REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS DE PRODUTOS NOTÁVEIS: EM EUCLIDES E NOS DIAS ATUAIS

Larissa Correa[1]
UTFPR-CM
llaarissacorrea@hotmail.com

Ana Carolina Lopes de Melo[2]
UTFPR-CM
anaa.caroliina.lm@gmail.com

Claudete Cargnin[3]
UTFPR-CM
cargnin@utfpr.edu.br

Silvia Teresinha Frizzarini[4]
UDESC-Joinville
stfrizzarini@hotmail.com

Resumo:
Esse artigo é parte de uma reflexão originária de um projeto de pesquisa PIBIC-EM. Apresentamos os registros de representação semiótica para os produtos notáveis chamados de quadrado da soma e da diferença, constantes em “Os Elementos” e em livro didático usado atualmente. É uma pesquisa bibliográfica que busca analisar, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, os tipos de registros utilizados para o tema nos dois contextos citados. Observou-se que a representação em língua natural se manteve, embora com uma linguagem atual mais acessível, entretanto, a representação figural (ou geométrica) de “Os Elementos” deu lugar à representação algébrica nos dias atuais. No livro didático atual analisado, a representação figural tem destaque apenas na introdução ao tema. Conclui-se que o uso concomitante, e intensivo, dos registros de representação em língua natural, geométrica e algébrica, favorece a aprendizagem relativa aos produtos notáveis, contribuindo para a redução das dificuldades inerentes ao tema.

Palavras-chave: Produtos notáveis; representação semiótica; história.

1. Introdução

Para um melhor ensino e aprendizado nas salas de aula de Matemática, atualmente, várias pesquisas e métodos são desenvolvidos, a fim de suprir as necessidades dos alunos e professores. A maneira de cada professor ensinar um conteúdo varia, assim como a maneira

[1] Bolsista do Programa de Iniciação Científica (PIBIC-EM) Fundação Araucária/UTFPR.
[2] Participa voluntariamente do Programa de Iniciação Científica para o Ensino Médio na UTFPR, câmpus Campo Mourão.
[3] Professora do Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Ensino de Matemática da UTFPR-Londrina/Cornélio Procópio.
[4] Professora da Universidade Estadual de Santa Catarina e Colaboradora na pesquisa.

pela qual o

aluno compreende a matéria que lhe é ensinada. Assim, a necessidade de se trabalhar de diversos modos um mesmo conteúdo em sala de aula é de extrema importância. Isso pode ajudar cada aluno a extrair a informação desejada, visto que nem todas as mentes pensam igual e que cada pessoa precisa trabalhar de maneiras diferentes para o seu aprendizado. Pensando nisso, estamos desenvolvendo uma pesquisa, no âmbito PIBIC-EM (Iniciação Científica – Ensino Médio), visando a elaboração de uma sequência didática para o ensino dos produtos notáveis que envolva essas "diferentes maneiras" de ensinar e aprender, as quais são contempladas, no nosso estudo, com a diversificação de registros de representação semiótica. É parte desse projeto o que está aqui apresentado.

Em relação aos conteúdos sobre produtos notáveis, é possível que os primeiros registros na história estejam no livro "Os Elementos", de Euclides (aproximadamente 325-270 a.C.), onde o autor relata os produtos "quadrado da soma" e "produto da soma pela diferença" por meio da Geometria, uma representação semiótica figural, e da linguagem natural, o que indica, a nosso ver, a possibilidade de uma pluralidade de representações desde aquela época.

Duval (2009) reforça que o acesso ao saber matemático se dá pela diversidade de representações semióticas, devido à natureza abstrata dos objetos de estudo. Além disso, importa realizar tratamentos e conversões entre tais diferentes representações, pois ao realizá-los, significa que o aluno está apto a passar de um registro de representação para outro, o que prova, segundo Duval, que o aluno conseguiu entender o conteúdo e é capaz de remontá-lo, manipulá-lo e trabalhar com ele em outros contextos, havendo então a sua compreensão significativa.

O interesse em pesquisar sobre produtos notáveis surgiu ao perceber a dificuldade de colegas em sala e também de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear; áreas da Matemática que usam os produtos notáveis como ferramenta. Como estudantes, acreditamos que utilizar diferentes formas de representação de um mesmo objeto pode ajudar muito no processo de aprendizado durante as aulas de Matemática. Ao oferecer diversas estratégias, possibilidades e caminhos a serem seguidos, teremos uma fonte de busca maior para sanar nossas dúvidas e até mesmo entender o conteúdo de maneiras diferentes, dando flexibilidade na maneira de pensar para internalizar o conhecimento, além de apreender esses conhecimentos da maneira como pensamos; ao contrário de apenas decorar o que lhe é passado, como geralmente acontece.

Nesse artigo, expomos os resultados de uma pesquisa bibliográfica realizada com o intuito de compreender as conversões entre as representações dos estudos sobre produtos notáveis, ao longo do seu desenvolvimento histórico. Sucintamente, apresentamos alguns pontos importantes da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Duval (2003), que embasaram as análises apresentadas.

2. Teoria de Duval e tipos de registros

Raymond Duval é autor da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A partir dessa teoria, muitas pesquisas da Educação Matemática foram elaboradas sobre o tema. Em seu livro, é fornecida uma definição sobre o que são as representações semióticas: “[...] produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações os quais têm suas dificuldades próprias de significado e funcionamento”. (DUVAL, 1993, p.39).

A matemática como ciência, não possui objetos de estudos que são palpáveis, ou que podemos facilmente enxergar, portanto representá-los é a forma de acessá-los e compreendê-los. Duval (2003) argumenta:

> [...] diferentemente dos outros domínios do conhecimento científico, os objetos matemáticos não são jamais acessíveis perceptivelmente ou microscopicamente (microscópio, telescópio, aparelhos de medida, etc.). O acesso aos objetos passa necessariamente por representação semiótica. Além do que, isso explica por que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversificação de registros de representação. (DUVAL, 2003, p.21)

De acordo com a teoria de Duval, quando conseguimos diversificar os registros de representação para representar um mesmo objeto de estudo, estaremos realmente construindo o conhecimento. O autor ressalta que a representação de um objeto nunca pode ser confundida com o objeto de estudo em si, entretanto, o uso de apenas um tipo de registro de representação, por exemplo, no presente caso, do registro algébrico para produtos notáveis, pode dificultar essa tarefa de diferenciação.

Ainda, segundo a teoria de Duval, as atividades cognitivas de conversão e tratamento entre os diferentes tipos de representação são fundamentais para compreender os conceitos matemáticos. Realizar a conversão da representação consiste em transformar o tipo de representação utilizado em outro, mantendo o objeto de estudo o mesmo. No contexto desta pesquisa, isso acontece quando convertemos uma representação geométrica para uma fórmula, como mostrado na Figura 1.

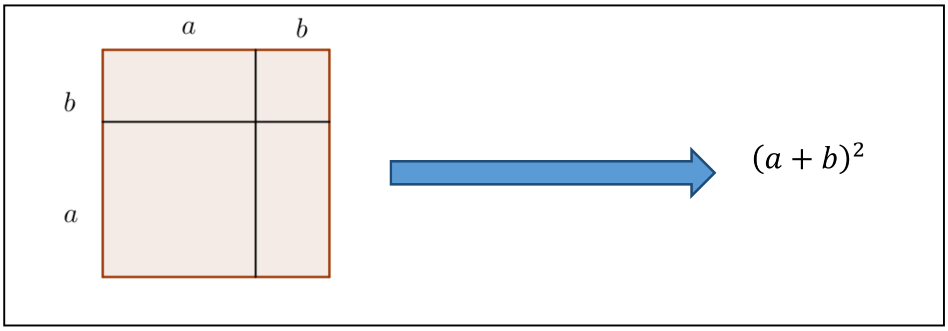


Figura 1: Exemplo de Conversão da representação figural em representação algébrica, envolvendo produtos notáveis.

Fonte: as autoras.

Já o tratamento se baseia na transformação de representação mantendo o mesmo registro de representação, por exemplo, realizar os cálculos e alterações possíveis, como mostrado na Figura 2.

$$(a+b)^2 \longrightarrow a^2 + 2ab + b^2$$

Figura 2: Exemplo de tratamento algébrico em produtos notáveis

Fonte: as autoras.

Os tipos de registro de representação semiótica apresentados pelo autor são: a linguagem natural, representação algébrica, representação gráfica ou figural. A linguagem natural implica no uso da linguagem falada ou escrita na língua vernácula do aluno para representar os objetos de estudos, como uma explicação sobre eles. A representação algébrica se dá na maior parte das vezes no uso de números e letras. A representação gráfica ou figural é uma forma de expressar, visualmente, dados, valores numéricos ou expressões algébricas do que precisa ser trabalhado.

3. Produtos notáveis: de Euclides aos dias de hoje

O livro "Os Elementos" foi escrito por Euclides (325-270 a.C.), matemático de origem provavelmente grega. Esta obra reúne muitas proposições, conceitos e explicações fundamentais da geometria. Foi amplamente usado ao longo da história para realizar estudos sobre geometria, usado até mesmo nos dias atuais sua forma de transmitir a geometria.

Justificado pela situação histórica da época em que o livro foi escrito, grande parte das proposições apresentadas no livro se sustentam em relações geométricas, que se caracterizam como uma álgebra geométrica. Os gregos, então, tinham um grande avanço geométrico e se firmavam na geometria para representar o que não conseguiam por meio da pura álgebra. Assim, as operações aritméticas eram representadas por construções geométricas.

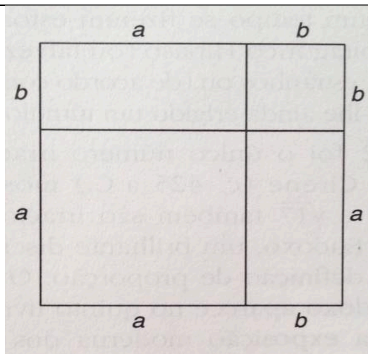
O livro está separado em cinco partes, as quais abrangem diferentes áreas da geometria. Entre essas, encontram-se representações em língua natural e figural a respeito de produtos notáveis, provavelmente um dos primeiros registros sobre o tema: as proposições IV e V.

Analisemos a proposição IV. Lembramos inicialmente que a reta em " Os Elementos" representa o que atualmente chamamos de segmento de reta. No quadro 1 apresentamos representações na língua natural e figural encontradas em " Os Elementos", juntamente com a representação algébrica, acrescentada por nós, que pode caracterizá-la. Aqui, observam-se dois tipos de conversões: RLN $\rightarrow RF$ e RF$\rightarrow RA$, em que RLN – é a representação em Língua Natural, RF é a Representação Figural e RA é a Representação Algébrica. Embora seja mais difícil, é possível ainda incluir a conversão RLN $\rightarrow RA$.

Observe, no Quadro 1, que as partes às quais estão referidas no livro Euclides são os segmentos a e b. O quadrado maior é designado pelos lados $(a + b)$. *Soma dos quadrados sobre as partes* refere-se, na representação figural, à soma das áreas dos quadrados de lados a e b, respectivamente, isto é, $a^2 + b^2$. Por fim, *o dobro do retângulo contido pelas partes* refere-se aos dois retângulos de dimensões $a \times b$.

Quadro 1: Possíveis Representações da Proposição IV, Livro II de Euclides.

Conversão RLN para RF *Conversão RF para RA*

Representação em língua natural	Representação figural	Representação Algébrica*
Dividindo-se uma reta em duas partes, o quadrado sobre a reta toda é igual à soma dos quadrados sobre as partes juntamente com o dobro do retângulo contido pelas partes		$(a\ +\ b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Conversão RLN para RA

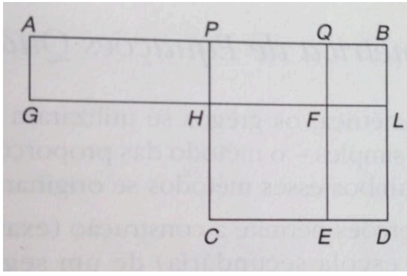
(*) não contemplada em “os Elementos”.

Fonte: as autoras.

Vejamos a proposição V do livro II, de “Os Elementos”. Observe-a, juntamente com as possíveis conversões presentes, no Quadro 2.

Quadro 2: Possíveis Representações da Proposição V, Livro II de Euclides.

Conversão RLN para RF　　*Conversão RF para RA*

Representação em língua natural	Representação figural	Representação Algébrica*
Dividindo-se uma reta em partes iguais e desiguais, o retângulo contido pelas partes desiguais, junto com o quadrado sobre a reta entre os pontos de secção é igual ao quadrado sobre a metade da reta dada		$(a + b)^2 = 2ab + b^2 + a^2$ Sendo $a = \overline{PQ}$, $b = \overline{QB}$

Conversão RLN para RA

(*) não contemplada em "os Elementos".

Fonte: As autoras.

Vamos entender a proposição V. Sejam o segmento $\overline{PQ} = a$ e $\overline{QB} = b$. Consideremos, $\overline{PB} = \overline{BD}, \overline{QB} = \overline{BL}$.

Vamos associar a representação em língua natural com a descrição da representação figural em Euclides. Observe o Quadro 3.

Quadro 3: Interpretação sobre a representação em língua natural da proposição V de "Os Elementos".

Trecho da proposição	Interpretação das autoras
Dividindo-se uma reta em partes iguais e desiguais	O ponto P divide o segmento AB ao meio, isto é, em partes iguais. O ponto Q divide o segmento AB em partes desiguais.
o retângulo contido pelas partes desiguais	Refere-se à área dos retângulos PQFH e FLDE, ou seja, $2ab$
o quadrado sobre a reta entre os pontos de	Refere-se aos quadrados de lados a e b, isto

secção	é, às áreas a^2 e b^2
é igual ao quadrado sobre a metade da reta dada	$a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2$

Fonte: as autoras.

Uma outra interpretação possível para a representação figural presente no Quadro 3 (vide Figura 3) é apresentada na Figura 4.

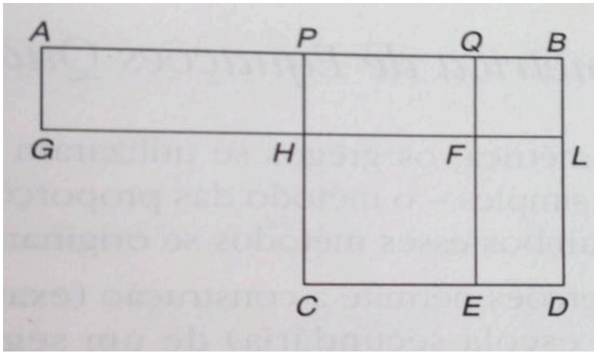


Figura 3: Representação figural associada à proposição V.

Sejam $\overline{AP} = \overline{PB} = \overline{BD} = \overline{PC} = a$ e $\overline{QB} = \overline{BL} = b$.

Consideremos o retângulo ABDI conforme a Figura 4. Temos as seguintes áreas:

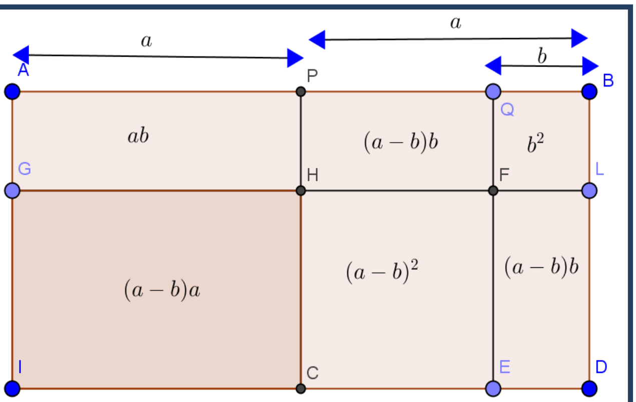


Figura 4: interpretação da proposição V de Os Elementos

Fonte: as autoras.

Observe que a área total do retângulo $ABDI$ é dada por $2a^2$ (I). Por outro lado, a área do polígono ABDCHG, retratado na proposição V, é: $2a^2 - (a-b)a$ (II).

Entretanto, a área do polígono ABDCHG também pode ser escrita como sendo:

$$ab + 2(a-b)b + b^2 + (a-b)^2 \ (III)$$

Como (II) e (III) representam uma mesma área, devemos ter:

$$2a^2 - (a-b)a = ab + 2ab - 2b^2 + b^2 + (a-b)^2$$

$$2a^2 - a^2 + ab - 3ab + b^2 = (a-b)^2$$

De onde vem que

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Nestas duas proposições, no livro de Euclides, encontramos o uso de dois diferentes tipos de linguagem de representação para os produtos notáveis que são a linguagem natural e a figural. Podemos perceber que a explicação feita no livro de Euclides usando a linguagem natural, foi complexa, porém muito precisa. Ele não simplesmente citou a leitura da fórmula matemática para os produtos, mas sim, forneceu um caminho para a construção dos mesmos. Ele usou das palavras para representar uma figura, uma imagem e, por meio dela, expressar uma propriedade matemática. Ou seja, com esse método de explicação, em "Os Elementos" de Euclides, realizou-se a conversão entre dois diferentes registros de representação para se tratar de uma mesma proposição.

Por ser uma obra de sistematização da geometria, no livro de Euclides utiliza-se argumentos geométricos, aliados à retórica, para mostrar as propriedades matemáticas. Devido à complexidade da representação em língua natural observada em "os Elementos", analisamos como alguns livros didáticos que ainda são usados como referências para professores utilizam esse tipo de representação para o caso $(a+b)^2$.

Analisamos Souza e Pataro[5] (2009, p.120-121). Os autores usam a língua natural para justificar geometricamente a representação algébrica para a fórmula $(a+b)^2$, como pode ser observado na Figura 5. Entretanto, a representação em língua natural é bem mais simples do que a apresentada em "Os Elementos".

[5] A escolha deveu-se ao fato dele ser usado como livro-texto na região das autoras do artigo e pela semelhança em relação ao tratamento dado ao tema a outros autores como Iezzi, Dolce e Machado (2009), usado como material de apoio aos professores.

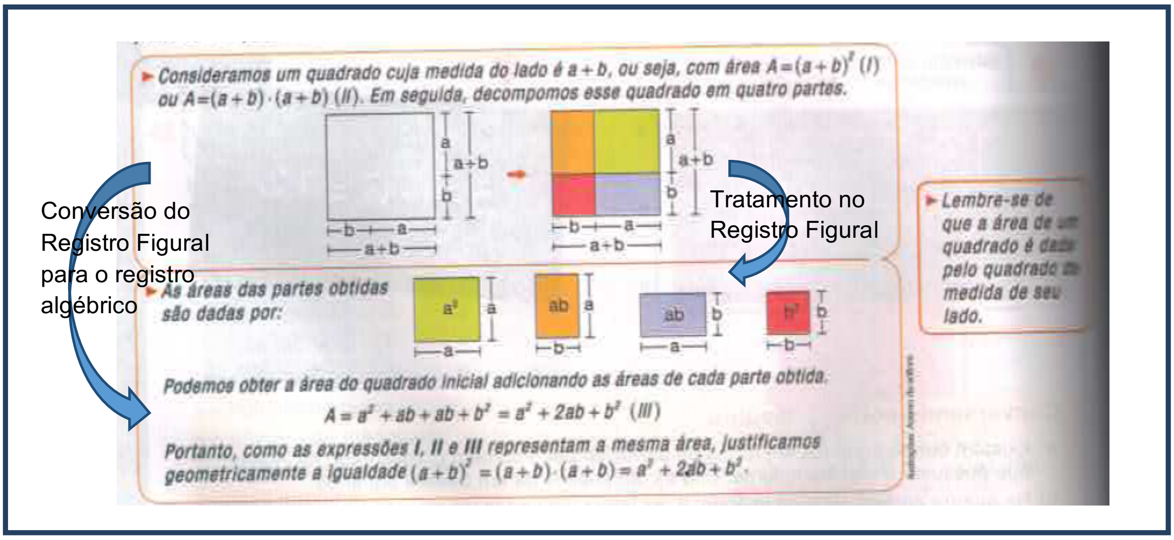


Figura 5: Representação de $(a+b)^2$.

Fonte: Souza e Pataro (2009, p.120).

Na apresentação do tema por Souza e Pataro (2009), observamos a presença de tratamento (no registro figural) e de conversão (do registro figural para o registro algébrico). Na obra em análise, percebemos que ambos os registros (figural e algébrico) se distribuem uniformemente, inclusive nos exercícios.

Da mesma forma, os autores tratam o quadrado da diferença. Observe a Figura 6.

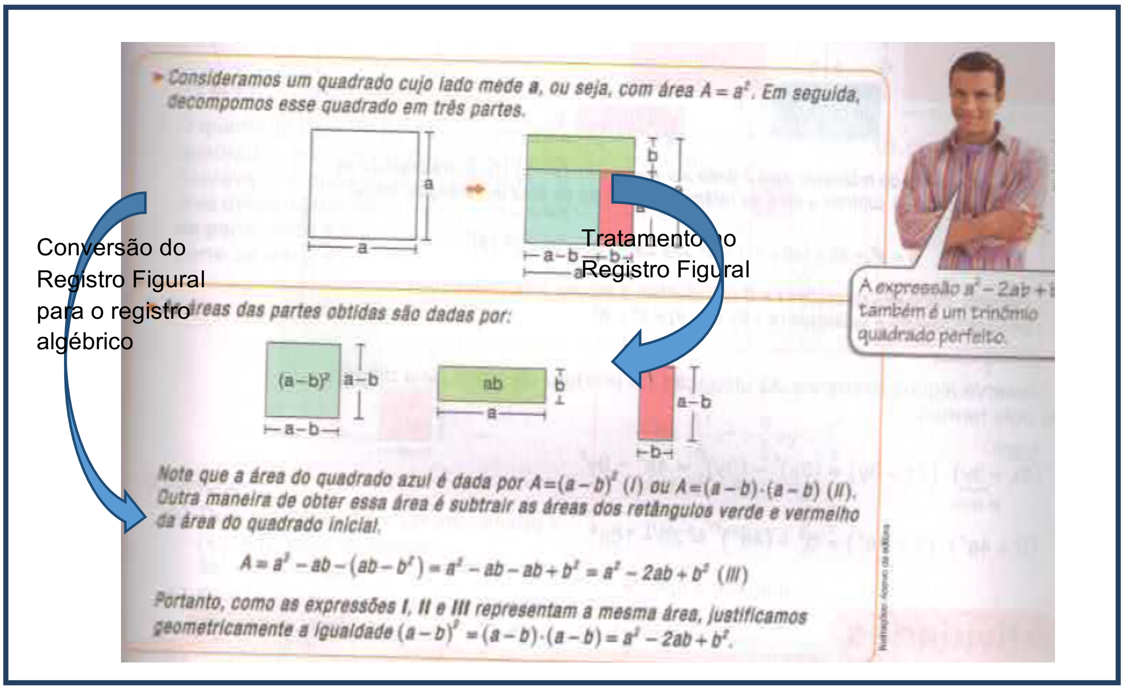


Figura 6: Representação de $(a-b)^2$.

Fonte: Souza e Pataro (2009, p.121).

4. Considerações Finais

Por meio das pesquisas bibliográficas realizadas, pôde-se confirmar a importância do uso de diferentes tipos de representações semióticas no estudo sobre produtos notáveis. No livro de Euclides, escrito por volta do século III a.C., identificamos conversão entre as representações em língua natural e geométrica, o que consideramos essencial para obter compreensão completa das proposições e raciocinar a respeito das construções realizadas, pois dá sentido e complementaridade ao objeto de estudo. A língua natural nos faz pensar e abstrair os conceitos, enquanto a representação geométrica nos permite confrontar nossa imagem mental com o conceito real.

Analisamos também que a conversão e tratamento de registros existem hoje em dia, porém a forma com que essas atividades de transformação de representação nos livros didáticos se apresentam mudou, se adequando à linguagem mais simples e atual. Além disso, vale ressaltar que, assim como na Grécia antiga havia predomínio da forma de representação geométrica, a qual havia maior afinidade, atualmente a forma algébrica de representação torna-se predominante e mais utilizada.

Concluímos que incentivar o conhecimento de diversos registros de representação e a capacidade de conversão entre eles auxilia o aluno a compreender melhor o objeto de estudo e torna-se útil para a internalização do mesmo.

5. Agradecimentos

Agradecemos a Fundação Araucária e UTFPR pela concessão de bolsa de Iniciação Científica Ensino Médio (PIBIC-EM).

6. Referências

DUVAL , R. **Registre de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée**. Annales de Didactique et Sciences Cognitives. Strasbourg: IREM – ULP, vol. 5, p. 37-65. 1993.

DUVAL, R. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática.** In: MACHADO, S. D.A. (Org.). Aprendizagem em matemática*:* registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, p.21, 2003.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora da UNESP, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, **A. Matemática e Realidade**. 8º ano. São Paulo: Atual, 2009.

SOUZA, J.; PATARO, P.M. **Vontade de saber Matemática**. 8º ano. São Paulo: FTD, Coleção Vontade de Saber, 2009.