ESTUDO DO OCTAEDRO TRUNCADO EM UM AMBIENTE DE GEOMETRIA DINÂMICA

Talita Carvalho Silva de Almeida
Universidade Federal do Pará
talita_almeida@yahoo.com.br

Maria José Ferreira da Silva
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
zeze@pucsp.br

Resumo:
O presente trabalho tem o objetivo de revisitar o sólido arquimediano octaedro truncado por meio de sua construção no ambiente de geometria dinâmica *Cabri 3D*, objeto matemático não mais ensinado na educação básica brasileira. Para investigar processos de construção para esse sólido arquimediano, recorremos a um estudo bibliográfico que nos permitiu encontrar o truncamento, procedimento matemático realizado por renascentistas para a obtenção de arquimedianos a partir de cortes nas arestas de sólidos platônicos. O trabalho aponta o *Cabri 3D* como um habitat para o estudo do arquimediano octaedro truncado, na medida em que reconhece como objeto, em termos de Chevallard, todos os saberes que determinam sua existência enquanto objeto de ensino.
Palavras-chave: Sólidos Arquimedianos; Octaedro truncado; *Cabri 3D*; Transposição Didática.

1. Introdução

Algumas pesquisas em Educação Matemática, como a de Kaleff (1998), bem como as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o Ensino Médio (BRASIL, 1999), apontam o estudo de poliedros em ambientes computacionais, suas formas virtuais além de ganharem aspectos de uma realidade quase material podem ser manipuladas e transformadas de diferentes maneiras.

Em geral, sabemos que há perda de informações quando representamos objetos tridimensionais no plano, uma vez que representações bidimensionais de objetos espaciais quase sempre não correspondem à formação de suas imagens mentais. Assim, tendo em vista as limitações da representação e visualização impostas pelo ambiente papel e lápis, nos propomos a estudar o sólido arquimediano octaedro truncado por meio de sua construção no ambiente de Geometria Dinâmica *Cabri 3D*. Os sólidos arquimedianos surgem como fruto de uma modificação, truncamento de outros sólidos, ou imersos em processos de construções determinados.

O ambiente de geometria dinâmica *Cabri 3D* foi desenvolvido para simular o trabalho com três dimensões, para permitir que figuras espaciais possam ser construídas, manipuladas e visualizadas sob diferentes pontos de vista, conservando sempre suas propriedades.

2. Algo da história

Alguns temas em geometria ficam esquecidos durante anos, ou séculos, para depois tornarem a despertar o interesse de alguns estudiosos, que retomam a sua exploração, e descobrem novos caminhos de estudo. Um desses estudos diz respeito aos sólidos de Arquimedes, também conhecidos como poliedros semirregulares. Tais sólidos são definidos como poliedros de faces poligonais regulares, de no mínimo dois tipos, com todas as arestas e ângulos poliédricos congruentes.

Os livros de Arquimedes que tratam desses sólidos estão perdidos, assim como grande parte das obras dos matemáticos gregos. Pappus (1876-1878), em um de seus legados mais importantes, *Coleção Matemática*, grupo de oito livros que contém notas históricas sobre o assunto, descreve no seu quinto livro os treze sólidos semirregulares descobertos por Arquimedes, no entanto não os nomeia e nem os ilustra. É dessa maneira que o primeiro estudo matemático dos sólidos arquimedianos, pós-Arquimedes, é realizado.

Esse estudo matemático parece que foi só retomado no século XV com Kepler, talvez o primeiro a o sistematizar. No livro II de sua obra *Harmonices Mundi* de 1619, Kepler demonstra que existem apenas treze Sólidos Arquimedianos e lhes atribui nomes. Entretanto, no período do Renascimento, diversos artistas e matemáticos se interessaram pelo estudo e representação desses sólidos, que para variar seus desenhos, eliminavam partes de sólidos platônicos, o que, naturalmente, produzia alguns sólidos arquimedianos como resultado.

O processo mais utilizado por esses artistas, que deu origem a essa redescoberta, é chamado de truncamento, eliminação de partes de um sólido de forma simétrica que pode ser feita a partir de seus vértices ou a partir de suas arestas. No entanto, de acordo com Field (1997), não há qualquer explicitação ou esquematização do estudo das relações entre sólidos platônicos, sólidos arquimedianos e os diferentes processos de construção a partir de truncaturas.

3. Sólidos arquimedianos no ensino

Os Sólidos Arquimedianos não estão presentes na matemática ensinada na Escola Básica brasileira, ainda que apareçam em alguns materiais didáticos ou de formação de professores por meio de exemplos e exercícios, em geral, relacionados à Relação de Euler e à convexidade, mas sem qualquer definição ou mesmo nomeação correspondente. Para Almeida e Silva (2012, p. 203),

> a carência de informações a respeito do objeto matemático sólidos arquimedianos no Brasil, bem como a dificuldade de encontrar materiais, na Escola Básica, que discorram sobre os mesmos, pode ser uma possível causa para que muitos desconheçam sua existência. [...] O icosaedro truncado é o arquimediano que mais aparece, provavelmente, por ser associado à bola de futebol.

Contudo vale ressaltar que nem sempre foi assim. Para confirmar essa assertiva, encontramos dois livros[1] de Desenho Geométrico que nos fornecem informações sobre alguns sólidos arquimedianos, o que nos leva a inferir que esse objeto matemático já fez parte da grade curricular de Matemática, mais especificamente em Desenho Geométrico, disciplina que de acordo com Zuin (2002), permaneceu oficialmente por quarenta anos consecutivos nos currículos escolares – 1931 a 1971. Nesse sentido, de acordo com Rabello (2005), o motivo que levou o abandono da disciplina Desenho Geométrico da grade curricular de matemática, foi substituí-la na grade curricular do ensino público, em todas as séries do 1° e 2° graus do Ensino Básico, por Educação Artística. O autor lembra, ainda, que o Ministério da Educação e Cultura tornou-a obrigatória para o segundo segmento do Ensino Fundamental.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Artes (BRASIL, 1997), a substituição ocorreu porque o ensino de Desenho Geométrico estava voltado essencialmente para o domínio técnico, centrado na figura do professor que privilegiava a reprodução de modelos. Segundo o documento, a disciplina Desenho era considerada mais por seu aspecto funcional do que uma experiência em arte.

> Valorizavam-se principalmente as habilidades manuais, os "dons artísticos", os hábitos de organização e precisão, mostrando ao mesmo tempo uma visão utilitarista e imediatista da arte. Os professores trabalhavam com exercícios e modelos convencionais selecionados por eles em manuais e livros didáticos. (Ibid., p.22).

Em contrapartida Rabello (2005, p. 50) assinala que,

[1] Primeiras Noções de Geometria Prática de Olavo Freire, publicado em 1897 e *Programa de Desenho para a primeira e segunda séries ginasiais* de Benjamin de A. Carvalho, publicado em 1960.

> equivalente à educação musical ou às artes cênicas, nessas séries o desenho é tratado em sua forma mais elementar, sendo incluído ou excluído conforme as conveniências do momento. Convém lembrar que o desenho geométrico, a geometria descritiva e a perspectiva têm base conceitual matemática, não possuindo, em tese, afinidade estrutural com a área artística, salvo quanto à beleza das representações gráficas.

A situação exposta leva-nos a entender que a ausência das Disciplinas Desenho Geométrico e Geometria Descritiva da grade curricular de matemática contribuiu para que o objeto matemático sólidos arquimedianos, em especial o octaedro truncado, não fosse mais abordado, tendo em vista que esses sólidos não são facilmente representados em ambientes bidimensionais, sem domínio de conhecimentos e habilidades oferecidos pelo Desenho Geométrico.

4. Geometria Dinâmica e *Cabri 3D*

Muitas pesquisas em Educação Matemática têm mostrado que o uso da Geometria Dinâmica como recurso didático não só favorece a exploração e a aquisição de conceitos geométricos, como também apresenta vantagens em relação às construções com régua e compasso no ambiente papel e lápis. O termo Geometria Dinâmica é usado para designar softwares interativos que permitem a criação e manipulação direta de figuras geométricas a partir de suas propriedades. Assim, vemos emergir uma maneira de ensinar e aprender geometria, a partir da exploração experimental que possibilita a passagem de uma figura à outra pelo deslocamento quase contínuo de seus elementos, viável apenas em ambientes dinâmicos.

Para Sangiacomo (1996), a geometria dinâmica permite além de um melhor estudo das propriedades geométricas, uma importante distinção entre desenhar e construir. Para a autora, desenhar é visto como um caso particular, uma representação de um objeto geométrico geralmente relacionado com a reprodução da imagem mental que temos do mesmo. Contudo, as propriedades geométricas do objeto não são conservadas quando movimentamos essa representação em um ambiente dinâmico. Já construir é visto como um caso geral, uma representação do objeto geométrico a partir de suas propriedades, que se conservam mesmo quando a movimentamos.

Construída uma figura em um ambiente dinâmico, podemos investigar suas propriedades, arrastando elementos dessa figura até deformá-la, dentro das restrições impostas pela construção. Durante essa movimentação, relações e medidas se alteram nos permitindo reconhecer seus invariantes bem como a existência de uma classe de figuras que representam o objeto geométrico. Dessa forma, a manipulação direta dos elementos básicos da figura cria um dinamismo cuja vantagem está em conservar as relações entre seus componentes. Para Veloso (1998, p. 96), "a procura do que permanece constante no meio de tudo o que varia", é a razão pela qual este ambiente é apropriado para apoiar um ensino renovado da geometria plana.

Assim como a Geometria Plana, a Geometria Espacial pode, também, ser ensinada em um ambiente de geometria dinâmica. O ambiente computacional *Cabri 3D*[2] é o primeiro software de manipulação direta desenvolvido para simular o trabalho com três dimensões. Nesse sentido, figuras tridimensionais podem ser construídas, visualizadas e manipuladas nesse ambiente, que além de preservar as propriedades de figuras geométricas espaciais, em especial poliedros, permite mudar o ponto de vista em relação ao objeto representado.

Assim, justificamos a utilização do *Cabri 3D* para o ensino dos sólidos arquimedianos, visto que proporciona estudá-los por meio de suas construções ou planificações de suas superfícies, além de visualizá-los sob diferentes pontos de vista, o que seria praticamente impossível em ambiente lápis e papel.

5. O *Cabri 3D* como *habitat* para o objeto matemático octaedro truncado

Yves Chevallard desenvolveu a teoria da Ecologia Didática com o objetivo de abordar os problemas que se estabelecem entre os diferentes objetos do saber a ensinar. A ecologia didática se apóia nas ideias da ecologia biológica - *nicho*, *habitat*, *ecossistema* – para tentar explicar as relações entre os objetos matemáticos e no estudo do próprio objeto matemático. A ideia de *ecossistema* é utilizada por Chevallard (1991) para indicar um conjunto de saberes que ali vivem e evidenciar como esses saberes interagem entre si. Segundo Almouloud (2007, p. 114), Chevallard "introduz a noção de habitat de um objeto matemático como sendo o tipo de instituição onde se encontra o saber relacionado ao objeto de estudo, que por sua vez determinará a função desse saber, ou seja, determinará seu nicho".

Para Chevallard (1991), um objeto matemático não vive isoladamente, então se faz necessário identificar, ou até mesmo fazer viver, um complexo de objetos em torno do próprio objeto. É nesse sentido que a problemática ecológica aparece de maneira mais explícita, uma

[2] O *Cabri 3D* foi desenvolvido por Cabrilog e apresenta os mesmos princípios e objetivos do projeto *Cabri Géomètre*, disponível no site www.cabri.com.

vez que convém examinar os diferentes espaços em que encontramos o objeto matemático e os saberes com os quais ele entra em associação, em outras palavras, seus *habitats*. Para examinar esses diferentes *habitats* bem como os saberes que o objeto matemático entra em associação, Chevallard (1991) aponta a transposição didática como um instrumento de análise que pode evidenciar o percurso do saber desse objeto, desde sua origem até a sala de aula, indicando características que possibilitam definir a sua sobrevivência enquanto um objeto de ensino.

Nesse sentido, a análise da transposição sofrida por determinado objeto permite evidenciar as relações inter-hierárquicas entre esse objeto com os saberes que determinam sua existência. Para Artaud (1998, p.1), o questionamento ecológico proposto por Chevallard – “o que existe, e por quê? Mas também, o que não existe e por quê? Poderia existir? Sobre quais condições?” - tende aproximar o pesquisador das dependências dos objetos que ele estuda e afirma que o mesmo já se fazia presente nos primeiros estudos sobre os processos de transposição.

Assim, entendemos que o *Cabri 3D* é um *habitat* para o estudo dos sólidos arquimedianos, em especial do octaedro truncado, se o reconhece como objeto, bem como reconhece todos os saberes que determinam a existência desse objeto matemático como objeto de ensino.

6. Uma análise da construção do octaedro truncado

A construção no *Cabri 3D* foi realizada por meio da operação de truncamento efetuada em poliedros platônicos. O truncamento está aqui relacionado a cortes realizados em poliedros platônicos de maneira a obter poliedros com todas as faces regulares, com o propósito de revisitar o objeto matemático octaedro truncado por meio de sua construção no ambiente de Geometria dinâmica *Cabri 3D*, e assim constatar se tal ambiente é um *habitat* para o estudo desse sólido.

Existem apenas treze sólidos arquimedianos e todos são obtidos por operações sobre os sólidos platônicos. Desses treze, sabemos que onze podem ser produzidos por uma sucessão de cortes, truncaturas, em poliedros platônicos. No presente trabalho apresentamos a construção no *Cabri 3D* do octaedro truncado mostrado na Figura 1.

ISSN 2178-034X

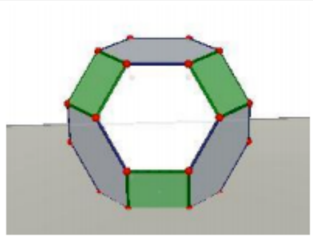

Figura 1. Octaedro truncado.

O sólido arquimediano *octaedro truncado* se origina em um octaedro regular em que se realizam cortes por uma distância adequada de cada vértice de tal forma que cada face do octaedro regular se transforme em uma face hexagonal regular. O truncamento realizado nos conduz a eliminação de seis pirâmides do octaedro regular. A eliminação de cada pirâmide nos apresenta um quadrado como face do octaedro truncado, uma vez que em seus vértices concorrem quatro arestas.

Para respeitar a regularidade das faces do octaedro truncado, os pontos de corte nas faces triangulares do octaedro regular devem ser encontrados por um procedimento matemático, como mostramos no que segue.

Dado uma face ABC triangular do octaedro regular, como pode ser observada na Figura 2, tem-se que: P_1e P_2 são os pontos de corte da aresta AB; P_3 e P_4 são os pontos de corte da aresta BC; P_5e P_6 são os pontos de corte da aresta AC; *a* é a aresta da face e *d* a distância entre um vértice e um ponto de corte.

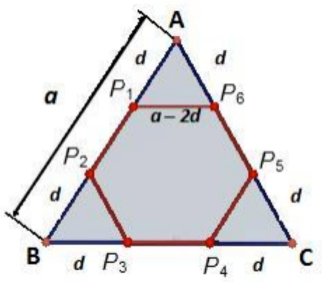

Figura 2. Pontos de corte na face do octaedro regular.

Podemos então deduzir, que o triângulo AP_1P_6 é equilátero, pois M(Â) = 60º e $AP_1 \equiv AP_6$. Dessa forma, temos que: $d = a - 2d$, logo $d = \frac{a}{3}$.

Com a distância *d*, entre um vértice e o ponto de corte, já determinada, podemos encontrar os pontos de corte nas arestas da face triangular regular. Apontamos aqui, com o uso de ferramentas do *Cabri 3D,* dois procedimentos para dividir as arestas do poliedro de partida em três partes congruentes: *transferência de medidas* e *teorema de tales*.

O primeiro procedimento se inicia com a geração de um octaedro regular no *Cabri 3D*. Em seguida, medimos o comprimento da aresta, com a ferramenta *comprimento*, indicando uma das arestas do octaedro regular. Para inserir o valor da expressão $\frac{a}{3}$ na tela do *Cabri 3D*, podemos utilizar a ferramenta *calculadora* – indicando a aresta do cubo e digitando com o auxílio do teclado os demais valores. O resultado obtido é transferido para cada aresta do octaedro regular com a ferramenta *transferência de medidas*[3] como podemos ver na Figura 3.

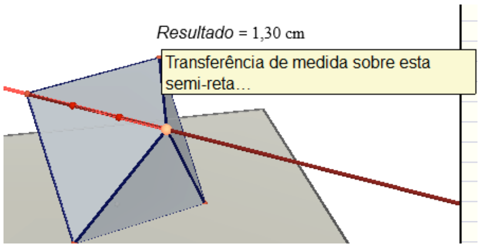

Figura 3. Transferindo medidas.

O segundo procedimento se inicia também com a criação do octaedro regular e de um segmento de reta AD. No segmento AD, marcamos um ponto P_1, centro da circunferência traçada de raio AP_1. Em seguida, uma circunferência é traçada com centro em P_2, ponto de intersecção entre a circunferência traçada anteriormente e o segmento AD, e de raio P_2P_1,determinando P_3, ponto de intersecção entre a segunda circunferência traçada e o segmento AD. Com a ferramenta *segmento*, o segmento de reta BD é traçado para que em seguida três retas paralelas a ele sejam construídas passando por P_1, P_2 e P_3. Os pontos de intersecção entre as paralelas com a aresta do octaedro regular são os pontos de corte necessários para obtenção do octaedro truncado. A Figura 4 ilustra o procedimento relatado.

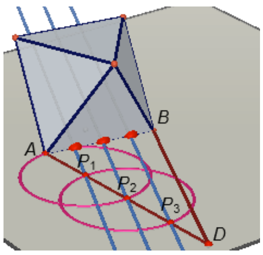

Figura 4. Teorema de tales.

[3] Para que o valor da expressão obtido possa ser transferido para a aresta do octaedro regular, duas semirretas devem ser traçadas de origem em cada um de seus vértices. Em seguida, com o recurso *esconder/mostrar* do *Cabri 3D* as omitimos.

Os dois procedimentos descritos acima nos conduzem a determinação dos pontos de corte nas arestas do octaedro regular, como mostra a Figura 5.

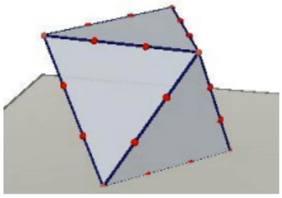

Figura 5. Pontos de corte determinados.

Com os pontos de corte nas arestas já determinados, iniciamos o processo de truncamento utilizando um plano de secção que deve ser criado com a ferramenta *plano* e com a indicação de três pontos em torno de um vértice. Em seguida, com a ferramenta *recorte de poliedro*, a primeira pirâmide será eliminada, indicando-se o plano e a própria pirâmide. Com o recurso *esconder/mostrar* podemos esconder o plano. O resultado é ilustrado na Figura 6.

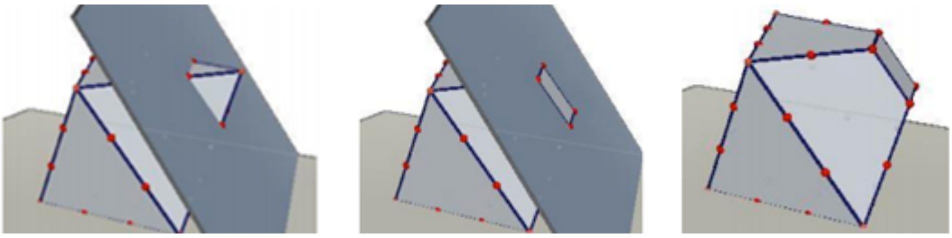

Figura 6. Eliminação da primeira pirâmide do octaedro regular.

Para eliminação das demais pirâmides, repetimos o procedimento acima citado e assim octaedro truncado é gerado no *Cabri 3D*.

De acordo com Chevallard (1991), o objeto matemático octaedro truncado existe se uma pessoa ou instituição o reconhece, mas para que esse mesmo objeto se transforme em objeto de ensino é necessário identificar onde ele pode viver, isto é, seu *habitat*. Para tanto, alguns aspectos precisam ser considerados tais como: os saberes que possibilitam sua existência e as relações inter-hierárquicas entre esse poliedro e o poliedro que o originou.

Para realizar a construção no *Cabri 3D* do sólido arquimediano *octaedro truncado*, percebemos que saberes geométricos e algébricos viveram e interagiram entre si, tais como:o poliedro de partida octaedro regular, teorema de tales ou transferência de medidas e secção plana.

A maioria dos saberes envolvidos na construção foi reconhecida como objeto pela instituição *Cabri 3D* por meio das ferramentas *octaedro regular* e *plano*. No entanto, como o *Cabri 3D* não possui uma ferramenta que por si só divida um segmento em três partes congruentes, dois procedimentos foram apontados: *teorema de tales* e *transferência de medidas*. Para que ambos fossem efetuados na instituição proposta, foi necessário mobilizar um conjunto de saberes outros, tais como: semirreta, ponto, ponto de intersecção, circunferência, segmento, paralela, distância ou comprimento e calculadora.

Cada saber mobilizado para a construção foi importante na medida em que apresentou sua função. A função do octaedro regular no processo foi apresentar o objeto geométrico do qual a truncatura se iniciou, a função do teorema de tales ou da transferência de medidas foi dividir as arestas do octaedro de partida em três partes congruentes e assim indicar os pontos de truncatura, e a função da secção plana foi auxiliar a eliminação de pirâmides do octaedro regular.

Entendemos que as funções do teorema de tales e transferência de medidas, competiram entre si no processo de construção por ambas serem utilizadas apenas para a divisão das arestas dos poliedros de partida. Durante as construções, percebemos também relações inter-hierárquicas entre o octaedro regular e o arquimediano octaedro truncado construído, o octaedro truncado apresenta dois tipos de faces, faces que provém de truncaturas nas arestas do octaedro regular e faces que provém da eliminação de pirâmides. Além disso, o número das arestas em cada face do arquimediano obtido equivale ao dobro do número de arestas da face do poliedro de partida. Outra relação observada diz respeito ao número total de vértices do octaedro truncado, igual ao dobro de arestas do octaedro regular, visto que em cada aresta há dois pontos de truncatura, o que origina dois vértices no arquimediano obtido.

Dessa forma compreendemos que o *Cabri 3D* se confirmou como *habitat* para o estudo do octaedro truncado na medida em que reconheceu como objeto todos os saberes que determinam sua existência.

7. Algumas considerações

No decorrer de nossa pesquisa, identificamos que sólidos arquimedianos eram estudados em Desenho Geométrico, disciplina que dava suporte para que suas propriedades geométricas fossem exploradas por meio de suas construções. Contudo, com a substituição de

Desenho Geométrico por Educação Artística no currículo, esse conhecimento de ensino passou a não ser mais abordado. Nesse sentido, propusemo-nos a revisitar o sólido arquimediano octaedro truncado por meio de sua construção no *Cabri 3D*, considerando a possibilidade de tal estudo ser realizado nesse ambiente, favorecendo não só a representação de figuras espaciais como também suas manipulações, para facilitar a exploração, a elaboração de conjecturas e a validação ou refutação de resultados.

Durante a construção do octaedro truncado no *Cabri 3D*, percebemos algumas vantagens em se trabalhar em um ambiente dinâmico, uma vez que a partir de uma única construção, um número arbitrário de experimentações pode ser efetuado, o que seria praticamente impossível com régua e compasso. Isso não só facilita a construção de poliedros, mas também favorece a visualização sob vários pontos de vista.

Observamos, também, que o *Cabri 3D* é um ambiente favorável para o estudo do objeto matemático sólidos arquimedianos, em especial do octaedro truncado, uma vez que reconhece todos os saberes que determinam a sua existência. Além disso, entendemos que o ambiente de Geometria *Dinâmica Cabri 3D* é um *habitat* bem mais propício para o estudo do octaedro truncado do que aquele estabelecido pela disciplina Desenho Geométrico quando contemplava o currículo de Matemática, nos conduzindo a levantar a hipótese de que pode ser utilizado em salas de aula do Ensino Médio para enriquecer o estudo de sólidos geométricos que hoje se reduz a focar o cálculo das medidas de volume e de área da superfície de apenas alguns poliedros e corpos redondos.

8. Referências

ALMEIDA, T. C. S.; SILVA, M. J. F. . O Cabri 3D como habitat para o estudo dos Sólidos de Arquimedes. In: VI Congresso Iberoamericano de Cabri, 2012, Lima. Anais do VI Congresso Iberoamericano de Cabri. Lima: ACTAS, 2012. v. 6. p. 202-211.

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

ARTAUD, M.. Introduction à L'aproche écologique du didactique, L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. **Actes de la neuvème École d'Éte de didactique dês mathématiques.**Houlgate: Bailleul, 1998, p. 101-139.

BRASIL, Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Fundamental – Artes. Brasília, 1997.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC/SEMT, 1999.

CARVALHO, B. de A. **Programa de Desenho para a primeira e segunda séries ginasiais.** São Paulo: SP, 1960.

CHEVALLARD, Y. **La transposición didáctica: Del saber sábio ao saber enseñado**. Trad. Claudia Gilman, Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 1991.

FIELD, J. V.: Rediscovering the Archimedean Polyhedra: Piero della Francesca, Luca Pacioli, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer, Daniele Barbaro, and Johannes Kepler. **Archive for History of Exact Sciences**50 (1997), 241–289.

FREIRE, O. **Primeira Noções de Geometria Prática**. São Paulo: SP, 1897.

KALLEF, A. M. **Vendo e entendendo poliedros:** do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças e outros materiais concretos. EdUFF, 1998.

PAPPUS. **Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fredericus Hults**. Tradução Weidmannos: Berolini, 1876-1878.

RABELLO, P. S. B. Ensino de geometria descritiva no Brasil. **Ciência Hoje**. Niterói, v.37, n. 221, p.49-51, Nov., 2005.

SANGIACOMO, L.. **O processo da mudança de estatuto: de desenho para a figura geométrica. Uma engenharia didática com o auxílio do Cabri-Géomètre. Dissertação de Mestrado**. PUC-SP. São Paulo, 1996.

VELOSO, E.. **Geometria: temas atuais: materiais para professores** (Desenvolvimento curricular no ensino secundário; 11). Ed. Instituto de Inovação Educacional. Portugal, 1998.

ZUIN, E.S.L. **Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática para o 3º e 4º ciclos do Ensino Fundamental e o ensino de construções geométricas, entre outras considerações.** In: XV Reunião Anual da ANPED (Associação Nacional de Pesquisa e Pós-Graduação em Educação), 2002, Caxambu, Minas Gerais. Anais da XV Reunião Anual da Anped (CD-ROM), 2002.