# A FUNÇÃO LOGARÍTMICA EM LIVROS DIDÁTICOS BRASILEIROS

*Diogo Oliveira Soares*
*Universidade de São Paulo*
*mat.profdiogo@yahoo.com.br*

**Resumo**
Este artigo procura mostrar alguns resultados parciais sobre uma pesquisa de Mestrado, cujo objetivo é verificar como se deu a inserção e o desenvolvimento da função logarítmica nos livros didáticos brasileiros, procurando verificar as mudanças e permanências que ocorreram desde o século XIX até os dias atuais. Os livros didáticos de matemática foram analisados do período entre 1890 e 2014. Os resultados parciais sinalizam para a introdução da função logarítmica nos livros didáticos brasileiros a partir de 1893. Todavia, a função logarítmica vinculada às aplicações somente ocorre a partir da década de 1980, por exemplo, através dos problemas de juros compostos e dinâmica populacional.
**Palavras-chave:** função logarítmica; livro didático; História da Matemática.

## 1. Introdução

Com o advento das calculadoras e o avanço da tecnologia, nota-se que o logaritmo perdeu sentido no que se refere à sua aplicação como facilitador de cálculos. No entanto, hoje os logaritmos têm sua importância devido aos modelos matemáticos baseados nas propriedades da função logarítmica e de sua inversa, a exponencial. Podemos citar alguns desses modelos, como problemas de juros compostos, estudo quantitativo da relação entre a altura e frequência dos sons emitidos por notas musicais, a alcalinidade de uma solução química, o estudo dos níveis de intensidade sonora, dentre outros.

Assim, a pesquisa sobre o histórico da função logarítmica nos livros didáticos torna-se necessária, pois a partir dela poderá ser verificado porque é importante o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, o que mudou e o que permaneceu em relação às abordagens dos livros didáticos atuais e antigos, quais fatos importantes implicaram em tais mudanças e permanências e de que forma a história da função logarítmica na matemática influenciou nas concepções deste tema, extraídas dos livros didáticos brasileiros.

Desse modo, este artigo traz uma parte da pesquisa de dissertação[1], que está em processo de elaboração, do curso de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, pela Universidade de São Paulo, buscando responder a questão de como se deu a inserção e o desenvolvimento da função logarítmica nos livros didáticos brasileiros.

Ao longo do ano de 2015 até o momento, foi possível aprofundar algumas ideias do Trabalho de Conclusão de Curso[2] de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de São Paulo, elaborado em 2012 e intitulado *Logaritmos: Napier versus Dante*, no qual pudemos verificar o que permaneceu e o que mudou, tanto do ponto de vista matemático como didático, em relação à primeira obra sobre logaritmos, *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, publicada em 1614, por John Napier (1550-1617), e em relação ao livro didático de Luiz Roberto Dante, *Matemática: Contexto e Aplicações*, de 1999.

No presente trabalho, procuramos dar ênfase ao percurso da função logarítmica nos livros didáticos brasileiros, desde meados do século XIX até 2014. Inicialmente, apresentamos um breve esboço histórico sobre a função logarítmica na matemática e, desse modo, estabelecemos uma relação entre o histórico da função logarítmica na matemática e os livros didáticos brasileiros estudados.

## 2. A função logarítmica na História da Matemática

Conforme Boyer (1996) quando Napier concebeu a ideia dos logaritmos na sua obra Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio, em 1614, sua intenção era facilitar os cálculos extensos relacionados à Astronomia, Navegação e Comércio.

Contudo, em *Logaritmos: Napier versus Dante* (2012), vimos que na abordagem de Napier também estava implícita a ideia de função, que mais tarde seria muito útil no Cálculo Diferencial e Integral.

Segundo Maor (2008), em torno de 1640, trinta anos antes de Newton (1642-1727) e Leibniz (1646-1716)) estabelecerem a fórmula da área sob a curva $\mathbf{y = x^n}$ como parte de seu Cálculo Integral, Fermat (1601-1665) já conseguia a fórmula da área $\mathbf{A = \frac{a^{n+1}}{n+1}}$, para a curva $\mathbf{y = x^n}$, com n > 0, entre os pontos x = 0 e x = a, no eixo x. Posteriormente, com pequenas

[1] Trabalho sob a orientação da Profa. Circe Mary Silva da Silva Dynnikov

[2] Trabalho sob a orientação do Profº Henrique Marins

mudanças no seu método, ele demonstrou que a fórmula também vale para valores negativos atribuídos a *n*.

Porém, para a curva $y = x^{-1}$, temos n = - 1 que resulta em $A = \frac{a^{n+1}}{n+1} = \frac{a^0}{0}$, que é uma indeterminação, pois o 0 aparece no denominador.

Então, coube a um jesuíta belga que atendia pelo nome de Gregorius de Saint Vicent (1584-1667) notar que, para n = -1, enquanto as bases formam uma progressão geométrica, os retângulos usados na aproximação da área sob a hipérbole possuem áreas todas iguais.

Isso significa que, conforme a distância de 0 cresce geometricamente no eixo das abscissas, as áreas correspondentes crescem em incrementos iguais, ou seja, aritmeticamente. Portanto, a relação entre a área e a distância tem a mesma característica da tábua de logaritmos de Napier e, portanto, é logarítmica. Desse modo, um dos alunos de Saint Vicent, Afonso Anta de Sarasa (1618 – 1667), escreveu essa relação explicitamente, registrando uma das primeiras ocasiões em que se fez uso de uma função logarítmica, quando, até então, os logaritmos eram considerados principalmente uma ferramenta de cálculo.

Logo, se denotarmos por $A\,(t)$ a área sob a hipérbole, a partir de um ponto de referência fixo x > 0 (por conveniência geralmente escolhemos x = 1) até um ponto variável x = t, teremos $A(t) = \log t$, e assim o mistério da quadratura da hipérbole estava próximo de ser desvendado. Porém, uma questão permanecia aberta: “Qual será a base desse logaritmo que determina a área sob a hipérbole numericamente”?

Mais tarde, com o aprimoramento desses estudos, Newton e Leibniz puderam mostrar ao mundo que Saint Vicent estava certo, isto é, a relação entre a distância e a área é realmente logarítmica e, além disso, concluíram que a base procurada é o número $e$. Assim, a fórmula $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$ resolveu o “caso perdido”.

Agora, denotando-se a área sob a hipérbole por $A(x)$, teremos $A(x) = \ln x + c$. Se tomarmos o ponto inicial a partir do qual essa área será medida como x = 1, vem:

$$0 = \ln 1 + c \Leftrightarrow \ln 1 = -c \Leftrightarrow c = 0.$$

Portanto, a área sob a hipérbole $y = \frac{1}{x}$ de x = 1 a qualquer x > 1 é igual a $\ln x$.

A partir de então, os logaritmos tornam-se uma ferramenta útil ao Cálculo Diferencial e Integral e, além disso, observamos a aplicabilidade do logaritmo como expoente e função, o que não era evidente em 1614 quando Napier publicou a primeira obra sobre logaritmos.

Segundo Miguel e Miorim (2002), foi William Gardiner, no seu livro *Tables of Logarithms* (1742), quem forneceu a primeira exposição sistemática dos logaritmos concebidos como expoentes. Assim, foram transcorridos cerca de 140 anos, a partir do momento em que os logaritmos foram originalmente concebidos por Napier, antes da elaboração explícita de uma concepção estritamente algébrica dos mesmos como expoentes.

Embora possa parecer óbvia e natural aos leitores da atualidade, a ligação entre logaritmos e equação ou função exponencial demandou, historicamente, tempo e esforços para ser estabelecida.

Em 1748, Euler (1707-1783) em seu *Introductio in analysin infinitorum*, publicado em 1748, propôs uma classificação das funções em funções algébricas e funções transcendentes. Nesta última categoria, ele insere as funções exponenciais, as logarítmicas e outras, sem nome, que haviam surgido no campo do Cálculo Integral.

> The sections of the *Introductio* that were to have the most influence, however, dealt with the exponential, logarithmic, and trigonometric functions, for it is there that Euler introduced the notations and concepts that were to make obsolete all the discussions of such functions in earlier texts. All modern treatments of these functions are in some sense derived from those of Euler. Thus Euler defined exponential functions as powers in which exponents are variable and then – and this is a first – logarithms in terms of these. Namely, if $a^z = y$, Euler defined $z$ to be the logarithm of $y$ with base $a$. The basic properties of the logarithm function are then derived from those of the exponential (Katz, 1998, p.568).

Portanto, com a percepção de que os logaritmos poderiam, não só facilitar cálculos, mas também expressar analítica e quantitativamente fenômenos naturais envolvendo a variação de duas grandezas interdependentes, sua concepção torna-se, segundo Miguel e Miorim (2012), algébrica-funcional, pois o logaritmo é, a partir de então, visto como uma equação e como uma função.

Com isso, podemos verificar o histórico da função logarítmica nos livros didáticos brasileiros e estabelecer relações disto com o que foi apresentado até aqui.

### 3. Histórico da função logarítmica em livros didáticos brasileiros

Os estudos de Miguel e Miorim (2002) mostram que a inserção da Teoria dos Logaritmos estava presente, no século XIX, quase sempre no campo da Aritmética, com uma abordagem que tinha o objetivo de conceber os logaritmos simplesmente como facilitador de cálculos extensos.

Ao final do século XIX, os logaritmos são trabalhados entre os tópicos algébricos. Miguel e Miorim (2002, p. 13) afirmam que "a inserção dos logaritmos entre os tópicos algébricos está associada com a Reforma da Educação Brasileira proposta por Benjamin Constant, no Decreto n. 891de 8 de novembro de 1890".

A partir de então, de 1893 a 1912, o tema logaritmos passaria a ser tratado tanto no campo da Aritmética quanto no da Álgebra. Nota-se o logaritmo como o expoente de uma equação ou função exponencial, isto é, a partir de então os logaritmos também são tratados nos livros didáticos brasileiros sob a concepção algébrico-funcional.

Historicamente, o tratamento dos logaritmos tanto no campo da Aritmética quanto no da Álgebra já tinha ocorrido, conforme vimos anteriormente, com o desenvolvimento das ideias sobre função logarítmica, quando o logaritmo deixou de ser observado somente como facilitador de cálculos e passou a relacionar grandezas interdenpendentes, como, por exemplo, a área sob a curva da hipérbole.

Introduz-se, então, a partir de 1929, o tópico Função Exponencial, o qual será vinculado à Função Logarítmica, no Programa de Matemática para o Curso Fundamental, apresentado no decreto 19890, de 18 de abril de 1931, dentro da Reforma Francisco Campos, que teve influência do matemático alemão Félix Klein (1849 – 1925).

Assim, a concepção algébrico-funcional dos logaritmos, neste momento, focada no estudo da função logarítmica como inversa da função exponencial, torna-se parte integrante de todos os programas do que é o equivalente ao nosso ensino médio atual.

Em Roxo, Cunha, Peixoto e Netto (1944), notamos que os autores definem a função exponencial, mostram sua continuidade e determinam a função logarítmica como a inversa da exponencial, caracterizando a bijetividade das duas funções, segundo eles, por meio do exame da função exponencial e pela sua própria representação gráfica.

Os autores abordam a representação gráfica da função logarítmica, enfatizando a simetria entre os gráficos da função exponencial e logarítmica.

Seguindo esta abordagem, porém, com algumas diferenças no modo de expor o tema função logarítmica, Farah, Catunda e Castrucci (1949), primeiramente, definem o logaritmo como expoente, em seguida, definem a função logarítmica, ressaltando que ela e a exponencial são inversas uma da outra. Desse modo, os autores abordam a representação gráfica da função logarítmica, explorando a ideia da simetria e de quando ela é crescente ou decrescente.

Tanto Roxo, Cunha, Peixoto e Netto, (1944), como Farah, Catunda e Castrucci (1949), são exemplos de livros didáticos, publicados depois da reforma Francisco Campos, que tratam da Teoria dos Logaritmos, desde suas propriedades até as tábuas de logaritmos, depois da conceitualização da função logarítmica. Porém, essa abordagem não se manteve a partir da década de 1980.

A partir da segunda metade da década de 1960, por influência do Movimento da Matemática Moderna, de inspiração bourbakista, a concepção algébrico-funcional do logaritmo, visto tanto como operação inversa da potenciação quanto como função inversa da exponencial, passa a ser tratada de forma mais rigorosa e numa mesma série.

Além disso, as funções exponencial e logarítmica não mais aparecem diretamente conectadas nem com a teoria das progressões e nem com noções de Geometria Analítica e de Cálculo Diferencial e Integral, mas passam a ser tratadas em capítulo independente dos dois tópicos.

Depois de apresentar e desenvolver a função exponencial, Rocha, Barbosa e Neto (1967) retomam sua definição, utilizam sua representação gráfica para afirmar que, no caso $a > 1$, $f(x) = a^x$ é monotônica estritamente crescente e, para $0 < a < 1$, é monotônica estritamente decrescente.


ISSN 2178-034X

Com esse argumento, eles justificam que a função exponencial é bijetora e, por consequência, ela admite uma inversa, que é a função logarítmica.

Logo, no livro destes autores, a função logarítmica é definida e apresentada como inversa da exponencial, o que fica mais evidente quando os autores mostram, após a definição, a simetria entre os gráficos das duas funções $y = log_a x$ e $y = a^x$, em relação à reta de equação y = x.

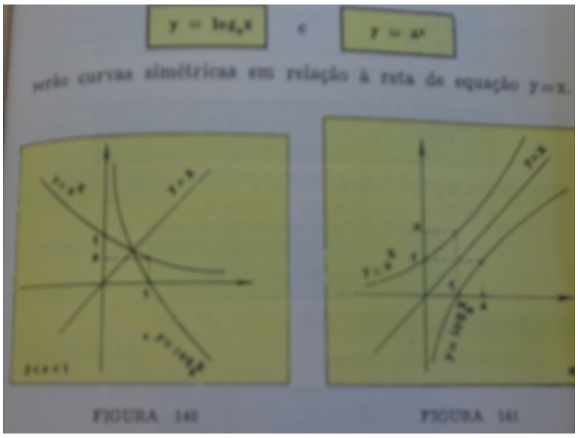


Figura 1 – Gráficos da função exponencial e logarítmica de 1967.
Fonte: Rocha, Barbosa e Neto,1967 p. 139.

Estes autores enfatizam a importância de se aprender logaritmos e apresentam uma contextualização histórica e social, na qual são citados Jonh Napier, Jobst Burgi (1552-1632) e Henry Briggs (1561-1639), ressaltando neste último a ideia de base decimal como a mais conveniente para se fazer cálculos aritméticos extensos.

Com isso, no segundo volume desta coleção, os autores retomam a ideia da função logaritmo-decimal, vista no primeiro volume, exploram a representação gráfica desta função e abordam os temas característica, mantissa e tábua de logaritmos.

No entanto, neste segundo volume, quando os autores tratam das aplicações dos logaritmos, não há nenhuma associação deste tema com a função logarítmica.

A partir de meados da década de 1980, as críticas ao Movimento da Matemática Moderna começam a se intensificar e novas tendências vêm a se configurar na Educação Matemática brasileira. Logo, o ensino de logaritmos passa por uma redefinição.

Entretanto, a concepção algébrico-funcional de logaritmo como função inversa da função exponencial continua dominante. Em tal abordagem, também continuam prevalecendo algumas características do período anterior tais como a total desvinculação dos logaritmos da teoria das progressões e do ensino de Cálculo Diferencial e Integral, tema este que não é mais incluído entre aqueles recomendados para o ensino médio.

Embora a orientação pedagógica de trabalho com os logaritmos presente na atual Proposta Curricular do Estado de São Paulo tenha reestabelecido a concepção aritmética dos logaritmos, esta orientação não é a que tem prevalecido nos livros didáticos brasileiros surgidos a partir da segunda metade da década de 90 até os dias de hoje, o que é possível verificar nos livros de Paiva (1999), Dante (1999), Iezzi, Dolce, Degenszajn, Périgo e Almeida (2004) e Moderna (2013).

## 4. Considerações finais

Alguns resultados parciais indicam que a função logarítmica passou a estar presente nos livros didáticos brasileiros a partir de 1893, depois da Reforma da Educação Brasileira proposta por Benjamin Constant, no Decreto nº 891 de 8 de novembro de 1890.

Porém, o ensino da função logarítmica passou a ser vinculado às aplicações de logaritmos somente a partir da década de 1980, através dos problemas de juros compostos e dinâmica populacional, por exemplo.

Antes da década de 1980, vimos que alguns autores tratavam a Teoria dos Logaritmos, desde suas propriedades até as tábuas de logaritmos, depois da conceitualização da função logarítmica.

Isso mostra a importância do ensino da função logarítmica em períodos anteriores à década de 1980, mas não evidencia seus aspectos utilitários, pois a aplicabilidade dos logaritmos, até este momento, não exigia o conhecimento das propriedades da função logarítmica, e sim propriedades de logaritmos, a fim de explorar o uso das tábuas e a conceitualização de característica e mantissa.

Atualmente, nos livros didáticos brasileiros, é muito raro a abordagem em que são utilizadas as tábuas, pois, com o advento das calculadoras e dos computadores, não há mais sentido explorar a ideia dos logaritmos somente como facilitador de cálculos.

Com isso, hoje verificamos que os livros didáticos, de modo geral, definem os logaritmos, como expoentes, sob a concepção algébrica-funcional, apresentam as consequências da definição e exploram as propriedades.

Após esta abordagem, a função logarítmica é definida como inversa da exponencial, são apresentadas suas principais características e é explorada sua representação gráfica. Depois disso, os autores atuais geralmente apresentam uma série de problemas interdisciplinares que enfatizam a aplicabilidade da função logarítmica em diversas áreas do conhecimento, como na economia, física, biologia, química e informática.

Vimos que, em 1614, quando Napier publicou sua obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio,* sua intenção era facilitar os cálculos extensos provenientes da Astronomia, Navegação e Comércio.

Com as contribuições de Gregorius de Saint Vicent, Euler, Leibniz, Newton, Fermat, dentre outros, o logaritmo não é mais visto somente no campo aritmético, mas passa a também fazer parte da Álgebra, pois aparece como expoente de uma equação ou como função inversa da exponencial.

Esta última concepção dos logaritmos, denominada algébrica-funcional ganhou força com a Reforma Francisco Campos na década de 1930, que teve influência do matemático alemão Félix Klein. Posteriormente passou a ser tratada de forma mais rigorosa a partir da década de 1960 e, mesmo com as críticas ao Movimento da Matemática Moderna e as novas tendências da Educação Matemática, atualmente se mostra dominante nos livros didáticos atuais, com a diferença que no momento atual a função logarítmica aparece nos livros por meio das aplicações e de sua relação com o uso de software.

Segue abaixo uma tabela que resume alguns períodos e fatos importantes apontados em nosso estudo e evidencia a inserção e o desenvolvimento da função logarítmica nos livros didáticos brasileiros.

Tabela 1 – Função logarítmica nos livros didáticos brasileiros

| Período | Fatos importantes e observações |
|---|---|
| 1850 até 1912 | Teoria dos Logaritmos no campo da Aritmética; logaritmos associados à teoria das Progressões; função logarítmica aparece implícita na concepção aritmética. |
| 1893 até 1912 | Reforma da Educação Brasileira, proposta por Benjamin Constant, em 1890. Logaritmos aparecem tanto no campo da Aritmética como no campo da Álgebra |
| 1915 | A partir deste ano, os programas oficiais situam os logaritmos exclusivamente no terreno da Álgebra. |
| 1929 | Introdução do tópico Função Exponencial nos programas oficiais. |
| 1931 | Reforma Francisco Campos. Por influência do alemão Félix Klein, o tópico Função Exponencial é vinculado à Função Exponencial. |
| 1936 | Portaria Ministerial de 17 de março de 1936 – Programas Propostos para o Curso Complementar. O estudo das funções exponencial e logarítmica é associado ao Cálculo Diferencial e Integral e à Geometria Analítica; a concepção algébrico-funcional dos logaritmos é focada na função logarítmica como inversa da função exponencial, o que permanece até hoje. |
| 2ª metade da década de 1960 | Movimento da Matemática Moderna. A concepção algébrica funcional do logaritmo passa a ser tratada de forma mais rigorosa e numa mesma série; a função exponencial e logarítmica não mais aparecem associadas à teoria das progressões e nem com noções de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral. |
| Década de 1980 | Críticas ao Movimento da Matemática Moderna; configuração de novas tendências na Educação Matemática Brasileira. Nos programas oficiais, os logaritmos aparecem como um sub-tópico da função exponencial; a função logarítmica é apresentada depois da teoria dos logaritmos; a concepção algébrico-funcional de logaritmo como função inversa da função exponencial continua dominante, assim como permanece a desvinculação do tema logaritmos da teoria das progressões e do ensino de Cálculo Diferencial e Integral. |
| Década de 1990 até os dias de hoje | A função logarítmica está praticamente desvinculada da concepção aritmética, seu tratamento é dado sob a concepção algébrico-funcional e sua abordagem é feita depois do tema logaritmos. |


ISSN 2178-034X

## 5. Referências

BOYER, Carl. B. **História da matemática**. Revista por Uta C. Merzbach; Tradução Elza F. Gomide – 2ª Ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. **Decreto nº 19890 de 18 de abril de 1931**. Organização do Ensino Secundário. Disponível em: < http://www2.camara.leg.br/legin/fed/decret/1930-1939/decreto-19890-18-abril-1931-504631-publicacaooriginal-141245-pe.html>. Acesso em 20 de Nov. de 2015.

BRASIL. **Decreto n° 891 de 08 de novembro de 1890**. Regulamento da Instrucção Primaria e Secundaria do Districto Federal. Disponível em: < http://legis.senado.gov.br/legislacao/ListaNormas.action?numero=981&tipo_norma=DEC&data=18901108&link=s>. Acesso em 20 de Nov. de 2015.

BRASIL. **Portaria Ministerial de 17 de março de 1936**. Sobre Programa proposto para o Curso Complementar. Disponível em: < http://www.jusbrasil.com.br/diarios/2018851/pg-5-secao-1-diario-oficial-da-uniao-dou-de-17-03-1936>. Acesso em 13 de Nov. de 2015.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: Contexto e Aplicações**. 1ª Ed. vol1. São Paulo: Ática, 1999.

EULER, Léornard. **Introductio in analysin infinitorum**, 1748. Traduzido para o francês por J. B. Labey.

FARAH, Edison; CATUNDA, Omar; CASTRUCCI, Benedito. **Matemática Segunda Série – Curso Colegial Clássico e Científico .** Série Colegial. 2ª edição. vol. 19. São Paulo, Rio de Janeiro, Belo Horizonte, Salvador, Recife, Curitiba, Porto Alegre: Editora do Brasil S/A, 1949.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David. ; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática: Ciência e Aplicações**. 2ª Ed. Vol. 1. São Paulo: Atual, 2004.

KATZ, Victor J. **A history of mathematics: an introduction**. 2nd ed. United States of America: Addison-Wesley Educational Publishers, 1998.

MAOR, Eli. **e: A história de um número**. 4ª Ed. Rio de Janeiro: Record, 2008.

MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antônio. **Os logaritmos na cultura escolar brasileira**. Natal: SBHMat, 2002.

MODERNA, Editora. **Conexões com a Matemática 1**. São Paulo: Moderna, 2013

NAPIER, John. ***Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio***,1614. Traduzido para o inglês por Ian Bruce. Disponível em: http://www.17centurymaths.com/contents/napiercontents.html. Acesso em: 21 ago. 2011.

ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen; NETO, Scipione Di Pierro. **Matemática Curso Colegial Moderno**. 2ª edição. Vol. 1 – 1ª série colegial. São Paulo: Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas, 1967.

ROCHA, Luiz Mauro; BARBOSA, Ruy Madsen; NETO, Scipione Di Pierro. **Matemática Curso Colegial Moderno**. Vol. 2 – 2ª série colegial. São Paulo: Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas, 1968.

ROXO, Euclides; CUNHA, Haroldo Lisbôa da; PEIXOTO, Roberto; NETTO, Cesar Dacorso. **Matemática 2º Ciclo – 2ª série**. v.2. Rio de Janeiro, São Paulo, Belo Horizonte: Livraria Francisco Alves, 1944.

SOARES, Diogo Oliveira. **Logaritmos: Napier *versus* Dante** .São Paulo: IFSP, 2012. Disponível em: https://ifspmatematica.files.wordpress.com/2015/07/tcc_diogo.pdf.


ISSN 2178-034X