

TRAJETÓRIA HIPOTÉTICA DE APRENDIZAGEM E A COMPREENSÃO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO CICLO

Sonner Arfux de Figueiredo
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul -UEMS
sarfux@uems.brail

Nielce Meneguelo Lobo da Costa
Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo -
UNIAN SP
nielce.lobo@anhanguera.com

Resumo:

Este artigo discute parte de uma pesquisa de doutoramento e foca na análise de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) desenvolvida na Licenciatura em Matemática, no conteúdo de trigonometria. O objetivo foi evidenciar a compreensão dos licenciandos de conceitos relativos às relações trigonométricas no ciclo. A pesquisa se fundamentou em Piaget para compreensão do processo de equilíbrio e em Simon, Tzur, Heinz e Kinzel para aprendizagem profissional pela THA. A metodologia foi pesquisa-ação, com elementos do *Design Based Research*, envolveu dezesseis alunos ingressantes e foi estruturada em fases: documental; construção do processo formativo; aplicação e análise. Os resultados indicaram que as interações dinâmicas com o sistema tecnológico aliado ao material concreto na THA favoreceram a generalização necessária para o desenvolvimento de processos de abstração reflexiva que incidem na construção de conceitos ligados à trigonometria no ciclo e evidenciaram o relacionamento entre a prática do formador e o aprendizado do aluno.

Palavras-chave: ciclo trigonométrico, processo de generalização, experimento de ensino, abstração reflexiva.

1. Introdução

O ensino e a aprendizagem de trigonometria têm sido objeto de debate e investigação nas últimas décadas e o assunto está integrado no currículo nos cursos de Licenciatura de Matemática, servindo como um dos conteúdos de transição da Matemática estudada na Educação Básica e no Ensino Superior. Com aplicação incontestável nas diversas áreas das ciências exatas, seu estudo auxilia na compreensão de ideias e conceitos básicos e se aplica tanto na resolução de problemas, manipulação de regras e algoritmos quanto em Cálculo e em outras disciplinas do Curso de Matemática.

Distintas investigações, tais como Lindegger (2000); Almeida, (2000); Valente, (2001); Brito e Morey, (2004) e Lobo da Costa, (2004) recomendam a abordagem dos conceitos de trigonometria a partir de: (a) situações-problema relacionadas ao cotidiano; (b) trabalho em equipe de modo a permitir a troca de pontos de vista; (c) uso de instrumentos necessários para visualização e compreensão dos conceitos trigonométricos no ciclo. Tais recomendações se ligam ao termo “*ecologia de aprendizagem*” no sentido de representar um

sistema complexo e interativo envolvendo múltiplas variáveis de diferentes tipos e níveis para favorecer a construção de conceitos.

A trigonometria é um dos conteúdos cujo ensino e aprendizagem são iniciados no Ensino Médio e depois são retomados e aprofundados nos cursos superiores e, em particular, no Curso de Licenciatura em Matemática. Desta feita, a trigonometria serve como base de sustentação para as demais disciplinas do Curso como o cálculo, a física, a geometria, a geometria analítica, entre outras, como já mencionamos. Além disso, a trigonometria abordada na Licenciatura em Matemática deve ser apresentada em uma abordagem voltada para o futuro professor, ou seja, com a preocupação em explorar também características e possibilidades para o ensino.

A problemática enfocada neste artigo surgiu no seio de uma investigação mais ampla, sobre como caracterizar uma metodologia para a formação inicial de professores de Matemática com a proposta de integrar a Prática como um componente no currículo, para mais detalhes ver Figueiredo (2015). Nosso estudo se enquadra nas investigações que procuram compreender como o acadêmico constrói/reconstrói conceitos a partir da vivência de uma Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) e, nesse texto, especificamente analisamos a compreensão ligada às relações no ciclo trigonométrico.

2. Marco Teórico

A pesquisa maior que subsidia este artigo se fundamentou em Piaget para compreensão dos processos de equilíbrio e de abstração na construção de conceitos; além de Simon, Tzur, Heinz e Kinzel para o tocante à aprendizagem profissional por meio de THA.

Para Piaget (1972) a construção de conceitos por um indivíduo parte de um processo de conflito cognitivo. Quando a pessoa se encontra frente a uma situação ou problema, para a qual seus esquemas mentais não lhe indicam procedimentos ou soluções possíveis, ela entra em conflito e desequilíbrio. Nesse caso, para que seja reestabelecida a organização mental, entra em jogo o processo de equilíbrio constituído de duas fases: uma de assimilação, na qual o ser incorpora novas ideias, conhecimentos e objetos aos seus esquemas mentais e outra de acomodação, no qual o organismo é modificado de modo a adaptar-se e a lidar com a realidade que enfrenta, ou seja, mudar sua estrutura para acomodar os novos estímulos.

O desenvolvimento cognitivo é controlado pelas atividades do indivíduo que o colocam em diferentes situações de aprendizagem nas quais utiliza mecanismos de abstração. Piaget (1977) os classifica em abstração empírica, pseudo-empírica e reflexiva.

A abstração empírica da realidade provém das informações obtidas pelo indivíduo de forma sensorial e motora, ela ocorre a partir da observação das propriedades dos objetos reais e das generalizações e interpretações sobre elas. O nível de abstração pseudo-empírica da realidade é aquele que provém das ações do sujeito sobre situações e objetos e tem, portanto, mais do que a observação dessas situações ou objetos, pois inclui a observação das reações e resultados das ações.

O último e mais complexo tipo de abstração é a reflexiva, a qual se apoia na abstração empírica e na pseudo-empírica, e ocorre quando o sujeito abstrai propriedades comuns a vários objetos mediante a interiorização e coordenação das ações sobre eles, assim como a criação de novos objetos. Segundo Piaget (2001) a abstração reflexiva tem duas fases: a primeira em que as ações feitas são analisadas e uma segunda na qual o indivíduo reflete sobre relações não observáveis, elaboradas na mente e reorganiza seus esquemas mentais agregando os elementos abstraídos de inferências e de deduções lógicas.

Esse mecanismo de reflexão atividade-efeito identifica as fases de elaboração de um novo conceito - a participação no processo no qual o aluno abstrai uma regularidade na relação entre a atividade realizada e o efeito produzido enquanto antecipadamente se refere ao uso da regularidade abstraída em situações distintas da que levou a cabo a abstração. Assim a base teórica de Simon et al (2004) foi construída a partir destes dois conceitos-chave da teoria piagetiana, quais sejam o de equilíbrio (assimilação e acomodação) e o de abstração reflexiva.

O mecanismo baseia-se em Piaget (1985, 2001) sobre dois aspectos: o da reflexão e da abstração. O primeiro aspecto é uma projeção, na qual as ações em um nível tornam-se objetos (entrada) de ações na próxima tarefa ou atividade. O segundo aspecto é um reflexo, onde uma reorganização entre as ações ocorre. O autor faz uma distinção entre os dois tipos de reflexão realizados pelos alunos em seus registros da experiência (as interações de atividades e efeitos associados).

Com base neste modelo, fundamentado no construtivismo, teoria que ocupa lugar destacado nas investigações sobre aprendizado da matemática, podendo servir de base para

modelos de ensino, discutimos a construção do conhecimento matemático na proposta formativa por meio de THA.

3. Trajetória hipotética de aprendizagem –THA

Segundo Simon (1995) é preciso formular modelos de ensino baseados no construtivismo, de modo a promover mudanças na forma de ensinar matemática. Para tanto, incluiu a ideia de que se construam o que ele denominou de trajetórias hipotéticas para a aprendizagem (THA). Uma THA é constituída pelos objetivos para a aprendizagem, pelas tarefas matemáticas que serão utilizadas para promover a aprendizagem dos alunos e também pelas hipóteses sobre o processo de aprendizagem desses alunos do particular conceito. A construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem (THA) oferece uma descrição de aspectos-chave do planejamento da aula de matemática.

Para o autor, durante o desenvolvimento da THA com os alunos um objetivo inicial planejado pode ser modificado. Quando os alunos se engajam nas atividades planejadas, os professores devem estar atentos às considerações dos alunos, nas quais eles expressam seu entendimento sobre o conceito em estudo. O ambiente de aprendizagem inclui a interação entre o professor e os alunos e os resultados dessa interação.

Simon & Tzur (2004) estabeleceram uma maneira de explicitar as relações entre as características de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e as características de sequências de ensino (identificar objetivos da aprendizagem, definir sequências de tarefas e construir uma evolução detalhada das compreensões matemáticas dos estudantes). Desta hipótese os autores consideraram tarefas entendendo-as como um processo de construção de um novo conceito, na perspectiva da reflexão sobre a atividade-efeito, elaborado em trajetória hipotética de aprendizagem. Assim os autores demonstram que, ao gerar uma THA, podemos explicar a relação entre a aprendizagem conceitual e tarefas matemáticas com a elaboração da THA, a seleção de tarefas não é deixada à intuição ou tentativa e erro. Em vez disso, oferece uma estrutura para pensar sobre como a tarefa pode promover o processo de aprendizagem.

Alguns estudos ocupam um modelo de cognição neopiagetiana (DUBINSKY, 1991) onde uma ação é uma transformação de objetos que o indivíduo percebe como algo externo, neste caso, o indivíduo poder realizar transformações ao relacionar somente a indicação externa que lhe proporcionam detalhes precisos sobre que passos dar na resolução de tarefas.

Quando a ação é repetida, o indivíduo reflexiona sobre a atividade e pode ser interiorizada em um processo abstração por parte do aluno.

O mecanismo de reflexão sobre a atividade-efeito consiste em uma reflexão sobre a trajetória hipotética de aprendizagem proposta por Simon et al (2004), elaborada a partir das ideias de Piaget (1997) sobre abstração reflexiva. A abstração reflexiva se apoia nas outras duas, em função de surgir quando se abstraem propriedades comuns de vários objetos e realizam ações sobre eles mediante a interiorização e coordenação das ações assim como a criação de novos objetos (DUBINSKY, 1991).

Para alcançar seu objetivo, o estudante realiza uma determinada tarefa (atividade dirigida por um objetivo) proporcionando a possibilidade de prestar atenção nos efeitos da atividade realizada (efeito das atividades), neste processo de observação dos efeitos na atividade o estudante cria registros mentais (registro da relação atividade-efeitos). Assim para entender o desenvolvimento das estruturas mentais por parte dos estudantes, ou seja, estabelecer explicitamente as relações entre as características da THA de estudantes e características de sequências de ensino (identificar os objetivos de aprendizagem, definir fluxos de trabalho e contribuir para uma avaliação detalhada dos entendimentos de matemática do estudante).

Simon e Tzur (2004) identificaram três tipos de tarefas com potencial para auxiliar os alunos na construção de um novo conceito, ou seja, para a compreensão, na perspectiva da reflexão sobre a relação atividade-efeito.

✓ **Tarefas iniciais:** são propostas para serem realizadas com os conhecimentos prévios dos alunos, os quais desempenham papel de participação.

✓ **Tarefas de reflexão:** são propostas com o objetivo de levar os alunos a refletirem, gerando abstração de regularidades na relação atividade-efeito.

✓ **Tarefas de antecipação:** são as que exigem abstração e regularidade na relação atividade-efeito.

As tarefas iniciais são usadas para a criação e o reconhecimento de certas experiências, as tarefas reflexivas são para direcionar a atenção dos alunos para a relação atividade-efeito e as tarefas de antecipação têm o intuito de levar os estudantes a identificar e analisar regularidades. Quando os alunos classificam e comparam são levados à identificação de

padrões, isto é, as relações entre a atividade e os efeitos, neste sentido esta ação descreve a construção de um novo conceito, pois tenta operacionalizar “os estágios de desenvolvimento” e sua “reconstrução” a qual se referencia em Piaget (1971) para explicar o processo de abstração por parte do aluno.

Com o propósito acima, na sequência descrevemos a proposta de pesquisa e o desenho geral do experimento. Ao discorrer sobre o conjunto de situações de aprendizagem, tratamos do universo da pesquisa e da sequência de ensino apresentada na THA no estudo da trigonometria no ciclo.

4. Participantes e Desenho

Este estudo é parte de uma pesquisa maior de doutoramento desenvolvida em um Curso de formação inicial - Licenciatura em Matemática, no campus de Nova Andradina da Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS. Participaram dezesseis acadêmicos do primeiro ano do Curso na disciplina de Matemática Elementar¹. Trata-se de pesquisa qualitativa, de natureza descritiva e interpretativa, com características da pesquisa-ação e elementos do *Design-Based Research* - proposto por Coob, Confrey, Disessa, Lehrer e Schauble (2003), o qual permite ajustes tanto para o processo formativo quanto investigativo.

A pesquisa foi estruturada em três fases, a primeira foi documental, a segunda de aplicação de uma proposta formativa e a terceira fase foi de análise². A proposta formativa envolveu: Razões Trigonométricas no Triângulo Retângulo e no Triângulo Qualquer; **Ciclo trigonométrico** e Trigonometria na Circunferência; Funções Trigonométricas, Identidades e Transformações Trigonométricas.

A Trajetória Hipotética de Aprendizagem (THA) que focou a **trigonometria no ciclo trigonométrico** foi desenvolvida em 4 seções totalizando 12 aulas de cinquenta minutos cada. A primeira seção teve como objetivo a visualização geométrica da razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. A segunda seção, com o jogo de memória de arcos e ângulos e jogo de dominó de ângulos que objetivou discutir a conversão da medida de um arco em radiano para graus e vice-versa e, na terceira seção, com o software GeoGebra, o objetivo foi a exploração das coordenadas, dos quadrantes, do seno, do cosseno e da tangente de um ângulo e do seu complementar e as relações entre eles.

¹ A disciplina possui no ementário diversos conteúdos, entre eles a trigonometria, objeto da pesquisa.

² Para mais detalhes ver FIGUEIREDO (2015).

Na quarta seção apresentamos três tarefas, com o objetivo de levar os alunos à construção dos conceitos matemáticos envolvidos, quais sejam, as relações trigonométricas no ciclo. As tarefas foram de três tipos: as iniciais, as de reflexão e as de antecipação. Concebemos esta THA, de modo a conjecturar e investigar como se desenvolve a compreensão e construção de conceitos pelos licenciandos.

Na sequência apresentamos a análise da quarta seção desta THA.

5. A compreensão das relações trigonométricas no Ciclo

No curso, os licenciandos haviam completado o estudo das relações trigonométricas para o triângulo retângulo e triângulo quaisquer, iniciavam então o estudo do ciclo trigonométrico.

A primeira seção da THA começou utilizando como recurso um ciclo de material concreto confeccionado em madeira e em EVA, com a intenção de identificar o raio da circunferência e projetar nos eixos vertical e horizontal de maneira a surgir um triângulo retângulo no ciclo, permitindo a visualizando das relações trigonométricas até então estudadas no triângulo retângulo.

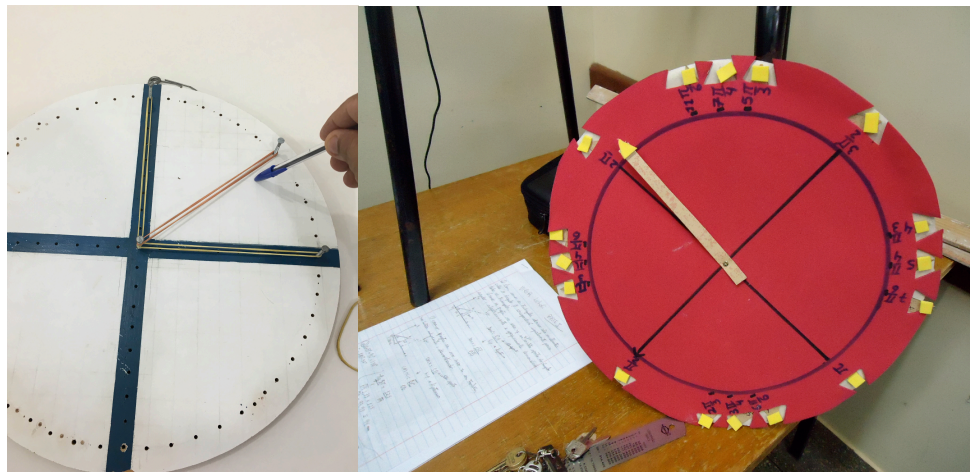


Figura 1: Ciclo trigonométrico em Madeira e EVA
Fonte: Figueiredo, 2015

A partir da construção, foi possível observar o arco correspondente ao ângulo do triângulo no ciclo, isto é, compreender geometricamente o que é calculado algebricamente.

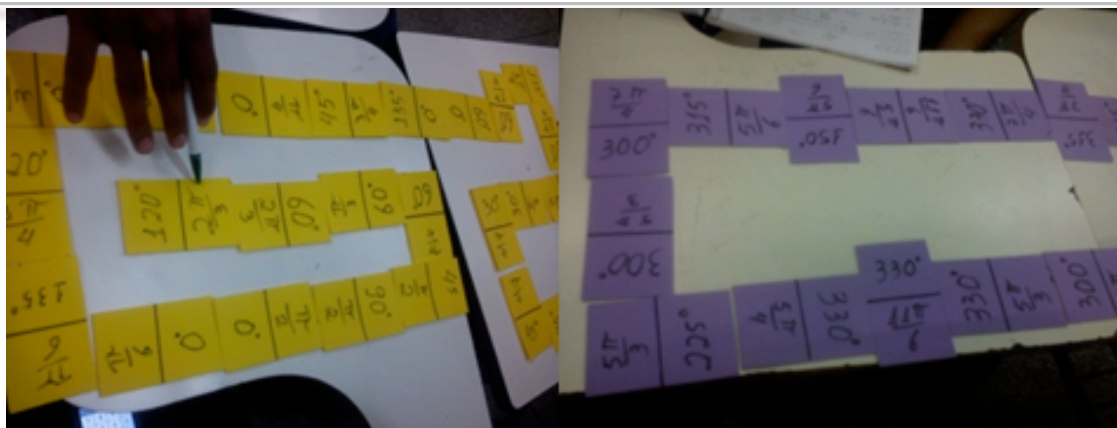


Figura 2: Peças do jogo de dominó trigonométrico
Fonte: Figueiredo, 2015

A discussão sobre o ciclo foi articulada com a atividade do jogo de dominó de arcos e ângulos (Figura 2) e seguiu com a utilização do Software GeoGebra para representação de arcos e ângulos. Para cada uma das representações foram projetadas tarefas implícitas nas ações dos licenciandos. No jogo, por exemplo, a tarefa principal foi sobre conversão de medidas. Com o Software a tarefa implícita foi a de conjecturar e validar as propriedades no ciclo trigonométrico, de forma que os licenciandos pudessem realizar ações reflexivas para identificar e analisar regularidades.

Estas ações tiveram como objetivo informar sobre a coordenação que os licenciandos realizavam entre os modos gráficos e os analíticos. O que pode ser considerado como chave para construir um esquema sobre as relações trigonométricas. Nesta atividade detectamos duas etapas na aprendizagem de uma nova concepção: a participativa e a antecipatória.

Na figura abaixo, usamos um *applet* para conjecturar e validar as relações trigonométricas para o seno, cosseno e tangente. Discutimos a definição e sistematizamos o conteúdo, estendendo os conceitos de seno, cosseno e tangente, anteriormente vistos no triângulo, para o ciclo trigonométrico e estabelecemos a relação entre eles. Além disso, introduzimos a secante, cossecante e cotangente definindo-as no ciclo e relacionando-as com o seno, cosseno e tangente.

Nossas observações são consistentes com o que diz Dubinsky (1991) sobre o andamento do processo problemático de se opor à compreensão, sob argumentos que se pode explicitar aos licenciandos na construção de uma nova concepção na fase participativa, mas ainda não na fase antecipatória, em particular, os processos de compreensão (operacional) são compostos por esses dois estágios distintos mencionados anteriormente.

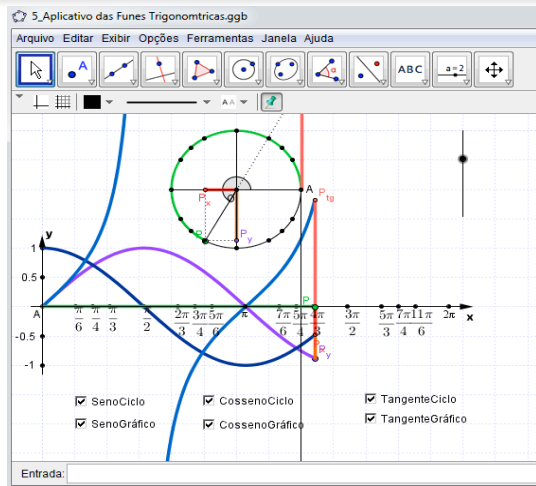


Figura 3: Ciclo e gráfico do seno, cosseno e tangente
Fonte: Figueiredo, 2015

Nas tarefas matemáticas da THA realizadas no quarto encontro foram articuladas duas etapas na aprendizagem de uma nova concepção: a participativa e antecipatória. As compreensões dos licenciandos evoluíram nos dois estágios acima citados, sendo que a compreensão de uma nova concepção matemática fica evidenciada nestas duas fases, segundo Simon et al (2004);

Uma evidencia sobre a compreensão dos licenciandos de conceitos relativos às relações trigonométricas no ciclo pôde ser identificado para o licenciando A, que com o uso de material concreto, de jogos associados e do *applet* no GeoGebra, identificou regularidades na relação atividade-efeito (SIMON et al, 2004). Observamos que nas duas tarefas iniciais, o licenciando A assimilou conhecimentos, realizou ações específicas associadas à situação e reconheceu a produção de um determinado resultado.

Na realização das tarefas da quarta seção da THA ficou evidenciado que o mesmo se encontrava na fase participativa, e na resolução das tarefas da atividade seguinte se encontrava na fase antecipatória, pois situaram-no a obter informações a partir do conjunto de registros contidos para desenvolver as ações nas tarefas anteriores. Nas respostas de alguns licenciandos para as tarefas, constatamos que o licenciando A foi capaz de explicar e articular seu pensamento sobre a trigonometria no ciclo trigonométrico.

O seguinte trecho de diálogo corrobora as afirmações acima.

- A: Professor, olha aqui no terceiro quadrante 'seno é negativo e o cosseno é negativo também.
P: isto e a secante olha, está projetada no eixo das abcissas, no caso o eixo?
A: X, aqui ela é negativa por que nesta relação aqui é um dividido por este valor negativo e na relação bateu certinho com o que está aqui no caderno.

P: É isto aí! É esta percepção que eu quero de vocês, relacionarem a definição com o que está acontecendo no ciclo aí no *applet*.

B<outro licenciando>: Professor, coloquei o valor aqui no caso é um porque este raio aqui é um, <se referindo ao raio no ciclo>.

P: sim este raio é um que por definição e convenção é adotado raio de medida um para o ciclo.

A: no caso aqui a cossecante é um, mas a secante não tem?

P: Se você percebe aqui, olha, a relação algébrica, um sobre cosseno e um dividido por um é um, mas a secante é um sobre zero, e por definição não se divide nada por zero, então o que temos para a secante?

A: não temos o valor da secante para este ângulo.

Neste relato de parte da discussão da tarefa, constatamos a articulação da representação gráfica obtida por meio do *Software* com os conceitos já estudados e definidos anteriormente no triângulo retângulo. Em um dos trechos o licenciando A se refere à definição no caderno relacionando o que está projetado para a secante e verifica quais são os valores da secante nos quadrantes. Consideramos que houve uma reflexão e resgate das ideias e do que foi concluído com o *applet* arcos notáveis no ciclo discutido anteriormente.

O objetivo destas tarefas foi levar os licenciandos a associarem a trigonometria expressa analiticamente à sua representação gráfica. Com o *Software* foi gerado um conjunto de representações relacionadas à atividade de modificar os parâmetros e os efeitos que esta modificação produz na representação gráfica das relações trigonométricas no ciclo.

6. Considerações Finais

O desenvolvimento desta THA evidenciou o processo de construção do significado dos conceitos trigonométricos no ciclo e mostrou que a compreensão inicial das razões trigonométricas no ciclo pode ser interpretada como comportamentos que identificam a intenção de estabelecer a partir da classificação das representações na relação de aprendizagem em uma atividade-efeito. Estas relações se evidenciam ao licenciando quando joga um jogo com fins pedagógicos, move um cursor no computador sobre o ciclo trigonométrico observando as características do arco, do ângulo, da medida do raio em funções do comprimento da circunferência, relacionando a forma geométrica com o cálculo algébrico, tudo isso são consideradas partes constituintes da fase de participação na construção do conhecimento matemático (SIMON et al, 2004; TZUR & SIMON, 2004).

A análise dos episódios parece indicar a dificuldade de muitos licenciandos em relacionar a transformação da medida de um arco em ângulo a radiano e vice-versa, e pode estar vinculada a uma necessária construção do significado de transformação da medida a partir de uma concepção dinâmica.

A sensibilização acerca do uso de um círculo unitário para ciclo trigonométrico fez-se necessária. Convencer o licenciando da utilidade do círculo trigonométrico para ampliação das ideias vistas em um triângulo retângulo para um triângulo qualquer, bem como para que se estabeleçam as correspondências dos valores das relações trigonométricas como coordenadas de um ponto pertencente a essa circunferência e na determinação de um arco qualquer, é sem dúvidas um marco decisivo para que se crie sustentação adequada para o desenvolvimento de novos conhecimentos na Trigonometria Plana, além de contribuir para a construção de conceitos e sem a necessidade de memorização de fórmulas e valores.

Quando optamos por uma circunferência de raio unitário é porque podemos associar bi univocamente a cada arco dessa circunferência um ponto cujas coordenadas já correspondem ao cosseno, seno, tangente e outras relações necessárias imediatamente. Sempre que possível, resolver problemas da trigonometria de diferentes formas, sobretudo com uma abordagem geométrica como fizemos para a tangente, secante e a cossecante, certamente agregam-se possibilidades de uma melhor compreensão.

Neste episódio identificamos alguns momentos tais como: a projeção na qual o licenciando construiu um conjunto de representações com o *applet*, refletiu a partir das regularidades que o *applet* lhe proporciona identificar na interação e das informações procedentes do conjunto de registros e a antecipação na atividade, pois o licenciando aplica uma regularidade identificando novos casos particulares, ou seja, a concepção matemática que organiza a situação.

Nesse sentido, o mecanismo cognitivo que centra na relação atividade-efeito (SIMON, *et al* 2004), a partir da ideia de abstração reflexiva de Piaget (1977), explica a relação entre a aprendizagem conceitual e tarefas matemáticas durante o processo formativo, e com esta elaboração da THA, nas seleções de tarefas, não foram deixadas à intuição ou tentativa e erro. Em vez disso, no mecanismo, oferecemos uma estrutura para pensar sobre como a tarefa pode subsidiar, ancorar, favorecer e promover o processo de aprendizagem.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES que, por meio de bolsa do Programa PSDE (Proc. no 0956-14-7), subsidiou parte dos estudos de doutoramento e desta pesquisa.

7. Referências Bibliográficas

ALMEIDA, M. B. **O Computador na Escola: Contextualizando a Formação de Professores Para a Mudança.** 257p. Tese (Doutorado em Educação: Currículo). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.2000.

COOB, P; CONFREY, J; DISESSA, A.; LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. **Design experiments in education research.** Educational Researcher, v.32, n.1, p. 9-13, 2003.

DUBINSKY, E. **Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking.** In D. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1991.

FIGUEIREDO, S. A de. **Formação Inicial de Professores e a Integração da Prática Como Componente Curricular na Disciplina de Matemática Elementar.** Tese de Doutorado em Educação Matemática. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo. 2015.

LINDEGGER, L. R. M. **Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo, uma proposta a partir da manipulação de modelos.** Dissertação (mestrado em Educação Matemática), PUC/SP, 2000.

LOBO DA COSTA, N. M. **Formação de Professores para o ensino da Matemática com a informática Integrada à prática Pedagógica: exploração e análise de dados em bancos computacionais.** Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2004.

PIAGET, J. [and his collaborators]. **Studies in Reflecting Abstraction** Edited and translated by Robert L. Campbell. Sussex, England: Psychology Press, 2001.

_____. **The equilibration of cognitive structures: the central problem of intellectual development.** Chicago: University of Chicago Press. 1985.

_____. **A epistemologia genética.** Petrópolis: Vozes, 1972.

_____. **The development of thought: Equilibration of cognitive structures.** New York: Vikin. 1977.

SIMON, M. A., TZUR, R. **Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory.** Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91-104, 2004.

SIMON, M. A.; TZUR, R.; HEINZ, K.; KINZEL, M. **Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction.** Journal for Research in Mathematics Education, 35(5), 305-329, 2004.

VALENTE, J. A. **Criando oportunidades de aprendizagem continuada ao longo da vida.** PÁTIO – Revista Pedagógica. Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul, Ano IV, nº.15 , nov.2000 – jan. 01.2001.