UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO TEOREMA DE BAYES NA PERSPECTIVA DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Danilo Augusto Ferreira de Jesuz
Secretaria Estadual de Educação do Paraná
danilo_afj@hotmail.com

Julio Cezar Rodrigues de Oliveira
Secretaria Estadual de Educação do Paraná / Universidade Estadual de Londrina
E-mail: julioeconomist@hotmail.com

Emerson Tortola
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
emersontortola@utfpr.edu.br

Resumo:
A probabilidade nos fornece subsídios que podem auxiliar na análise de situações e tomada de decisões. Um tópico associado à probabilidade e que pode configurar-se como ferramenta útil na resolução de problemas que envolvem probabilidades condicionais inversas é o Teorema de Bayes. Nosso interesse neste artigo é apresentar uma proposta para o ensino desse teorema na perspectiva da Resolução de Problemas, uma vez que tal perspectiva oferece oportunidades de mudança das aulas que se resumem à exposição de conteúdos e à resolução de exercícios para aulas que convidam estudantes e professor a envolverem-se em explorações matemáticas. Para isso utilizamos o *Problema de Monty Hall* como ponto de partida. A análise dessa proposta, mediada pela resolução de problemas, revela que o problema tem potencial para explorar e discutir não apenas o Teorema de Bayes, mas outros conteúdos matemáticos associados a ele, como a probabilidade condicional e o Teorema da Probabilidade Total.

Palavras-chave: Educação Matemática; Resolução de Problemas; Teorema de Bayes; Probabilidade; Proposta de Ensino.

1. Introdução

Prever eventos, fazer estimativas, tomar decisões e fazer escolhas em situações que envolvem, em certa medida, um contexto de incerteza, são atribuições de um ramo da Matemática, chamado Probabilidade. Incerteza, pois nem sempre somos capazes de assegurar ou controlar o valor de certas variáveis, uma vez que os resultados podem variar em desempenho de um experimento para outro. Muitas vezes nos deparamos com essas situações que envolvem experimentos ditos aleatórios (SPIEGEL; SCHILLER; SRINIVASAN, 2013).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) sugerem que essas situações de incerteza sejam exploradas em sala de aula, nas quais o estudante realiza experimentos e observa eventos em espaços equiprováveis (BRASIL, 1998). Contudo, há aqueles eventos em que o cálculo da probabilidade está condicionado à ocorrência de um outro evento. Nesses casos lidamos com o que é denominado de *probabilidade condicional*, ou seja, a probabilidade de um determinado evento ocorrer, dado que outro evento associado a esse já ocorreu (LIMA et al., 2006). Um teorema associado à probabilidade condicional é o Teorema de Bayes, que relaciona probabilidades condicionais com suas inversas. Sua gênese é ilustrada pelo trecho a seguir.

> É bem possível que a espécie humana tenha desenvolvido raciocínios de cunho bayesiano para sobreviver às agruras da vida nas savanas africanas, do tipo “Ontem comemos aquela fruta alaranjada, e hoje passamos mal; é bem provável que tenhamos passado mal visto que comemos a fruta alaranjada; melhor não comê-la mais” (REVISTA CÁLCULO, 2013, p. 39).

O Teorema de Bayes pode nos auxiliar a resolver problemas que envolvem desde situações em que usamos a intuição para interpretá-las até situações mais complexas, como no caso de diagnosticar uma doença sabendo o resultado de um exame.

Nesse sentido, nossa intenção nesse trabalho é apresentar uma proposta para a introdução do Teorema de Bayes. A construção dessa proposta foi fundamentada na resolução de problemas, a partir de uma perspectiva que articula a metodologia proposta por Onuchic e Allevato (2011) e o modelo de Polya (1994). Embora a proposta seja direcionada ao Ensino Superior, o problema pode também ser abordado no Ensino Médio para discussão de outros tópicos como por exemplo Probabilidade Condicional.

2. Uma perspectiva de resolução de problemas: uma articulação entre o roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011) e o modelo de Polya (1994)

De acordo com Onuchic e Allevato (2011) não existe um modelo pronto para trabalhar através da resolução de problemas em sala de aula, cada problema e sujeitos envolvidos na sua resolução constituem um cenário particular. É possível, porém, indicar algumas ações que podem auxiliar e nortear o trabalho do professor na organização de uma aula mediada pela resolução de problemas. Com essa intenção, as autoras elaboraram um roteiro que é composto pelas seguintes etapas: *preparação do problema; leitura individual; leitura em conjunto; resolução do problema; observar e incentivar; registro das resoluções na lousa; plenária; busca do consenso; formalização do conteúdo; e proposição e resolução de novos problemas* (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Esse roteiro pode servir como um apoio, mas nunca como uma obrigação, uma vez que as autoras oferecem ao docente a liberdade para realizar alterações quando julgar conveniente, desde que a essência da proposta metodológica seja mantida

(ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Polya (1994), por sua vez, apresenta um modelo para a resolução de um problema composto por quatro fases: *a compreensão do problema, o estabelecimento de um plano, a execução desse plano e o retrospecto*.

No Quadro 1, apresentamos algumas considerações com base na proposta de Onuchic e Allevato (2011) relacionando o papel do professor na etapa da resolução do problema com o papel do aluno, segundo as fases sugeridas por Polya (1994) para a resolução de um problema, uma vez que Polya (1994) não tem a preocupação de discutir o papel do professor.

Quadro 1: Fases da Resolução de Problemas – Modelo de Polya

Fase	Papel do Estudante	Papel do Professor
Compreensão do problema	*Familiarização*: Nesse momento o estudante compreende o problema de forma mais geral, considerando seus objetivos e dados mais relevantes.	Destaca-se o papel do professor de escolher bem o problema que irá propor, de forma que os estudantes tenham interesse em resolvê-lo. Segundo Polya (1994) o problema deve ser natural e interessante, nem muito simples e nem muito complexo.
	Aperfeiçoamento da compreensão: O estudante consegue explicar o enunciado com suas próprias palavras e tem o problema claro em sua mente.	
O estabelecimento de um plano	Elaborar um plano para tentar resolver o problema proposto. Ao elaborar o plano, o estudante distingue o que fará em cada um dos passos desse plano, quais estratégias serão utilizadas e quais objetivos conseguirá atingir ao desenvolver essas estratégias.	"O caminho que vai desde a compreensão do problema até o estabelecimento de um plano, pode ser longo e tortuoso" (POLYA, 1994, p. 5). Nesse contexto o professor deve questionar os estudantes, de modo que seus questionamentos possibilitem que eles estabeleçam seu plano.
Execução do Plano	O estudante deverá colocar em prática as estratégias traçadas na etapa anterior.	Se o estudante houver realmente concebido um plano, o professor terá então um período de relativa tranquilidade.
Retrospecto	Nessa fase, os estudantes têm a oportunidade de analisar todo o problema, revisando cada um dos passos, desde a compreensão do problema até a resposta, verificando também se está de fato respondendo a questão central levantada no problema.	O professor pode orientar os estudantes a discutir, analisar e comparar suas resoluções, percebendo semelhanças e diferenças nas estratégias utilizadas, avaliando se fariam diferente ou não depois de saber como seus colegas resolveram o problema. Pode também encorajar os estudantes a imaginar outros problemas nos quais poderiam utilizar a mesma ideia ou estratégia.

Fonte: Dos autores; com base em Polya (1994) e Onuchic e Allevato (2011).

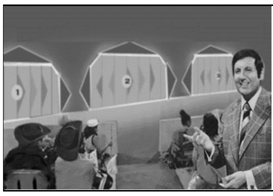
À medida que articulamos as duas propostas, de Onuchic e Alevato (2011) e de Polya (1994), conjecturamos que há uma complementação entre elas, uma vez que a leitura individual e a leitura em conjunto constituem estratégias utilizadas pelos estudantes para compreender o problema; a etapa da resolução do problema é aquela na qual as quatro fases propostas por Polya (1994) podem ocorrer e, nesse momento, o papel do professor consiste em observar e incentivar os estudantes, conforme explicam Onuchic e Allevato (2011); a plenária é o momento em que o estudante realiza a resolução no quadro, a formalização dos conteúdos acontece e busca-se por um consenso, é nesse momento que o estudante além de fazer o retrospecto, desenvolver habilidades para resolver problemas e relacioná-los a outras situações, conforme propõe Polya, desenvolverá o papel de construir seus próprios conceitos.

3. Uma Proposta para o ensino do Teorema de Bayes na perspectiva da Resolução de Problemas

Mediante as considerações teóricas explicitadas, apresentamos a proposta que elaboramos para introdução e discussão do Teorema de Bayes[1]. Conforme explicam Onuchic e Allevato (2011), essa proposta constitui a etapa de *preparação do problema* e pode ser modificada de acordo com as necessidades e especificidades do contexto em que será proposta.

Para a familiarização com o problema, fase denominada por Polya (1994) de *compreensão do problema*, sugerimos apresentar um trecho do filme “Quebrando a Banca”, no qual o professor, personagem do filme, refere-se a um jogo exibido em um programa de televisão norte americano na década de 1970 chamado *Let's Make a Deal* (Vamos Fazer um Acordo), cujo apresentador utilizava como nome artístico *Monty Hall*. O programa ganhou destaque devido às polêmicas geradas pelas divergências de opiniões em relação às possibilidades de vitória no jogo (MLODINOW, 2008, p. 52-53). O trecho do filme deve ser exibido até o momento em que o professor se dirige a um estudante e o questiona com o enunciado do problema de Monty Hall (Quadro 2). O trecho do filme desempenha nesse contexto a função de suscitar nos estudantes o desejo de resolver o problema, de investigá-lo, conforme propõe o modelo de Polya.

Quadro 2: O Problema de Monty Hall



Suponha que o participante de um programa de auditório tenha a opção de escolher uma dentre três portas: atrás de uma delas há um carro; atrás das outras, há bodes. Depois que um dos participantes escolhe uma porta, o apresentador, que sabe o que há atrás de cada porta, abre uma das portas não escolhidas, revelando um bode. Ele diz então ao participante: “Você gostaria de mudar sua escolha para a outra porta?” Para o participante, é vantajoso trocar sua escolha?

Fonte: Adaptado de Mlodinow (2009, p. 52) e do filme “Quebrando a banca”.

Sugerimos que o enunciado seja entregue aos estudantes, de modo que todos tenham acesso a ele e possam realizar as *leituras individual* e *em conjunto*, como sugerem Onuchic e Allevato (2011). Os estudantes precisam, então, ser questionados (POLYA, 1994) se é ou não vantajoso para o participante trocar a escolha da porta; se a situação apresentada é

[1] Consideramos como pré-requisitos para a proposta conceitos relacionados à probabilidade, tais como o cálculo da probabilidade de um evento, o conceito de espaço amostral e a definição de eventos, a probabilidade condicional e o Teorema da Probabilidade Total.

completamente aleatória; se as probabilidades de trocar ou não a porta são as mesmas para que ele ganhe o carro; e qual a probabilidade do participante ganhar o carro caso ele troque ou não a escolha da porta. Nesse momento deve-se oportunizar discussões e debates entre estudantes e entre estudantes e professor a respeito da interpretação inicial do problema e de como o participante do programa deve proceder. A comunicação é essencial para que os estudantes possam se engajar na *resolução do problema* (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011).

Após as discussões iniciais, com vistas a compreender o problema, os estudantes devem ser direcionados para o *estabelecimento de um plano* (POLYA, 1994). Para isso, pode-se propor a realização de simulações do Problema de Monty Hall por meio do software GeoGebra[2]. Em um primeiro momento os estudantes, organizados em grupos, podem realizar diversas simulações, levantando hipóteses e testando-as. Essa ação contribui para que eles aperfeiçoem sua compreensão do problema (POLYA, 1994) à medida que se colocam no lugar do participante, ou seja, à medida que vivenciam a situação proposta no problema. Uma estratégia que pode ser utilizada é propor que alguns grupos simulem as possibilidades de vitória considerando que o participante sempre troca a porta escolhida, enquanto outros grupos simulam as possibilidades de vitória mantendo sempre a escolha da porta. São essas simulações que possibilitarão a realização de inferências e de cálculos de probabilidade; a retomada do Teorema da Probabilidade Total; o estabelecimento de relações com a Probabilidade Condicional; e introdução do Teorema de Bayes e sua utilização na resolução do problema. O uso do software tem por objetivo que os estudantes percebam, após realizarem um determinado número de vezes de simulações – 20, 50, 100 vezes, por exemplo, conforme sugere a lei dos grandes números[3] –, que é mais provável o participante ganhar o carro ao trocar sua escolha da porta. Cabe ao professor *observar* e *incentivar* os estudantes em suas investigações (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011); e aos estudantes traçar estratégias que possibilitem a resolução do problema e executá-las (POLYA, 1994).

Os resultados das simulações, e as conjecturas decorrentes, devem ser registrados pelos estudantes, observando particularmente o número de simulações e o número de vitórias. Esses resultados devem ser colocados em discussão por meio de uma *plenária*, momento em que o professor pode selecionar algumas *resoluções para serem registradas na lousa* (ONUCHIC;

[2] O arquivo utilizado para as simulações está disponível em: http://tube.geogebra.org/material/simple/id/126872.
[3] Se um evento de probabilidade *p* é observado repetidamente em ocasiões independentes, a proporção da frequência observada deste evento em relação ao total número de repetições converge em direção a *p* à medida que o número de repetições se torna arbitrariamente grande.

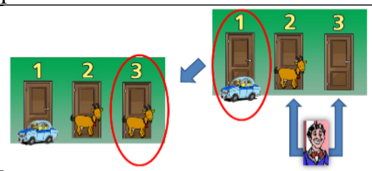
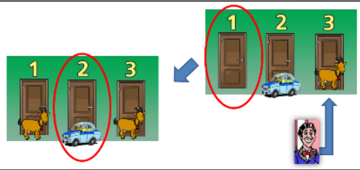
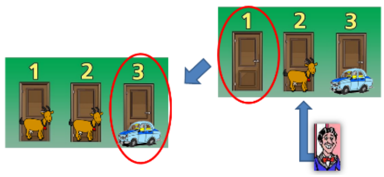
ALLEVATO, 2011). Nesse momento as discussões levantadas inicialmente podem ser retomadas, de modo que os estudantes possam concluir que a situação apresentada não é completamente aleatória, pois há condicionantes que interferem, como o apresentador que sabe qual porta esconde o carro; que a probabilidade de mudar e a de manter a escolha das portas não é a mesma; que eles possam determinar essas probabilidades; e que eles possam, por fim, responder a questão do problema: É ou não vantajoso para o participante trocar a escolha da porta? As discussões dessas questões encaminham a aula para a *busca de um consenso* e para *a formalização do conteúdo* (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011), que discutimos a seguir ao apresentar dois possíveis encaminhamentos para a resolução do problema.

4. Uma possível resolução: analisando as possibilidades

Essa resolução supõe que o participante escolha arbitrariamente a porta 1 – suposição que pode ser feita com qualquer uma das portas. Duas situações precisam ser consideradas, são elas: a) o participante trocará a escolha da porta, quando o apresentador lhe oferecer essa oportunidade; e b) o participante manterá a escolha da porta, recusando a oferta do apresentador. Em ambas as situações temos três casos a considerar: i) o carro está atrás da porta 1; ii) o carro está atrás da porta 2; iii) o carro está atrás da porta 3. Vamos analisar as duas situações, considerando os três casos em cada uma delas, para identificar dentre elas qual opção será vantajosa para o participante: trocar (Quadro 3) ou não trocar (Quadro 4) a escolha da porta.

a) O participante troca a escolha da porta em qualquer circunstância.

Quadro 3: O participante troca a escolha da porta

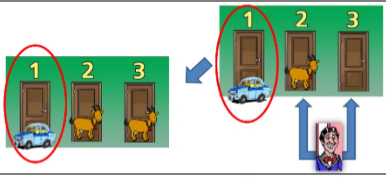
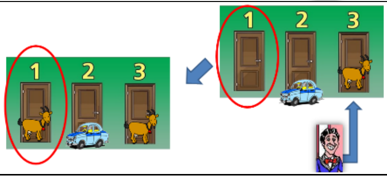
i) O carro está atrás da porta 1. Nesse caso o apresentador pode abrir tanto a porta 2 quanto a porta 3. Supondo que ele abra a porta 2, como o participante trocará sua escolha (para a porta 3), ele *não ganhará o carro*.	
ii) O carro está atrás da porta 2. Nesse caso o apresentador pode abrir somente a porta 3. Como o participante trocará sua escolha (para a porta 2), ele *ganhará o carro*.	
iii) O carro está atrás da porta 3. Nesse caso o apresentador deve abrir a porta 2. Como o participante trocará sua escolha (para a porta 3), ele *ganhará o carro*.	

Fonte: Dos autores.

Dessa forma, das três possibilidades, ao trocar de porta, o participante ganhará o carro em duas delas. Vamos agora considerar a segunda situação:

b) O participante não troca a escolha da porta em qualquer circunstância.

Quadro 4: O participante não troca a escolha da porta

i) O carro está atrás da porta 1. Nesse caso o apresentador pode abrir a porta 2 ou a porta 3 e, supondo que ele abra a porta 2, o participante manterá sua escolha e *ganhará o carro*.	
ii) O carro está atrás da porta 2. Nesse caso o apresentador deve abrir a porta 3. Como o participante manterá sua escolha, ele *não ganhará o carro*.	
iii) O carro está atrás da porta 3. Nesse caso o apresentador deve abrir a porta 2. Como o participante manterá sua escolha, ele *não ganhará o carro*.	

Fonte: Dos autores.

Assim, das três possibilidades, ao manter a escolha da porta, o participante ganhará o carro em uma delas. Portanto, trocar a escolha da porta será vantajoso para o participante, pois representa 2/3 da chance de ganhar o carro, enquanto se ele não trocar a escolha, tem apenas 1/3 da chance. Isto é, de qualquer forma que considerarmos, o participante terá sempre duas vezes mais chance de ganhar o carro ao trocar sua escolha da porta do que se ele não trocar.

Esse encaminhamento é suficiente para resolver o problema e revela a ideia intuitiva do Teorema de Bayes. Nesse contexto é preciso que o professor leve os estudantes a pensar e avaliar suas estratégias, fazendo um *retrospecto* da resolução (POLYA, 1994). Nesse momento o professor pode optar, e é o que sugerimos neste artigo, por encaminhar a aula para a sistematização do teorema e oportunizar sua utilização na resolução do problema, como apresentamos na sequência, essa etapa representa a formalização segundo Onuchic e Allevato (2011).

5. Resolução do problema por meio do Teorema de Bayes e sistematização

Esse encaminhamento possibilita que na resolução sejam abordados dois teoremas: o Teorema da Probabilidade Total e o Teorema de Bayes. Para começar, podemos considerar, sem perda de generalidade, que o participante escolheu a porta 1. Nesse caso, podemos definir os seguintes eventos, dos quais C_1, C_2 e C_3 são disjuntos[4] e M_1, M_2 e M_3 também:

C_1: O carro está atrás da porta 1 — M_1: O apresentador abre a porta 1
C_2: O carro está atrás da porta 2 — M_2: O apresentador abre a porta 2
C_3: O carro está atrás da porta 3 — M_3: O apresentador abre a porta 3

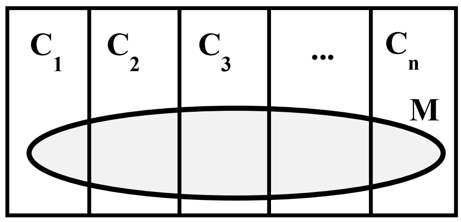
Para saber se é vantajoso para o participante trocar a porta escolhida, no caso a porta 1, é preciso determinar a *probabilidade de o participante ganhar o carro sabendo que o apresentador abriu uma das portas que o participante não escolheu*, ou seja, calcular a probabilidade do apresentador abrir a porta 3 e a de abrir a porta 2.

Supomos que os estudantes optem por começar calculando a probabilidade de o apresentador abrir a porta 3, dado que o participante escolheu a porta 1: Sabe-se que C_1, C_2 e C_3 são eventos equiprováveis, ou seja, $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = 1/3$. Sabe-se também que a probabilidade de ocorrer M_1 é nula, uma vez que partimos da hipótese de que o participante escolheu a porta 1, logo o apresentador não abrirá essa porta. Portanto, $P(M_1) = 0$. As probabilidades de M_2 e de M_3 são desconhecidas e é preciso calculá-las. Como C_1, C_2 e C_3 são eventos disjuntos e M_3, assim como M_2, está contido na reunião desses eventos, pode-se utilizar o Teorema da Probabilidade Total (Quadro 5) para calcular $P(M_3)$ e $P(M_2)$.

Quadro 5: Teorema da Probabilidade Total

Se M é um evento contido numa união de eventos disjuntos $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$ e $P(C_i) > 0$, para $i \in \{1,2,3,\ldots, n\}$, então:

(I) $P(M) = P(C_1 \cap M) + P(C_2 \cap M) + \ldots + P(C_n \cap M)$
Da probabilidade condicional, para $i \in \{1,2,3,\ldots, n\}$:
$P(M/C_i) = P(C_i \cap M)/P(C_i)$
Temos que:
(II) $P(C_i \cap M) = P(C_i).P(M/C_i)$
Substituindo (II) em (I), temos:



$P(M) = P(C_1).P(M/C_1)+P(C_2).P(M/C_2)+P(C_3).P(M/C_3)+\ldots+P(C_n).P(M/C_n)$

Fonte: Adaptado de Morgado et al. (2006, p. 163).

No caso de $P(M_3)$, temos: $\mathbf{P(M_3) = P(C_1).P(M_3/C_1) + P(C_2).P(M_3/C_2) + P(C_3).P(M_3/C_3)}$

Já se sabe que $P(C_1) = P(C_2) = P(C_3) = 1/3$, logo é preciso conhecer as probabilidades condicionais[5] $P(M_3/C_1)$, $P(M_3/C_2)$ e $P(M_3/C_3)$, que são apresentadas pelo Quadro 6.

[4] Dois eventos A e B são chamados de *eventos disjuntos* (ou mutuamente exclusivos) se $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Em outras palavras, dois eventos A e B são disjuntos se não podem ocorrer simultaneamente (MORGADO, et. al., 2006, p. 136).

[5] Dados dois eventos A e B, a *probabilidade condicional de B dado A* é o número $P(A \cap B)/P(A)$, e representaremos esse número pelo símbolo $P(B/A)$. Note que esse número só está definido quando $P(A) > 0$ (MORGADO, et. al., p. 154). Esse conteúdo deve ser estudado anteriormente, e, portanto, o tomamos como pré-requisito nesta proposta de ensino.

Quadro 6: Probabilidades Condicionais $P(M_3/C_1)$, $P(M_3/C_2)$ e $P(M_3/C_3)$

$P(M_3/C_1)$: probabilidade de o apresentador abrir a porta 3, sabendo que o carro está atrás da porta 1.	Como o participante escolheu a porta 1, o apresentador pode abrir tanto a porta 2 quanto a porta 3, temos que $P(M_3/C_1) = 1/2$.
$P(M_3/C_2)$: probabilidade de o apresentador abrir a porta 3, sabendo que o carro está atrás da porta 2.	Como o apresentador não pode abrir a porta 1, pois foi escolhida pelo participante, nem a porta 2, atrás da qual encontra-se o carro, temos que $P(M_3/C_2) = 1$, ou seja, é certo que o apresentador abrirá a porta 3.
$P(M_3/C_3)$: probabilidade de o apresentador abrir a porta 3, sabendo que o carro está atrás da porta 3.	Como o apresentador não abrirá a porta que esconde o carro, tal probabilidade é nula, ou seja, temos que $P(M_3/C_3) = 0$.

Fonte: Dos autores.

Retomando o cálculo de $P(M_3)$ e substituindo as probabilidades encontradas, obtém-se:

$$P(M_3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.0 \quad \Leftrightarrow \quad P(M_3) = \frac{1}{2}$$

Considerando que $P(M_1) = 0$, pois o apresentador não abrirá a porta escolhida pelo participante, e $P(M_3) = 1/2$, conforme acabamos de calcular, segue que:

$$P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) = 1$$

E a partir daí pode-se calcular $P(M_2)$, obtendo:

$$P(M_1) + P(M_2) + P(M_3) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad P(M_2) = 1 \quad 0 \quad \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad P(M_2) = \frac{1}{2}$$

A probabilidade $P(M_2)$ pode também ser calculada utilizando um processo análogo ao utilizado na obtenção de $P(M_3)$. Os resultados $P(M_1) = 0$, $P(M_2) = 1/2$ e $P(M_3) = 1/2$, serão úteis na resolução do problema. Porém, para que o problema seja respondido é preciso considerar o que se quer calcular e as informações já obtidas, como mostra o Quadro 7.

Quadro 7: Relacionando as Probabilidades Condicionais Inversas

O que queremos calcular	O que conhecemos
$P(C_1/M_3)$: probabilidade de o carro estar atrás da porta 1, dado que o apresentador abriu a porta 3. Em outras palavras, *a probabilidade de o participante ganhar o carro mantendo a escolha inicial.*	$P(M_3/C_1) = 1/2$
$P(C_2/M_3)$: probabilidade de o carro estar atrás da porta 2, dado que o apresentador abriu a porta 3. Em outras palavras, *a probabilidade de o participante ganhar o carro trocando a escolha da porta.*	$P(M_3/C_2) = 1$

Fonte: Dos autores.

Existe ainda um terceiro caso, $P(C_3/M_3)$, ou seja, a probabilidade de o carro estar atrás da porta 3, dado que o apresentador abriu a porta 3, mas essa probabilidade é nula, uma vez que o apresentador nunca abrirá a porta que contém o carro. Nesse momento o contexto do problema pode ser utilizado para sistematizar o Teorema de Bayes. Para isso, deve-se calcular $P(C1/M_3)$, considerando que $P(C_1) > 0$ e $P(M_3) > 0$:

$$P(M_3/C_1)=\frac{P(M_3\cap C_1)}{P(C_1)} \quad \Leftrightarrow \quad (I) \quad P(M_3\cap C_1)=P(M_3/C_1).P(C_1)$$
$$P(C_1/M_3)=\frac{P(C_1\cap M_3)}{P(M_3)} \quad \Leftrightarrow \quad (II) \quad P(C_1\cap M_3)=P(C_1/M_3).P(M_3)$$

Pela propriedade comutativa da interseção $P(M_3\cap C_1)=P(C_1\cap M_3)$, segue que as equações (I) e (II) são equivalentes e, portanto, elas podem ser igualadas, obtendo:

$$P(M_3/C_1).P(C_1)=P(C_1/M_3).P(M_3)$$
$$(III) \quad P(C_1/M_3)=\frac{P(M_3/C_1).P(C_1)}{P(M_3)}$$

A equação (III), obtida a partir do contexto do Problema de Monty Hall, consiste no Teorema de Bayes, que nos permite calcular probabilidades condicionais inversas, como as apresentadas no Quadro 7. O processo descrito para obtenção da equação (III), pode ser generalizado, e vir a constituir a demonstração do Teorema de Bayes, como indica o Quadro 8.

Quadro 8: Teorema de Bayes

Considerando M um evento contido numa união de eventos disjuntos C_1, C_2, $C_3, \ldots$, C_n e $P(C_1) > 0$, $P(C_2) > 0, \ldots , P(C_n) > 0$, se $P(M) > 0$, então: $$P(C_i/M)=\frac{P(C_i).P(M/C_i)}{P(M)}$$

Fonte: Adaptado de Morgado et al. (2006, p. 164).

A probabilidade $P(C_2/M_3)$ pode ser calculada de maneira análoga ao processo utilizado no cálculo de $P(C_1/M_3)$ e é dada por:

$$P(C_2/M_3)=\frac{P(M_3/C_2).P(C_2)}{P(M_3)}$$

Dessa forma, utilizando o Teorema de Bayes, é possível calcular o valor de $P(C_1/M_3)$ e de $P(C_2/M_3)$, substituindo os valores das probabilidades que já são conhecidos:

$$P(C_1/M_3)=\frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3} \text{ e } P(C_2/M_3)=\frac{1.\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$$

Tais resultados indicam, como no primeiro encaminhamento, que o participante tem mais chance de ganhar o carro, caso ele troque a escolha da porta. As probabilidades condicionadas à decisão do apresentador de abrir a porta 2, ao invés da porta 3, são obtidas de forma análoga à apresentada, e dessa forma os estudantes chegarão à mesma conclusão, pois

ISSN 2178-034X

$P(C_1/M_2) = 1/3$ e $P(C_3/M_2) = 2/3$. O Quadro 9, que sistematiza os resultados obtidos e responde a questão proposta pelo Problema de Monty Hall, pode ser construído com os estudantes.

Quadro 9: Sistematização da solução do Problema de Monty Hall

Porta escolhida pelo participante	Decisão do apresentador	Probabilidade de ganhar o carro mantendo a escolha	Probabilidade de ganhar o carro alterando a escolha
Porta 1	M_1 (não ocorre)	-	-
	M_2	$P(C_1/M_2) = 1/3$	$P(C_3/M_2) = 2/3$
	M_3	$P(C_1/M_3) = 1/3$	$P(C_2/M_3) = 2/3$

Fonte: Dos autores.

Diante dos resultados, pode-se concluir que ao trocar de porta, o participante tem 2/3 de chance de ganhar o carro, enquanto que se ele não trocar, terá apenas 1/3 de chance. Portanto, é vantajoso para o participante trocar a escolha da porta.

Cabe nesse momento uma discussão, retomando o caminho percorrido; comparando os encaminhamentos e as estratégias utilizadas; analisando se os resultados obtidos respondem o problema; avaliando se fariam diferente ou não; e pensando em outras situações nas quais o Teorema de Bayes pode ser também utilizado, tais como a medicina, a informática, a economia etc. – segundo Polya (1994), fazer um *retrospecto*. Para finalizar a aula, o professor pode discutir com os estudantes a importância do Teorema de Bayes para a resolução desse problema.

6. Considerações Finais

A proposta apresentada, fundamentada em uma perspectiva de resolução de problemas, que resulta da articulação entre o roteiro proposto por Onuchic e Allevato (2011) e o modelo de Polya (1994), oferece tanto aos estudantes como ao professor oportunidades de explorar o Teorema de Bayes. O software GeoGebra pode contribuir na dinâmica da aula, uma vez que, com seu uso, os estudantes podem realizar simulações associadas ao problema de Monty Hall, bem como levantar e testar hipóteses que podem auxiliá-los na sua resolução.

A comunicação irá emergir na execução dessa proposta como meio pelo qual os estudantes podem discutir o problema em busca de uma compreensão, de esclarecer dúvidas, traçar estratégias de resolução e compará-las com as estratégias formuladas pelos colegas, caminhar em busca de um consenso e serem orientados pelo professor em direção a uma formalização do conteúdo. Nesse processo habilidades associadas à resolução de problemas podem ser desenvolvidas e conteúdos estudados anteriormente podem ser revisitados, sendo alguns deles essenciais para a resolução do problema e para a aprendizagem do conteúdo que se pretende ensinar. No caso desta proposta podemos citar tópicos da probabilidade que podem ser colocados em discussão, seja com a finalidade de revisar ou de ensinar/aprender, por exemplo, cálculo de probabilidades, eventos disjuntos, probabilidade condicional, Teorema da Probabilidade Total, entre outros.

A execução dessa proposta de ensino pode conduzir os estudantes a pelo menos duas maneiras de resolver o problema, por meio das simulações realizadas no GeoGebra, na qual os estudantes podem analisar caso a caso as possibilidades de o participante ganhar ou não o carro; e outra na qual o professor pode utilizar as estratégias dos estudantes na primeira resolução para orientá-los na sistematização do Teorema de Bayes. Quando comparadas, as resoluções sinalizam a utilidade e a importância desse teorema na resolução de problemas como o Problema de Monty Hall. Vale lembrar que se trata de uma proposta e que, como tal, deve ser analisada pelo professor e adaptada a seus objetivos e condições, conforme o contexto que se encontra.

7. Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que através da resolução de problemas? In: ONUCHIC, L. R. et al. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2014. p. 35-52.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**: Volume 2. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. (Coleção do Professor de Matemática).

MORGADO, A. C. et al. **Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MLODINOW, L. **O Andar do Bêbado**: como o acaso determina nossas vidas. Tradução de Diego Alfaro. Rio de Janeiro: Zahar, 2009. Tradução de: The Drunkard's Walk.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO, N. S.G.; **Pesquisa em Resolução de Problemas**: caminhos, avanços e novas perspectivas. Boletim de Educação Matemática, vol. 25, núm. 41, dez, 2011, pp. 73-98, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

POLYA, G. **A Arte de Resolver Problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

REVISTA CÁLCULO: **Matemática para todos**. Doentes perfeitamente saudáveis. 31. ed. n.3. São Paulo: Editora Segmento, 2013.

SPIEGEL, M. R. SCHILLER, J. SRINIVASAN. **Probabilidade e Estatística.** 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2013. (Coleção Schaum).