DOS FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA À GEOMETRIA HIPERBÓLICA PLANA: UM ESTUDO A PARTIR DE SUA HISTÓRIA E APOIADO EM UM SOFTWARE

Mariana de Avelar Galvino Lima
Universidade Estadual Paulista, UNESP-Rio Claro
E-mail: marianagalvino@hotmail.com

Jorge Isidro Orjuela Bernal
Universidade Estadual Paulista, UNESP-Rio Claro
E-mail: jorgelicmat@gmail.com

Simone Aparecida da Costa Sader
Universidade Estadual Paulista, UNESP-Rio Claro
E-mail: simonesader@gmail.com

Maria Francisca da Cunha
Universidade Estadual Paulista, UNESP-Rio Claro
E-mail: mfrancisca7@hotmail.com

Resumo:
O minicurso tem fundamento em um trabalho acadêmico realizado em um curso de geometria. Tem como finalidade fazer uma abordagem da geometria hiperbólica partindo de seu desenvolvimento a partir da geometria euclidiana e fazendo evidentes suas principais características com ajuda do software *NonEuclid*. Além disso, o estudo da geometria hiperbólica, neste minicurso, leva a um reestudo da geometria euclidiana plana.
Palavras-chave: Geometria; História; Software educativo.

1. Introdução

Esta proposta de minicurso é uma adaptação de um seminário realizado na disciplina Fundamentos de Geometria, onde estudamos aspectos relacionados ao desenvolvimento da mesma ao longo do tempo, tomando como ponto de partida a obra de Euclides, *Os Elementos*. A abordagem realizada no estudo da geometria não euclidiana nos permitiu comparar seus resultados com os da geometria euclidiana. Para melhor compreendermos a temática fizemos o uso de softwares.

Esta experiência motivou a preparação desta proposta de minicurso com a finalidade de proporcionar a estudantes e professores de Matemática um estudo empírico com o objetivo de desenvolver a compreensão da geometria hiperbólica como um sistema axiomático.

Tomando por base o estudo realizado na geometria hiperbólica a partir de seus fundamentos e sua origem, iremos entrelaçá-la e compará-la com a geometria euclidiana a partir de atividades práticas. Para isso, teremos o suporte do software dinâmico e de livre acesso NonEuclid, o qual permite abordar a temática desde o modelo de Poincaré. Este software pode ser encontrado e instalado através do endereço *https://www.cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/NonEuclid.html.*

O software é um importante auxílio para trabalhar com a estranheza e o aspecto não intuitivo da geometria hiperbólica. Estudar a estranheza da geometria hiperbólica contribui para pensarmos e compreendermos a diferença entre o que é parte da definição de um objeto e o que é resultado de um teorema sobre ele. Diferenciação esta bastante pertinente ao universo de quem estuda e trabalha com Matemática. O software além de nos permitir realizar construções que facilitam a visualização dos elementos geométricos hiperbólicos – tarefa complexa sem o apoio de um software – possibilita movimentá-los. Ao se referir aos softwares matemáticos, Borba (2010, p. 3) considera que, *"as possibilidades experimentais dessas mídias podem ser exploradas, podendo-se chegar a elaboração de conjecturas bem como a sua verificação"*. Dessa forma, o software é inserido como forma de apoio na construcão de conhecimento.

Temos a intenção de proporcionar um estudo das "novidades" ou "estranhezas" da geometria hiperbólica, mas que possibilite também um reestudo da geometria euclidiana. Por esta razão, e como o software NonEuclid é gratuito e pode ser instalado nas escolas de nível básico, acreditamos que as atividades aqui apresentadas podem ser inseridas na prática docente tanto de professores de nível superior quanto de nível médio.

2. Um pouco da história do surgimento da geometria hiperbólica

Embora a geometria hiperbólica seja uma das geometrias não euclidianas, ela se deu a partir da geometria euclidiana plana. Sua origem encontra-se no livro I do mais antigo texto matemático grego que nos chegou, a obra "Os Elementos" de Euclides. Para Euclides, a Geometria era uma ciência dedutiva, ou seja, os resultados poderiam ser obtidos e considerados como verdades se pudéssemos obtê-los a partir de outras verdades preestabelecidas. Por causa desse pensamento, sua obra apresenta-se dividida em axiomas, noções comuns e postulados, tendo o último postulado causado discussões que levaram ao surgimento das geometrias não euclidianas. Neste caso, optamos por tratar da geometria hiperbólica.

O postulado que gerou discussões foi o quinto, anunciado a seguir:

"Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor que dois retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram naquele lado cuja soma dos ângulos internos é menor que dois retos".

Atualmente, este postulado é conhecido por seu equivalente chamado de Postulado das Paralelas, apresentado pelo matemático Jhon Playfair. O enunciado é:

"Por um ponto fora de uma reta pode-se traçar uma única paralela à reta dada".

O livro I foi objeto de vários comentários por causa deste postulado, porque apesar de ser um postulado o resultado nele apresentado não foi considerado por diversos matemáticos como algo trivial e que pudesse ser deduzido a partir das noções comuns, axiomas e dos primeiros quatro postulados. Por esse motivo, durante 2000 anos inúmeras tentativas foram feitas para demonstrá-lo.

Dentre as pessoas envolvidas nesta busca pela sua demonstração, de acordo com Bongiovanni e Jahn (2010), encontram-se *Saccheri (1667-1733)*, um padre jesuíta que antes de morrer publicou um livro com o título "Euclides liberto de qualquer imperfeição". Nele, Saccheri tenta demonstrar o quinto postulado de Euclides usando o raciocínio por absurdo, ou seja, ele apresenta uma das negações do quinto postulado e tenta deduzir uma contradição. Saccheri estava dando os primeiros passos em direção às geometrias não euclidianas, embora não soubesse disso.

Diversos foram aqueles que se dedicaram à demonstração, no entanto o fato de não se conseguir uma prova abriu a possibilidade para a existência de outras geometrias diferentes da euclidiana, o que até então era visto como impossível. *Gauss* (1777-1855) tentou provar o quinto postulado usando o método redução ao absurdo, como fizera antes *Saccheri* e *Lambert.* Mas, Gauss começou a deduzir uma nova geometria, formulando ideias e teoremas. Em 1826, o matemático russo *Lobachewsky* participando de uma conferência em que se negava o quinto postulado afirmava que por um ponto exterior a uma reta passa mais do que uma paralela. Em 1868, *Beltrami* provou definitivamente que não era possível provar o quinto postulado e, a partir daí definiu-se a geometria hiperbólica.

3. O que é geometria hiperbólica?

É a geometria que admite todos os postulados da geometria euclidiana, exceto o quinto, que é substituído pelo seguinte: por um ponto exterior a uma reta passa mais do que uma paralela. (Axioma de Bolyai-Lobatchevsky ou postulado hiperbólico).

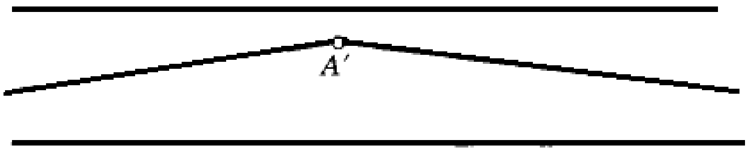

Figura 1 – Representação gráfica do postulado hiperbólico
Fonte: Representação nossa feita em GeoGebra

É a geometria que resulta dos 4 primeiros grupos de axiomas de Hilbert e do axioma de Bolyai-Lobatchevsky.

Quadro 1: Comparação entre Geometria Euclidiana e Geometria de Hilbert

POSTULADOS DE EUCLIDES	*GEOMETRIA DE HILBERT*
1. Uma linha reta pode ser traçada de um ponto a outro, escolhidos à vontade. 2. Uma linha reta pode ser prolongada indefinidamente. 3. Um círculo pode ser traçado com centro e raios arbitrários 4. Todos os ângulos retos são iguais. *5. Por um ponto exterior a uma reta passa mais de uma paralela*	1. Axiomas de incidência. 2. Axiomas de ordem 3. Axiomas de continuidade 4. Axiomas de congruência 5. *Por um ponto exterior a uma reta passa mais de uma paralela*

Na comparação entre os postulados de Euclides e a geometria de Hilbert, concluímos que os fatos diferentes da geometria hiperbólica decorrem da aceitação de uma negação do postulado das paralelas.

4. Os modelos para a geometria hiperbólica

Beltrami, Klein e Poincaré demonstraram a consistência desta nova geometria criando um modelo. Um modelo para um sistema axiomático é:

> um ambiente no qual podemos representar (ou interpretar) os conceitos primitivos em relação aos quais os axiomas passam a ser afirmações aceitas como verdadeiras.

> A principal característica de qualquer modelo de um sistema de axioma, é que todos os teoremas do sistema são afirmações verdadeiras no modelo (GREENBERG, 1993, p. 53).

Aqui, abordaremos o modelo de Poincaré.

O disco de Poincaré é um modelo que usa a geometria euclidiana. Dado um círculo C, no plano euclidiano, ele consiste de um disco de pontos estritamente internos ao círculo C.

Há dois tipos de linhas no círculo de Poincaré: as linhas que passam pelo centro (são do tipo euclidianas) e as linhas hiperbólicas, conforme se observa na figura a seguir:

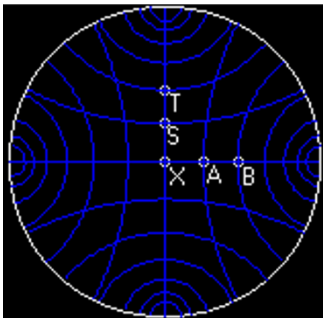

Figura 2 – Disco de Poincaré no software NonEuclid.
Fonte: Representação no software NonEuclid

Os discos podem também ser pavimentados. A seguir apresentamos alguns exemplos:

Figura 3 – Representações do disco de Poincaré pavimentado.
Fonte: Obras de Escher: Círculos Limites

Os discos pavimentados são exemplos de como visualizamos as formas e figuras geométricas e não podem ser usados para conclusões a respeito de dimensões de figuras.

5. *O software* NonEuclid

O software dinâmico NonEuclid foi escolhido para este trabalho por permitir investigar empiricamente questões sobre a natureza e propriedades dos objetos geométricos. Algumas questões podem ser melhor compreendidas com a visualização e manipulação oferecidas pelo software, tais como: As ideias de paralelismo e perpendicularismo são as mesmas da geometria euclidiana? Como são as retas na geometria hiperbólica? Qual a diferença entre os triângulos, círculos e quadriláteros em relação à geometria euclidiana? Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais na geometria hiperbólica?

Nossa intenção é que através da exploração estas e outras questões sejam investigadas.

6. Atividades

Destacamos que contemplaremos a abordagem histórica, relacionando as geometrias não euclidianas com a geometria euclidiana. Também realizaremos atividades com apoio tecnológico, visando consolidar os conhecimentos acerca da temática.

As atividades serão agrupadas por momentos e se apresentarão acompanhadas de questionamentos a fim de que quem as realize possa concluir sobre quais são os resultados da geometria hiperbólica e quais são os resultados válidos simultaneamente na geometria euclidiana e na geometria hiperbólica. Além disso, num momento inicial, as atividades se destinarão a "familiarização" dos participantes com o software e com o tema.

A seguir são apresentadas as atividades.

Momento 1. Exploração do software e construção de elementos geométricos

a. Em uma janela nova "em branco", trace diversos segmentos de reta a partir da ferramenta "desenhe segmento de linha". Como são os segmentos de reta no disco de Poincaré, ou seja, na geometria hiperbólica?
b. Fazendo uso da ferramenta "desenhe segmento de tamanho específico" trace a partir de um ponto *A* qualquer segmento perto do centro do plano. Depois replique este segmento em um lugar próximo à extremidade do disco de Poincaré. O que podemos afirmar dos segmentos?
c. Construa dois círculos: um com centro próximo ao horizonte e outro com centro próximo ao centro do disco. Qual é a principal diferença visual entre os dois? Explique porque isso acontece. Qual dos dois tem maior semelhança com o círculo euclidiano?

d. Com ajuda da opção "desenhe segmento de linha" construa vários triângulos, e depois movimente seus vértices. Todos os triângulos são iguais? Possuem semelhanças ou diferenças com os triângulos euclidianos? O que acontece quando todos os vértices dos triângulos estão no limite do disco de Poincaré?
e. Verifique a possibilidade de construção de triângulos equiláteros e isósceles.
f. Tente construir um retângulo hiperbólico utilizando o mesmo procedimento da Geometria Euclidiana e descreva a figura encontrada.

Momento 2. (Re)provando algumas propriedades da(s) geometria(s)

a. Dados três pontos alinhados *A, B* e *C*, com *B* entre *A* e *C*, verifique, utilizando as ferramentas de medição, que vale o Axioma de medição que afirma que:
$$AC = AB + BC$$
b. Construa duas h-retas, que se intersectam no ponto *A*. Determine as medidas dos ângulos opostos pelo vértice *A*. Faça isso repetidamente em todo o plano de Poincaré. A propriedade euclidiana destes ângulos permanece válida na geometria hiperbólica? O que podemos dizer sobre os pares de ângulos adjacentes? Que podemos dizer do comportamento gráfico dos ângulos e suas medidas?
c. Na geometria euclidiana, duas retas paralelas a uma terceira são paralelas entre si. Vamos verificar a validade desse resultado na geometria hiperbólica plana? Duas retas paralelas são equidistantes entre si na geometria hiperbólica?
d. Construa um triângulo, meça seus ângulos internos e realize a soma destes valores. O que se pode afirmar sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo? E o que se pode afirmar a respeito da soma das medidas dos ângulos de um quadrilátero convexo?
e. Utilize o resultado encontrado para justificar que não existem retângulos hiperbólicos.
f. Construir um triângulo hiperbólico equilátero no disco. Em seguida, determine as medidas dos ângulos internos e aponte as semelhanças e diferenças entre os triângulos equiláteros hiperbólicos e euclidianos.
g. Faça o mesmo do exercício anterior para o triângulo isósceles (não equilátero).
h. Na geometria hiperbólica, dois triângulos equiláteros são semelhantes?
Verifique se o teorema de Pitágoras vale na geometria hiperbólica. Existe uma relação entre a^2, b^2, c^2. Que relação é essa?

i. Na geometria euclidiana, todo ângulo inscrito numa semicircunferência é reto. Verifique se esta afirmação é válida na geometria hiperbólica.

j. Faça a construção de um triângulo, trace uma linha e com ajuda da ferramenta “refletir” faça reflexão do triângulo, o que acontece? É possível fazer que dois triângulos sejam congruentes na geometria hiperbólica como na geometria euclidiana?

k. Faça o mesmo do exercício anterior para o triângulo isósceles. (não equilátero)

l. Na geometria euclidiana é possível provar que qualquer quadrilátero cujas diagonais são congruentes e se cortam no ponto médio de ambas é necessariamente um retângulo. Construa um quadrilátero hiperbólico com essa propriedade e verifique quais características são semelhantes às do retângulo.

m. Verifique se Teorema do Ângulo Externo da geometria euclidiana, permanece válido na geometria hiperbólica.

Referências

BONGIOVANNI, V. JAHN, A. P. *De Euclides às geometrias não euclidianas.* Disponível em http://www.fisem.org/www/union/revistas/2010/22/Union_022_006.pdf. Acesso em 17. Out.2015

BORBA, M. C. *Softwares* e internet na sala de aula de matemática. Disponível em http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/marceloxenen.PDF. Acesso em jul.2014.

COUTINHO, L. *Convite às geometrias não euclidianas.* Rio de Janeiro: Interciência, 2001.

COXETER, H. S. *M. Introduction to Geometry. 2. ed. Toronto: Wiley Classics Library, 1989.*

GREENBERG, M. J. *Euclidean and Non-Euclidean Geometries, Development and History. 3* Ed. New York: W H. Freeman and Company 1993.

MOISE, E. E. Elementary Geometry from an Advanced Standpoint. 3. *ed. Boston: Addison-Wesley, 1990.*

ROCHA, L.F.C. *Introdução à geometria hiperbólica plana.* Rio de Janeiro: IMPA, 1987.

SILVA, K. B. R. *Noções de Geometrias não euclidianas:* hiperbólica, da superfície esférica e dos fractais. Curitiba: CRV, 2011.