PARA QUE SERVEM OS NÚMEROS IRRACIONAIS? INDO ALÉM DAS FÓRMULAS DE PERÍMETROS, ÁREAS E VOLUMES

Graziele Souza Mózer
Colégio Pedro II
gramozer@gmail.com

Humberto José Bortolossi
Universidade Federal Fluminense
hjbortol@vm.uff.br

Resumo:
No Ensino Básico, a justificativa apresentada para o estudo dos números irracionais se apoia principalmente no fato de que esses números aparecem em fórmulas para o cálculo de perímetros, áreas e volumes e com soluções de equações. Neste minicurso mostraremos como dar um enfoque diferente ao ensino de números irracionais: exploraremos situações onde algo interessante e não óbvio acontece porque um determinado número é irracional. Esperamos que esta nova perspectiva que articula números irracionais com problemas em geometria seja útil aos colegas professores e aos alunos de licenciatura em Matemática interessados no ensino e na aprendizagem de números irracionais.
Palavras-chave: Números Irracionais; Ensino e Aprendizagem em Matemática; GeoGebra; Geoplano; Epiciclos.

1. Introdução

Os números irracionais são apresentados aos estudantes bem cedo, geralmente no 8º ano do Ensino Fundamental, quando há a necessidade de se ampliar os conjuntos numéricos para abordar certos conteúdos da Matemática: o Teorema de Pitágoras e suas aplicações, o cálculo do perímetro e da área de círculos e soluções de equações quadráticas. O assunto é normalmente retomado no 1º ano do Ensino Médio por conta do estudo das funções reais elementares que fazem parte do currículo deste ano.

Várias pesquisas têm apontado para a dificuldade de se ensinar e aprender esse assunto na Escola Básica e nos cursos de formação de professores de Matemática ((FERREIRA & BARROS, 2012), (POMMER, 2012), (SANTOS, 2007), (SOUTO, 2010)). Neste cenário, um erro frequente detectado entre os alunos, por exemplo, é o de eles que π é igual a 3,14 e que $\sqrt{3}$ é igual a 1,73. Afinal, ao calcularem perímetros, áreas e volumes, o que geralmente se faz, no final, é substituir π e $\sqrt{3}$ é por suas aproximações mais conhecidas com uma ou duas casas decimais após a vírgula. Em resumo, o fato é que os alunos não se deparam com situações onde eles precisem usar que um determinado número ($\sqrt{3}$, por exemplo) é irracional.

Em vez de relacionar números irracionais com cálculos de perímetros, áreas e volumes ou soluções de equações como costumam fazer muitos livros didáticos, neste minicurso procuramos dar um enfoque diferente aos números irracionais: apresentamos vários exemplos onde algo interessante e não óbvio acontece porque um determinado número é irracional. Esperamos que esta nova perspectiva que articula números irracionais com problemas em aritmética, combinatória e geometria seja útil a colegas professores do Ensino Básico e a alunos de licenciatura em Matemática interessados no ensino e na aprendizagem de números irracionais.

2. Números Irracionais e Geoplanos

O geoplano (geoboard em inglês) é uma ferramenta de manipulaçãao para o ensino de geometria inventado pelo matemático e educador egípcio Caleb Gattegno (1911-1988). Ele é constituído por uma placa, geralmente retangular, de madeira ou isopor, com pregos fixados, em torno dos quais se enrolam elásticos coloridos de borracha, o que permite modelar polígonos cujos vértices são representados pelos pregos.

O geoplano tem sido usado no ensino de perímetros, áreas, semelhança e congruência de polígonos, ângulos, transformações geométricas, simetrias e muitos outros assuntos. Entre as atividades clássicas sugeridas para o geoplano está investigar quais são os tipos de triângulos que podem ser construídos com ele. Uma versão virtual do geoplano construído com a ajuda do software GeoGebra (que pode ser executada em tablets e smartphones) está disponível no endereço <http://tube.geogebra.org/material/simple/id/1913739> (Figura 1).

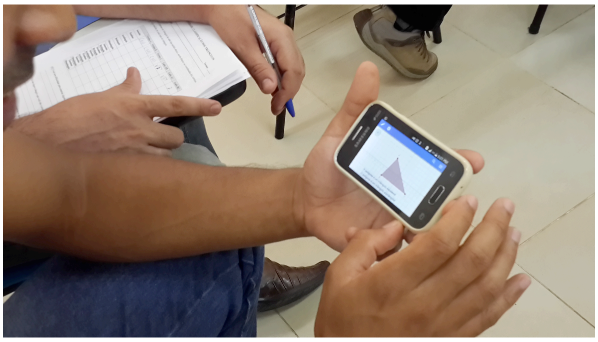


Figura 1: Modelo virtual do geoplano no GeoGebra para dispositivos móveis.

Na primeira parte do minicurso, seguindo um roteiro de atividades disponível no endereço <http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2016.1/enem/geoplanos.rtf>, espera-se que os participantes, usando seus próprios celulares e tablets, verifiquem se é possível ou não construir no geoplano um triângulo retângulo isósceles, um triângulo retângulo escaleno, um

ISSN 2178-034X

triângulo acutângulo isósceles, um triângulo acutângulo escaleno, um triângulo obtusângulo isósceles e um triângulo obtusângulo escaleno. Para cada triângulo, os participantes devem anotar as coordenadas inteiras dos vértices e as medidas dos lados. O conjunto de atividades termina com a pergunta: é possível construir um triângulo equilátero no geoplano? Note que o geoplano pode ser modelado através de uma malha quadrada, isto é, através do conjunto de pontos do plano cartesiano da forma (i, j), com i e j inteiros. Assim, em termos matemáticos, perguntar se é possível construir um triângulo equilátero no geoplano é equivalente a perguntar se existe triângulo equilátero com coordenadas inteiras. A resposta a esta pergunta é não e isto porque $\sqrt{3}$ é um número irracional. Aqui está uma justificativa usando apenas áreas: suponhamos, por absurdo, que seja possível construir um triângulo equilátero ABC com coordenadas inteiras: $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ e $C = (x_C , y_C)$ com x_A, y_A, x_B, y_B, x_C e y_C números inteiros. Sejam ℓ a medida dos lados desse triângulo equilátero, $CDEF$ o retângulo com vértices $D = (x_A, y_C)$, $E = (x_A, y_B)$ e $F = (x_C, y_B)$ e a, b, c, d, e e f as medidas dos segmentos CF, FB, BE, EA, AD e DC, respectivamente (Figura 2).

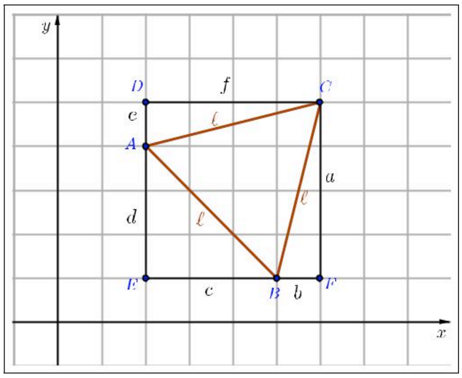


Figura 2: Não existe em R^2 triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras.

Observe que a, b, c, d, e e f são números inteiros por se tratarem de diferenças de números inteiros (isto é, diferenças das coordenadas de A, B, C, D, E e F). Temos também que a área do retângulo $CDEF$ é um número inteiro por tratar-se de um produto de números inteiros (af). Denotemos por S_{ABC} a área do triângulo ABC. Observe que $S_{ABC} = S_{EDCF} - (S_{BFC} + S_{AEB} + S_{ADC})$. Assim, $\ell^2\sqrt{3}/4 = af - (ab/2 + cd/2 + ef/2)$, de modo que $\ell^2\sqrt{3} = 4af - 2(ab + cd + ef)$. Note que o lado direito dessa equação é um número inteiro por tratar-se de somas e produtos entre inteiros. Temos também que ℓ^2 é um número inteiro, uma vez que $\ell^2 = a^2 + b^2$. Daí, concluímos que

$$\sqrt{3} = \frac{4af \quad 2(ab + cd + ef)}{2}$$

é um número racional, o que é um absurdo! Portanto, não existe em R^2 triângulo equilátero com vértices com coordenadas inteiras.

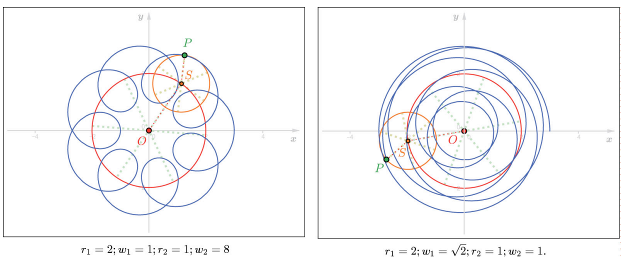
3. Números Irracionais e Epiciclos

A segunda classe de atividades que iremos trabalhar no minicurso se refere aos movimentos epiciclos, os quais têm relação com os espirógrafos que desenham curvas por meio do movimento combinado de círculos (Figura 3).

Figura 3: Um espirógrafo.

Mais precisamente, em termos matemáticos, dizemos que um ponto P descreve um movimento epicíclico se sua posição ao longo do tempo pode ser descrita pela combinação de dois movimentos circulares uniformes da seguinte maneira: o ponto P descreve um movimento circular com velocidade angular constante w_2 sobre uma circunferência C_2 de raio $r_2 > 0$ e centro S, e o ponto S, por sua vez, descreve um movimento circular com velocidade angular constante w_1 sobre uma circunferência C_1 de raio $r_1 > 0$ e centro em O. Supondo, sem perda de generalidade, que $O = (0, 0)$ e que, no *instante* $t = 0$, $S = (r_1, 0)$ e $P = (r_1 + r_2, 0)$, a posição $(x(t), y(t))$ do ponto P, em função do tempo t, é dada pelas expressões da Figura 3.

$$(*)\quad \begin{aligned} x(t) &= r_1 \cos(w_1 t) + r_2 \cos(w_2 t) \\ y(t) &= r_1 \operatorname{sen}(w_1 t) + r_2 \operatorname{sen}(w_2 t) \end{aligned}$$



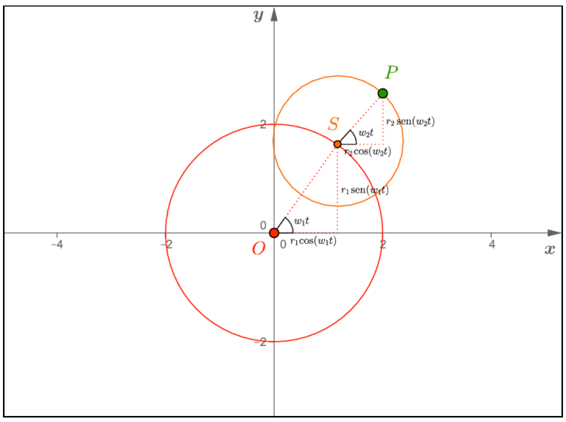


Figura 3: Equações e exemplos de movimentos epicíclicos.

ISSN 2178-034X

Dependendo das escolhas dos parâmetros r_1, r_2, w_1 e w_2, diversos tipos de curvas podem ser produzidas (Figura 3). Por meio de um aplicativo do GeoGebra (<http://tube.geogebra.org/material/simple/id/1923949>) e seguindo um roteiro de atividades (<http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2016.1/enem/geoplanos.rtf>), iremos investigar sob quais condições o movimento epicíclico é periódico, isto é, para quais valores dos parâmetros r_1, r_2, w_1 e w_2 existe $T > 0$ tal que $x(t + T) = x(t)$ e $y(t + T) = y(t)$ para todo t real (Figura 4).

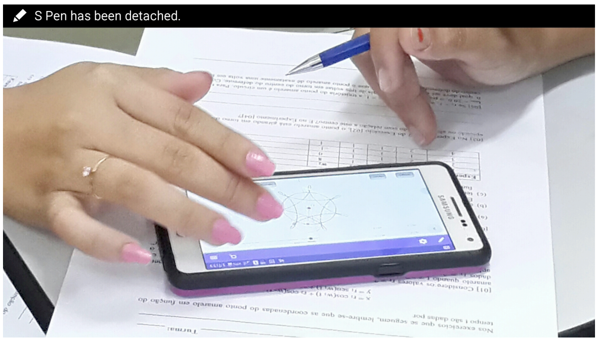


Figura 4: Estudando movimentos epicíclicos com o GeoGebra em dispositivos móveis.

De fato, chegaremos ao seguinte resultado: um movimento epicíclico descrito pelas equações descreve uma trajetória periódica se, e somente se, $w_2 = 0$ ou a razão w_1/w_2 é um número racional caso $w_2 \neq 0$. Este fato pode ser provado usando identidades trigonométricas conhecidas dos alunos do Ensino Médio (MÓZER, 2013).

4. Considerações Finais

No minicurso, o participante poderá explorar duas aplicações dos números irracionais que vão além das fórmulas de perímetros, áreas e volumes: (1) a impossibilidade de se construir um triângulo equilátero no geoplano, propriedade que se segue do fato de $\sqrt{3}$ ser um número irracional e (2) um movimento epicíclico não é periódico se, e somente se, a razão w_1/w_2 é um número irracional. Nestes contextos, o fato dos números serem irracionais (isto é, de não poderem ser escritos como a divisão de dois números inteiros) é usada de forma fundamental!

A tecnologia desempenha um papel importante: (1) o uso de dispositivos móveis (smartphones e tablets) permite que o trabalhado seja feito dentro da própria sala de aula; (2) o aplicativo virtual do geoplano classifica em tempo de execução os triângulos formados pelo usuário e, assim, este pode conferir se obteve o triângulo solicitado no roteiro de atividades e (3) sem tecnologia, seria muito difícil traçar as curvas dos movimentos epiciclicos.

Enquanto a atividade do geoplano é acessível aos alunos do Ensino Fundamental II, a atividade dos epiciclos aos alunos do Ensino Médio, existem ainda outras situações, acessíveis aos alunos da licenciatura em Matemática, onde algo interessante e não óbvio ocorre porque um determinado número é irracional. Para o leitor interessado, indicamos Mózer (2013).

5. Referências

FERREIRA, M. L.; BARROS, R. A. *Análise Real nos Cursos de Licenciatura: A Necessidade de Uma Nova Abordagem para O Ensino de Números Irracionais.* Terceiro Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Universidade Federal do Ceará, 2012.

MÓZER, G. S. *Para que Servem Os Números Irracionais? Manifestações em Aritmética, Combinatória e Geometria*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2013.

POMMER, W. M. *A Construção de Significados dos Números Irracionais no Ensino Básico: Uma Proposta de Abordagem Envolvendo Os Eixos Constituintes dos Números Reais.* Tese de Doutorado, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2012.

RIPOLL, C. C. *Mal Ditas Frases Encontradas em Livros Didáticos de Matemática para A Escola Básica*. Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2011. Disponível em: <http://www.mat.ufrgs.br/~fundamentos1/Mal_ditas.pdf>. Acesso: 12 fev. 2016.

SANTOS, J. C. *Números Reais: Um Desafio na Educação Básica*. Curso de Especialização para Professores do Ensino Fundamental e Médio, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal Fluminense, 2007. Disponível em: <http://www.professores.uff.br/wmrezende/uploads/Monografia_Real.pdf>. Acesso em: 12 fev. de 2016.

SOUTO, A. M. *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica*. Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Instituto de Matemática Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2010. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/22AlexandreMachado.pdf>. Acesso em: 12 fev. de 2016.

ISSN 2178-034X