferente uns dos outros. Nossa análise é a de que se relacionam, nela, características tanto do mundo simbólico quanto do mundo formal. Simbólico, pois refere-se a representações simbólicas de uma mesma quantidade. Formal, pois a possibilidade de as diferentes representações simbólicas representarem uma mesma quantidade é uma característica formal desses números, e que se refere à equivalência.

Ainda introduzindo esse conceito, apresenta-se uma sequência de retângulos dispostos uns abaixo dos outros, como apresentado na Figura 2.

Figura 2: Sequência de retângulos representando números fracionários equivalentes a  $\frac{1}{2}$



Fonte: Onaga e Mori (2012, p. 163).

Na Figura 2, há cinco retângulos congruentes. O primeiro deles representa a unidade, o todo. O segundo foi dividido em duas partes congruentes e tem uma delas destacada em amarelo. O terceiro foi dividido em quatro partes e duas foram destacadas. Os outros dois foram divididos respectivamente em oito e 16 partes congruentes, com metade delas destacadas. Assim, esta Figura ilustra a afirmação inicial.

Desta vez, ela engloba características de todos os três mundos matemáticos. Como já mencionado, há características simbólicas com a presença de símbolos matemáticos para cada retângulo. Ao utilizar tais retângulos para representar números fracionários, apresentam-se



características corporificadas, o que permite a visualização das quantidades envolvidas. Finalmente, há características formais, não só pela possibilidade de representar a mesma quantidade com diferentes símbolos, mas também por apresentar o entendimento de que todos os retângulos devem ser congruentes, que cada um deles foi dividido em partes congruentes, e foram destacadas metade dessas partes em cada retângulo.

Após esta introdução, foram apresentadas atividades a serem realizadas pelos alunos. Nessas atividades, solicita-se que os estudantes identifiquem números fracionários equivalentes ao observarem figuras geométricas divididas em partes de mesma área, e que determinem números fracionários equivalentes a números dados. Há, também, atividades em que são utilizados materiais manipulativos. Observando estas atividades, verificamos a presença de características corporificadas, simbólicas e formais. Por exemplo, na manipulação de materiais concretos identifica-se características corporificadas, enquanto as figuras divididas em partes de mesma área carregam características formais, e a representação dessas figuras por números fracionários habita o mundo simbólico. Uma análise mais aprofundada está em andamento, para verificarmos se essas atividades permitem que um estudante relacione características desses mundos.

Para discutir como se obter números fracionários equivalentes, apresenta-se um procedimento envolvendo a multiplicação de numerador e denominador por um mesmo número (Figura 3).

Figura 3: Determinação de números fracionários equivalentes

**Propriedade fundamental das frações** Certifique-se de que os alunos já compreenderam e construíram o conceito de equivalência. Dê destaque a essa propriedade, pois ela fundamenta todo o trabalho com simplificação e comparação de frações, operações e resolução de problemas que envolvem frações e, mais adiante, números racionais.

Observe alguns cálculos feitos com as frações equivalentes  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{4}{8}$ :

Começando com  $\frac{1}{2}$ , calculo  $\frac{4}{8}$ .

$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$

Começando com  $\frac{4}{8}$ , calculo  $\frac{1}{2}$ .

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

- Se multiplicarmos os termos da fração  $\frac{4}{8}$  por 2, qual será a fração obtida?  $\frac{8}{16}$   
Essa fração é equivalente a  $\frac{1}{2}$ ? *Sim*
- Se dividirmos os termos da fração  $\frac{4}{8}$  por 2, a fração obtida é equivalente a  $\frac{1}{2}$ ? *Sim*

Fonte: Onaga e Mori (2012, p. 165).

Na apresentação deste procedimento, salienta-se que, para determinar um número fracionário equivalente a outro, deve-se multiplicar ou dividir os “termos” de uma fração por um mesmo número diferente de zero, o que significa o uso e características simbólicas, pela utilização de símbolos e operações com esses números. Porém, não ficam explícitas características formais que justificam esse procedimento, a nosso ver por não se relacionar explicitamente este procedimento com as ideias apresentadas na introdução do conceito de equivalência. Este procedimento, chamado de “Propriedade Fundamental das Frações”, é também usado para a simplificação de números fracionários.

Esta propriedade é utilizada também no *Capítulo 3: Comparação de frações*. Destaca-se a importância dessa propriedade como fundamental para a simplificação e comparação de números fracionários, e nos *Capítulos 5: Adição e subtração de frações*, *6: Multiplicação e divisão de frações* e *7: Potências e raízes de frações* para as operações envolvendo esses números.

## 5. Considerações finais

Em nossa pesquisa, ainda em andamento, temos por objetivo investigar como o conceito de equivalência entre números fracionários é introduzido em livros didáticos de 6º ano do ensino fundamental que foram aprovados pelo PNLD de 2014. Para isso, fizemos uma análise prévia dos 10 livros didáticos aprovados por esse Programa naquele ano, e os classificamos em quatro grupos de acordo com a maneira que abordaram a introdução de equivalência entre números fracionários. A partir dessa classificação, escolhemos um livro didático de cada grupo para análise a ser realizada a partir de alguns critérios. Para este artigo, apresentamos a análise de um dos livros sob o ponto de vista de um de nossos critérios: o quadro teórico dos Três Mundos da Matemática.

Nessa análise, observamos que o livro do 6º ano apresenta um capítulo no qual se introduz equivalência entre números fracionários e outros três em que este conceito é utilizado. Esta utilização se dá, principalmente, ao efetuar operações com esses números.

Ao analisarmos a abordagem de introdução do conceito de equivalência nesse livro didático, evidenciamos a apresentação de características de todos os mundos matemáticos, pois, por exemplo, apresenta-se uma figura para ser analisada, um procedimento para encontrar números fracionários equivalentes, ambos possuindo características formais subjacentes.

Entretanto, não vemos relações explícitas entre elas, como no caso em que a “Propriedade Fundamental das Frações” não é discutida a partir de uma comparação com o que foi feito na Figura 2. É possível que tais relações sejam deixadas a cargo do professor que trabalhar com esse livro didático. Salientamos que discutir relacionamentos entre características de diferentes mundos matemáticos com estudantes é essencial para a compreensão de um conceito, no caso da nossa pesquisa, da equivalência entre números fracionários.

Aparentemente, as atividades propostas no capítulo de introdução desse conceito têm potencial para propiciar uma jornada pelos Três Mundos da Matemática, por conterem características deles. Uma análise mais aprofundada permitirá decidir se elas podem ser inter-relacionadas pelo professor, ou se isso já é realizado no texto.

Esta primeira versão da análise desse livro didático nos permite conjecturar que um estudante, ao trabalhar com ele, poderá ter contato com elementos de todos os mundos matemáticos, porém, possivelmente precisará da ajuda do professor para combiná-las e ampliar a compreensão que tem do conceito de equivalência. Ao analisarmos os outros livros por nós escolhidos, verificaremos se eles também têm esse potencial de permitir uma jornada pelos Três Mundos da Matemática e quais interferências do professor serão bem-vindas.

## 6. Referências

BEZERRA, F. J. B. **Introdução do conceito de número fracionário e suas representações: uma abordagem criativa para sala de aula.** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 220. 2001.

BOOTH, W. C.; COLOMB, G. G.; WILLIAMS, J. M. **A arte da pesquisa.** 2<sup>a</sup>. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2005.

BRASIL. Ministério da Educação. **Secretaria da Educação Fundamental**, 1998. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>>. Acesso em: 5 Agosto 2015.

BRASIL. Guia Nacional do Livro Didático de Matemática - Ensino Fundamental Anos Finais. **Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação**, Brasília, p. 55, 2013. Disponível em: <[file:///C:/Users/Usuario/Downloads/livro\\_matematica%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/Usuario/Downloads/livro_matematica%20(1).pdf)>. Acesso em: 2 Agosto 2015.

BRASIL. Programa Nacional do Livro Didático. **Ministério da Educação**, 2013. Disponível em: <[http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id=12391option=com\\_](http://portal.mec.gov.br/index.php?Itemid=668id=12391option=com_)>. Acesso em: 02 Julho 2015.

FREIRE, P. C. **Uma jornada por diferentes mundos da matemática investigando os números racionais na forma fracionária.** Universidade Bandeirante de São Paulo. São Paulo, p. 194. 2011.

GARCIA SILVA, A. D. F.; CAMPOS, T. M. M.; PINHEIRO, M. G. D. C.; SOUZA, M. P. D. Situação Quociente: limites e possibilidades. **XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, Curitiba, 18 a 21 Julho 2013. 14.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.** 6ª Edição. ed. São Paulo: Atlas, v. I, 2008.

GRAY, E.; TALL, D. Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, **The Journal for Research in Mathematics Education**, NCTM, v, 26, n. 2, p. 115-141, 1994.

JAHN, A. P.; FERREIRA DA SILVA, M. J.; LEMES DA SILVA, M. C.; CAMPOS, T. M. M. Lógica das equivalências, 1995. 18.

KIEREN, E. T. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. **Number and measurement: papers from a research workshop**, Columbus, 1979. 101 a 144.

KIEREN, E. T. The rational number construct – its elements and mechanisms. **Recent Research on Number Learning**, Columbus, 1980. 125 a 150.

LINS, R. C.; SILVA, H. D. Frações. **Pró Letramento Matemática**, Brasília, 2007. 308.

ONAGA, D. S.; MORI, I. **Matemática ideias e desafios.** 17ª. ed. São Paulo: Saraiva Livres Editores, v. I, 2012.

RODRIGUES, W. R. **Números Racionais: um estudo das concepções de alunos após o estudo formal.** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 247. 2005.

SCHASTAI, M. B.; PILATTI, L. A.; SILVA, S. D. C. R. D. Equivalências – Um Desafio para Construir. **III Simpósio Nacional de Ensino de Ciência e Tecnologia**, Ponto Grossa, 26 a 28 dezembro 2012. 12.

FERREIRA DA SILVA, M. J. **Sobre a Introdução do Conceito de Números Fracionários.** Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, p. 245. 1997.

TALL, D. **How Humans Learn to Think Mathematically: Exploring the Three Worlds of Mathematics.** 1ª. ed. CambridgeUnited Kingdom: Cambridge University Press, 2013.