UTILIZAÇÃO DE UM SOFTWARE PARA A VERIFICAÇÃO DA DERIVADA DE ALGUMAS FUNÇÕES DE RELATIVA COMPLEXIDADE DE DEMONSTRAÇÃO

Rogeria Teixeira Urzêdo Queiroz
Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
rogeriatuq@gmail.com

Rhelman Rossano Urzêdo Queiroz
Instituto Federal de Minas Gerais-Campus Ouro Preto
rhelman.queiroz@ifmg.edu.br

Resumo:
O Cálculo Diferencial e Integral é uma disciplina que se apresenta nos períodos iniciais de diversos cursos de graduação. Portanto, é inegável, a importância do conhecimento dos conceitos principais dessa disciplina, bem como ter clareza do seu amplo espectro de aplicações. Todavia, é opinião de vários professores de cálculo, que existe uma grande dificuldade dos alunos ingressantes nas Universidades e Faculdades em assimilar os conteúdos propostos que preenchem os planos de curso da referida disciplina. Há várias discussões no meio acadêmico relativas a esse tema "dificuldade em Cálculo" e, entre elas, destaca-se a afirmativa de que as deduções de equações e demonstrações de teoremas, com recursos algébricos apenas, aumentam o grau de dificuldade da disciplina. Neste trabalho, propõe-se uma forma alternativa de se verificar a derivada de algumas funções, sem os recursos algébricos apresentados pelos compêndios de Cálculo, onde os alunos poderão utilizar a definição de derivada, utilizando o *software Graphmatica*.

Palavras-chave: Cálculo; Educação Matemática; *Softwares* educativos.

1. Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral foi idealizado de maneira independente pelo inglês Isaac Newton e pelo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz, embora existam discussões polêmicas sobre qual dos dois foi realmente o criador do Cálculo (EVES, 2007, p. 444). Eves (2007) afirma que por algum tempo depois de Newton e Leibniz, os fundamentos de Cálculo permaneceram obscuros e despercebidos, mas por volta de 1700, a maior parte do Cálculo que hoje se vê nos cursos de graduação já fora estabelecida, juntamente com tópicos mais avançados. Atualmente, há uma grande aplicabilidade do Cálculo em diversos ramos do conhecimento humano. Dessa forma, o Cálculo Diferencial e Integral figura entre as disciplinas básicas de diversos cursos de graduação (BARROS e MELONI, 2006), o que é compreensível, pois realmente os conceitos de Cálculo encontram aplicações na Física, como por exemplo, a queda de corpos em um meio material, na transmissão de calor e massa, circuitos elétricos, movimentos de corpos em trajetórias de diversas formas; na Biologia, como por exemplo, o crescimento de uma colônia de bactérias; na Química, como por exemplo, na determinação de concentrações de solutos (BRONSON e COSTA, 2006).

Apesar de toda essa importância do Cálculo, é de conhecimento de muitos que o ensino e aprendizagem de Cálculo passa por momentos de grande fragilidade e, conforme anunciado por Rezende (2003), muito se tem dito a respeito do "fracasso no ensino de cálculo". Realmente, o Ministério da Educação e Cultura[1] informa que, no ano de 2000, o índice de reprovação e abandono nos cursos iniciais de cálculo nas universidades brasileiras é aproximadamente de 80%. São vários os pesquisadores que procuram, em seus estudos, propor soluções que amenizem tal situação (MIRANDA, 2004; CONCEIÇÃO e GONÇALVES, 2003). Para Miranda (2004), deve-se dar uma atenção maior à reestruturação das ementas dos cursos de Cálculo e, também, se pensar em introduzir o Cálculo no Ensino Médio. Conceição e Gonçalves (2003) afirmam que os alunos devem realizar muitos exercícios, principalmente nos conteúdos de derivadas e integrais, para que haja fixação dos conceitos. Porém, há o risco de que o aluno aprenda apenas a repetir regras matemáticas e não consiga entender realmente o conceito ali inserido e que é mais importante. Para Barros e Meloni (2006), o aluno considera enfadonho, cansativo e sem propósito a repetição continuada de certa prática e complementam afirmando que:

> Os exercícios servem para consolidar e automatizar certas técnicas, habilidades e procedimentos necessários para a resolução de problemas, mas, dificilmente podem servir para a aprendizagem e compreensão de conceitos (BARROS E MELONI, 2006, p.1734).

Para Gonçalves e Zunchi (2003), as dificuldades relativas ao ensino e à aprendizagem de Cálculo são antigas, pois são encontradas ao longo da história da Matemática. Para esses autores, as dificuldades começam a aparecer desde o conceito intuitivo de limite, ao se trabalhar com números infinitesimais, sendo que para a maioria dos alunos é o primeiro contato. Também dependendo da situação utilizada, com a noção do infinito, por exemplo, aproximar a área de uma figura por n retângulos, principalmente quando n tende a um número muito grande. As primeiras barreiras já começam a surgir neste contexto e se seguirão nos conteúdos seguintes.

Essa situação relacionada ao ensino de Cálculo é grave e, evidentemente, tem levado pesquisadores e professores a desenvolverem métodos de ensino que procurem tornar mais

[1] http://www.inep.gov.br/download/censo/2000/Superior/Sinopse_Superior-2000.pdf

ISSN 2178-034X

fácil o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo. Muitas dessas pesquisas utilizam o computador e é justificável, pois nas últimas décadas foi enorme o desenvolvimento de diversos s*oftwares* que podem ser aplicados de forma simples e eficiente dentro da sala de aula. Um desses *softwares* é o *Graphmatica* (1999) que se constitui em uma ferramenta de plotagem de gráficos, utilizando equações na forma cartesiana ou polar. Também é possível, com essa ferramenta, o trabalho com conceitos inerentes ao Cálculo, tais como derivadas, integrais, áreas compreendidas entre duas curvas, traçado de uma reta tangente a um ponto de uma curva, bem como a determinação imediata do seu coeficiente angular. Este trabalho tem como objetivo geral apresentar um método prático para se verificar, de maneira simples, as derivadas de algumas funções e, como objetivo específico, aplicar a definição de derivada de uma função em um ponto, utilizando-se um método gráfico com o auxílio do *software Graphmatica*.

2. Justificativa

Trazendo a questão relacionada às dificuldades de ensino e aprendizagem do Cálculo para a região de Mariana e Ouro Preto, elaborou-se um questionário aplicado a um total de 26 alunos do primeiro período de Engenharia de Produção de uma Faculdade de ensino privado da cidade de Mariana. Desse total, 73% dos alunos são da região de Mariana e Ouro Preto, sendo que 88% estudaram em escolas públicas estaduais ou federais. Com relação à dificuldades em Matemática, nos cursos fundamental e médio, 54% apresentaram dificuldades na disciplina. No curso de Cálculo I, verificou-se que 42% apresentam dificuldades em entender as teorias apresentadas antes de realizar exercícios em sala; 27% apresentam dificuldades em entender as demonstrações de teoremas e fórmulas e 31% não entendem a resolução de exercícios. Caso as aulas de Cálculo sejam dadas em laboratórios de Matemática ou informática, 80% afirmam que seria possível amenizar as dificuldades apresentadas e, finalmente, 85% afirmam que a utilização de *softwares educativos* poderia ajudar a entender melhor as dificuldades apresentadas. Dessa forma, justifica-se a necessidade de se propor novas metodologias de ensino que permitam ao aluno compreender melhor os conceitos apresentados na disciplina de Cálculo.

3. Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, foram escolhidas, para a verificação da derivada, a função exponencial de base *e* e a função logaritmica de base *e*. Essa escolha foi fundamentada na perspectiva de que são funções de grande aplicabilidade nos diversos ramos da engenharia. Com a utilização do *software Graphmatica*, foram traçados os gráficos dessas funções e feitas as escolhas de pontos nos quais traçaram-se as retas tangentes e, em seguida, fizeram-se as determinações dos coeficientes angulares correspondentes.

A seguir, é apresentada a definição de derivada de uma função e aplicação dessa definição, utilizando-se o *software Graphmatica*.

4. Definição de derivada

A reta tangente à curva $y = f(x)$ em um ponto $P(a, f(a))$ é a reta passando por P com coeficiente angular

$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Desde que esse limite exista (STEWART, 2014, p. 131).

A derivada de uma função f em a, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

se o limite existir (STEWART, 2014, p. 133).

Se escrevermos $x = a + h$, então $h = x - a$ e h tende a 0 se, e somente se, x tende a a. Consequentemente, uma maneira equivalente de enunciar a definição de derivada é:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Assim sendo, a reta tangente a $y = f(x)$ em $(a, f(a))$, cujo coeficiente angular é igual $f'(a)$ é a derivada de f em a (STEWART, 2014, p.).

5. Graphmatica

O *software Graphmatica* é um gerador de gráficos de funções de uma variável nas suas várias formas: cartesiana, polar, paramétrica, logarítmica, trigonométrica, inequações e implícita. Com ele é possível ainda, gerar campos de vetores no plano e fornecer a solução das correspondentes equações diferenciais e, além disso, permite calcular: derivadas, integrais, máximos, mínimos e zeros de funções. Com o *software Graphmatica* podem-se construir vários gráficos em uma só tela, salvar informações e equações, bem como redimensionar as escalas em cada eixo. Como ferramenta de Cálculo adicional, o programa pode incluir símbolos de diferenciação, traçar retas tangentes a uma curva e calcular uma integral definida. (http://www.calculo.iq.unesp.br/PDF/Graphmatica-Manual.pdf).

6. Utilização do *software Graphmatica*

Evidentemente, não se pode deixar de destacar a importância das deduções, utilizadas para se determinar a derivada de uma função. Porém, a determinação gráfica proposta nesse trabalho reforça os conceitos e definições apresentadas e fornece ao aluno uma percepção de que os princípios de Cálculo e Geometria Analítica estão muito bem relacionados. Pelos conceitos apresentados, para se determinar a derivada de uma função $y = f(x)$ em um ponto de abscissa x, traça-se a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ neste ponto e, a seguir, determina-se o coeficiente angular da reta tangente. O *software Graphmatica* permite essa determinação. Como exemplo, na figura 01, mostram-se a reta tangente e o coeficiente angular da mesma, no ponto de abscissa 2, para a função $y = x^2$.

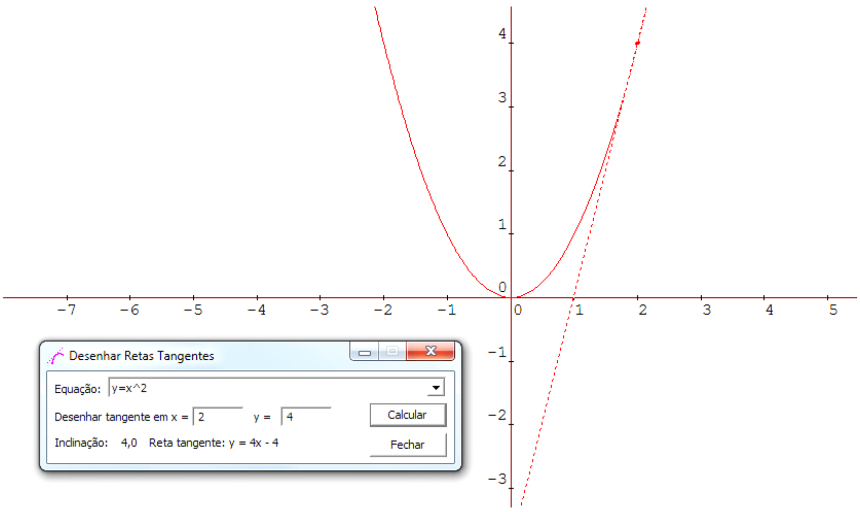

Figura 01- Gráfico da função $y = x^2$, a reta tangente no ponto de abscissa 2 e o coeficiente angular da reta tangente ($m = 4$) (Elaborada pelos autores).

Para a utilização do *software Graphmatica,* na verificação da derivada de algumas funções, serão adotados os seguintes procedimentos:

- Representa-se graficamente a função proposta.
- Escolhem-se alguns pontos do gráfico.
- Traça-se a reta tangente em cada um desses pontos.
- Anota-se o coeficiente angular de cada uma das retas tangentes.
- Traça-se o gráfico coeficiente angular da reta tangente *versus* abscissa x.

O gráfico obtido será aquele correspondente ao da função derivada da função dada inicialmente.

Utilizando-se os procedimentos apresentados, são mostradas, a seguir, a verificação das derivadas das funções citadas anteriormente.

7. Derivada da função exponencial

Seja a função $y = e^{2x}$. Essa função, representada graficamente, figura 02, é:

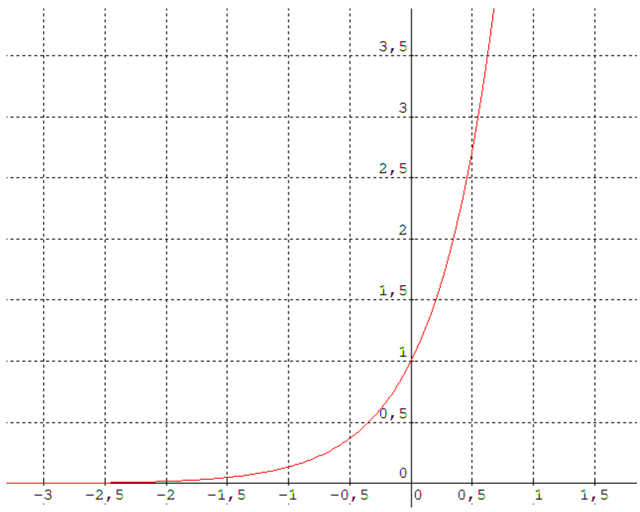

Figura 02- Gráfico da função $y = e^{2x}$ (Elaborada pelos autores).

Sejam considerados os pontos de abscissas -1,5; -1,0; -0,5; 0,0; 0,5; 1,0; 1,5. Os coeficientes angulares das retas tangentes em cada um desses pontos se encontram na tabela 01.

ISSN 2178-034X

Tabela 01- Coeficientes angulares (m) das retas tangentes aos pontos considerados.

Abscissa	-1,5	-1,0	-0,5	0,0	0,5	1,0	1,5
m	0,0996	0,2707	0,7358	2,0000	5,4366	14,7781	40,1711

Plotando-se os pontos da tabela 01(figura 03), encontra-se:

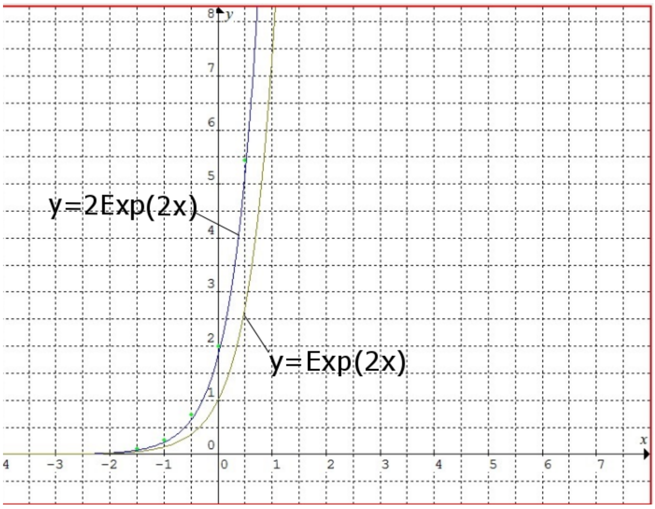

Figura 03- Gráficos da função $y = e^{2x}$ e da função derivada $y = 2.e^{2x}$ (Elaborada pelos autores).

8. Derivada da função logaritmica

Considerando a função $y = lnx$, pode-se também verificar graficamente, pelo processo já citado, a derivada dessa função que é $1/x$. A demonstração dessa expressão derivada envolve aplicação das propriedades dos logarítmos e a utilização de um limite fundamental.

A figura 04 mostra, graficamente, a função proposta.

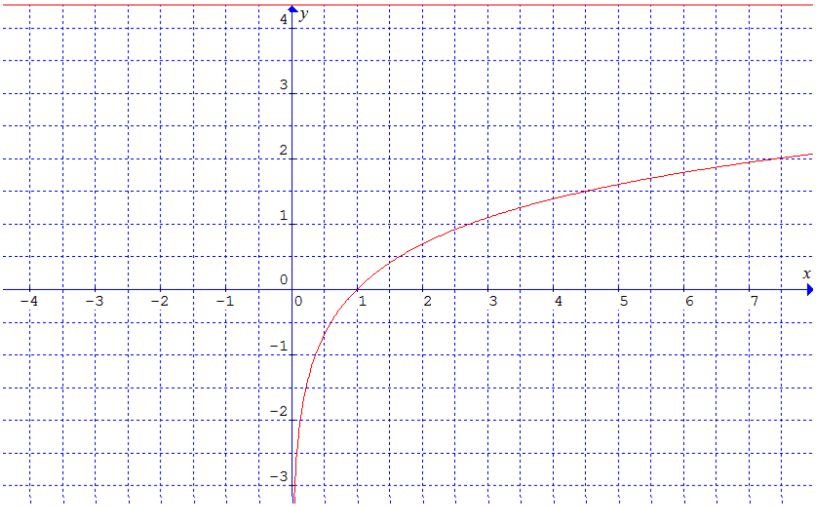

Figura 04- Gráfico da função $y = lnx$ (Elaborada pelos autores).

Sejam considerados os pontos de abscissas 0,15; 0,32; 0,50; 1,00; 1,50; 2,00; 2,50; 3,00; 3,50; 4,00; 4,50; 5,00. Os coeficientes angulares das retas tangentes em cada um desses pontos se encontram na tabela 01.

Tabela 02- Coeficientes angulares das retas tangentes aos pontos considerados.

Abscissa	0,15	0,32	0,50	1,00	1,50	2,00	2,50	3,00	3,50	4,00	4,50	5,00
m	6,67	3,13	2,00	1,00	0,67	0,50	0,40	0,33	0,29	0,25	0,22	0,20

A figura 05 mostra os pontos plotados e a expressão matemática correspondente.

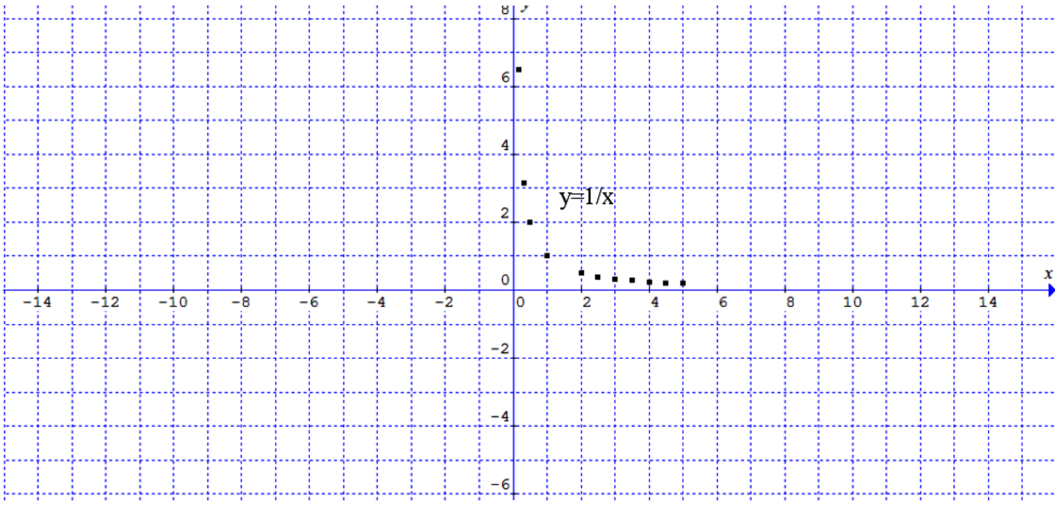

Figura 05- Gráfico da derivada da função $y = lnx$ (Elaborada pelos autores).

Pode-se observar, nesses dois exemplos, que é bem simples a determinação da derivada de uma função, considerando-se vários pontos do gráfico dessa função.

9. Análise dos resultados

Ao ser determinado o coeficiente angular das retas tangentes aos pontos considerados nos gráficos, possibilitando a construção da tabela 01 para a função exponencial e a tabela 02 para a função logaritmica de base *e*, sendo conhecida a expressão da derivada, é possível, a partir da definição, verificar a veracidade dessa expressão. Para o caso da função exponencial $y = e^{2x}$, cuja derivada é $y' = 2e^{2x}$, tem-se, por exemplo, para $x = 1{,}5$ que $y'(1{,}5) = 2.e^{2.1{,}5} = 40{,}1711$, que é o valor do coeficiente angular da reta tangente ao ponto de abscissa 1,5, verificado na tabela 01. Dessa forma, os valores das derivadas nos diversos pontos da curva da função podem ser determinados diretamente a partir da aplicação da definição, utilizando-se os recursos do *software*. Ressalta-se aqui o fato de que, a cada ponto escolhido, a definição de derivada é aplicada e verificada.

10. Conclusão

A utilização de *softwares educativos* permite, realmente, que os alunos tenham uma maior interação com os conceitos de Cálculo que são apresentados em sala de aula e que, na maioria das vezes, são abstratos e inibem, no caso de alguns, uma melhor compreensão do conteúdo. O aluno deve estar consciente de que o Cálculo é ferramenta importante e essa importância se manifesta de modo especial para aqueles que pretendem se graduar em engenharia, uma vez que a vida profissional também exigirá vários conceitos que serão aplicados nas várias situações do cotidiano profissional. Por outro lado, sempre é bom estar atento ao fato de que as explicações do professor em sala de aula são imprescindíveis. Isso significa que, no caso do trabalho ora apresentado, o *software Graphmatica* é uma ferramenta adicional para complementar o trabalho do professor.

11. Referências

BARROS, R. M.; MELONI, L. G. P.. O Processo de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral por Meio de Metáforas e Recursos Multimídia. **Anais do XXXIV COBENGE**. Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo, Setembro de 2006.

BRONSON, R.; COSTA, G.. **Equações Diferenciais**. Coleção Schaum, 3ª Edição. Bookman, 2006.

CONCEIÇÃO, K.; GONÇALVES, M.B.. A resolução de problemas no processo ensinoaprendizagem de matemática nos cursos de engenharia. In: **CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA**, 2003, Rio de Janeiro. Anais. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ensino de Engenharia, 2003.

EVES, H.. **Introdução à História da Matemática**. Universidade Estadual de Campinas. Editora Unicamp, 2ª reimpressão. São Paulo, 2007.

GONÇALVES, M.B.; ZUCHI, I.. Investigação sobre os obstáculos de aprendizagem do conceito de limite. **In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA**, 2003, Rio de Janeiro. Anais. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Ensino de Engenharia, 2003.

MIRANDA, G.A.. **Silvanus Phillips Thompson e a desmistificação do Cálculo: Resgatando uma história esquecida**. 2004. Tese (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

REZENDE, W. M.. **O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica**. Tese de doutorado. Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2003.

STEWART, J.. **Cálculo, Volume 1**. Tradução da 7ª edição norte-americana. CENGAGE Learning, 2014.

http://www.calculo.iq.unesp.br/PDF/Graphmatica-Manual.pdf. Pesquisado em 01/09/2015.

ISSN 2178-034X