CÁLCULO ALGÉBRICO: UM RELATO DE UMA ATIVIDADE

Ademir Pereira Junior

Professor da SEED – Secretaria de Estado da Educação do Paraná

E-mail: profadjr@hotmail.com

Resumo:
Este relato de experiência apresenta o início de um trabalho com o cálculo algébrico com duas turmas do 8.º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Maringá no Paraná. O relato está fundamentado em algumas considerações a respeito do ensino de álgebra e do desenvolvimento do pensamento algébrico. O relato apresenta uma atividade em que os alunos tiveram que observar padrões, regularidades que remetem a uma caracterização do ensino de álgebra. A atividade desenvolvida mostra indícios da compreensão dos alunos a respeito do uso da linguagem algébrica formal como modo de comunicar ideias e organizar uma situação.

Palavras-chave: Educação Algébrica; Educação Matemática; Investigação Matemática; Pensamento Algébrico.

1. Introdução

A imagem tradicional que se tem do trabalho com a álgebra na Educação Básica é a de um trabalho em que se busca simplificar expressões algébricas, resolver equações, aprender regras para manipular símbolos, ou seja, um conjunto de procedimentos que não apresentam conexões com a realidade dos alunos, bem como com outros ramos da matemática.

Conforme a compreensão de muitos professores, trabalhar com álgebra limita-se ao que foi exposto no parágrafo anterior e, com isso, o estudo do cálculo literal torna-se um obstáculo para os alunos.

Nesse relato, apresento o início do trabalho com a álgebra, em que os alunos tiveram a oportunidade de observar regularidades, perceber aspectos variantes e invariantes em algumas situações[1], conjecturar, utilizar a linguagem algébrica com o propósito de organizar situações e, como consequência, generalizar.

[1] Eu farei o relato apenas de uma de quatro atividades que foram realizadas em sala de aula com o propósito de dar início ao cálculo algébrico.

2. Algumas considerações teóricas que fundamentam a atividade desenvolvida

O trabalho com o ensino de álgebra tem se apresentado desafiador em sala de aula e, muitas vezes, tem se transformado em uma forma de exclusão. Gimenez e Lins (2001) são alguns dos educadores que têm manifestado uma preocupação com a educação algébrica, tal como tem sido trabalhada nas salas de aula, e defendem que o trabalho com a educação algébrica deve acontecer desde os anos iniciais da Educação Básica.

Não há um consenso entre os pesquisadores a respeito do que é o pensamento algébrico. Para Fiorentini, Morin e Miguel (1993, p.87), alguns elementos caracterizam o pensamento algébrico: "percepção de regularidades, de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização".

Para Kaput (1998, 1999), o pensamento algébrico é complexo e composto de cinco formas que se inter-relacionam: generalização e formalização de padrões e restrições em diversas situações, inclusive da aritmética; a manipulação sintaticamente guiada de formalismos; o estudo das estruturas abstratas de cálculos e relações; o estudo das funções, relações e da variação de grandezas, como múltiplas linguagens que modelam fenômenos e fazem previsões. Esse autor considera que o pensamento algébrico é o principal objetivo do estudo da álgebra na Educação Básica e que a generalização e a formalização podem ocorrer em diversas situações.

Dentre os aspectos comuns com os autores citados anteriormente, ressalto um que fundamenta o relato da atividade, que é o da generalização de padrões e regularidades: uma das características do pensamento algébrico.

Os PCN recomendam que é proveitoso o professor propor situações em que os alunos

> possam investigar padrões, tanto em sucessões numéricas como em representações geométricas e identificar suas estruturas, construindo a linguagem algébrica para descrevê-la simbolicamente. Esse trabalho favorece a que o aluno construa a idéia de Álgebra como uma linguagem para expressar regularidades (BRASIL, 1998, p.117).

O trabalho realizado em sala com essas orientações dos PCN possibilita ao aluno compreender uma das faces da álgebra, que é o uso das letras como generalizações de modelos aritméticos e geométricos. Além disso, os alunos podem compreender a noção de variável, que usualmente não é tão explorada na Educação Básica. Normalmente, os alunos desse nível de escolaridade entendem o uso das letras como a representação de um valor desconhecido, no caso a incógnita.

Outra contribuição para a aprendizagem dos alunos com relação à álgebra que vai ao encontro das orientações dos PCN é o uso da linguagem como modo de manifestação de um pensamento que pode ser natural ou intuitivo e, com isso, o professor pode agir como um Mediador, de modo que o uso dessas linguagens possa também ser expresso em linguagem algébrica formal e, nesse caso, os símbolos têm o papel de auxiliar na representação do pensamento.

A tendência metodológica que norteou o meu trabalho foi a Investigação Matemática em que o aluno é chamado a agir como um matemático, formulando conjecturas acerca do que está investigando. Assim, as investigações matemáticas envolvem conceitos, procedimentos, representações matemáticas (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2013).

Nesse caso, as atividades de investigação são importantes, pois a utilização da álgebra se dá como modo de sistematizar propriedades observadas (generalizar), resolver e discutir problemas, usando a álgebra como ferramenta (Lins e Gimenez, 2001).

3. Um Relato da Atividade desenvolvida

Nesta seção, farei um relato de uma das atividades que eu desenvolvi com duas turmas do 8.º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública de Maringá no Paraná, para dar início ao trabalho com o cálculo literal. Durante esse relato, manifestarei as minhas intenções e reflexões que eu tive com o trabalho.

Para dar início ao trabalho com a Álgebra com os alunos do 8.º ano, eu adaptei uma tarefa[2] proposta no livro didático de Matemática Imenes & Lellis 6.º Ano.

Tarefa proposta:

O Professor irá colocar sobre a mesa alguns cubos[3], e alguns de vocês serão convidados para vir até a frente da sala para contar o número de faces visíveis, cada pessoa deve dar uma volta circundando a mesa para contar o número de faces visíveis, em seguida deverá completar a tabela a seguir.

[2] Entendo por tarefa qualquer proposta feita pelo professor para os alunos em sala de aula, por exemplo, uma questão, que pode ser oral ou escrita, um problema do livro didático, enquanto que a atividade envolve a ação do aluno, a realização da tarefa proposta.

[3] Utilizei a palavra cubo em sala de aula para cada sólido que eu coloquei sobre a mesa; nesse relato, eu também utilizo a palavra cubo, pois não tenho a intenção de realizar uma discussão a respeito desse ente geométrico e a sua representação.

Quadro 1 – Representação da tabela que acompanhava a tarefa proposta em aula

Número de Cubos Sobrepostos na Mesa	Número de Faces Visíveis
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

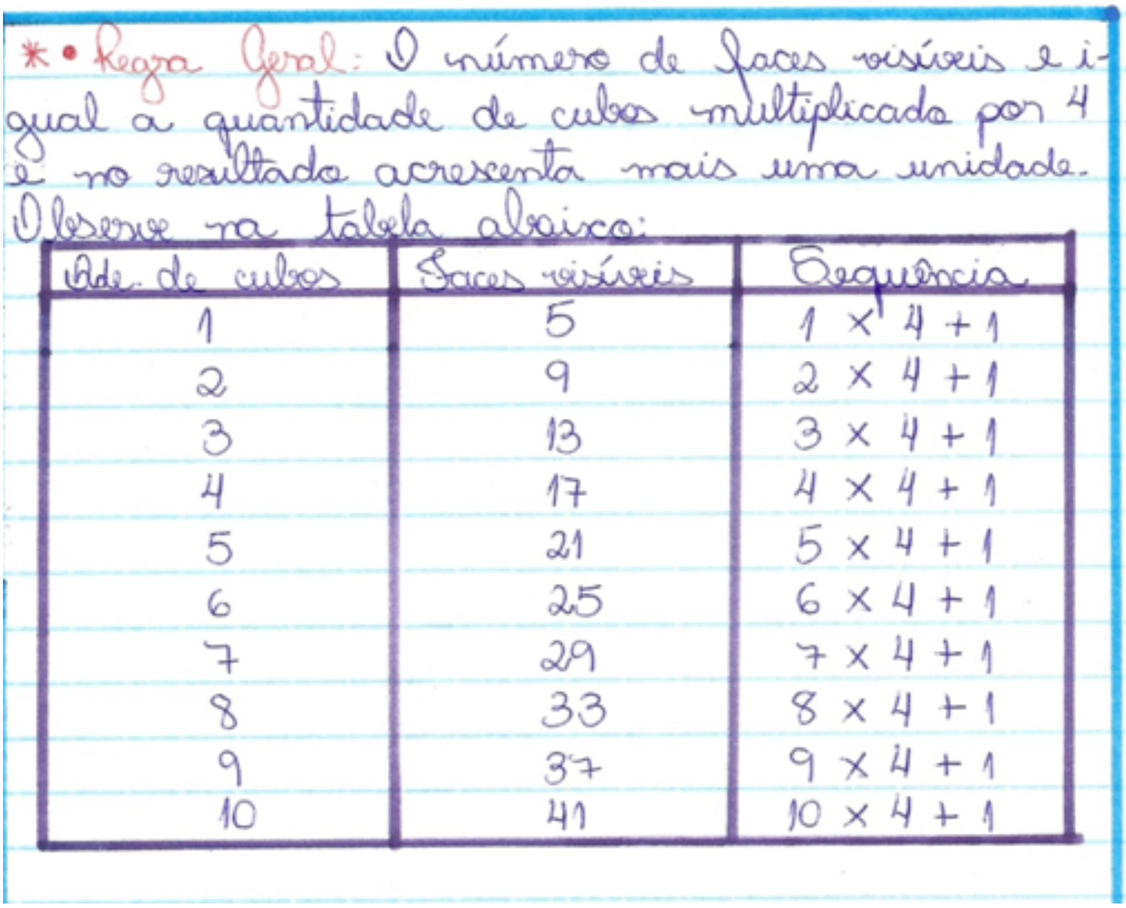
Na sequência, após a explicação da tarefa, eu coloquei um cubo sobre a mesa e convidei um aluno para que fosse até a frente da sala e contasse quantas eram as faces visíveis. Ele contou e disse o resultado em voz alta para os colegas: *cinco*. Em seguida, eu coloquei outro cubo sobreposto ao que já estava sobre a mesa e novamente convidei outro aluno para que fosse até a frente e contasse o número de faces visíveis. Ele circundou a mesa e também disse o resultado em voz alta para os colegas: *nove*.

Eu repeti esse procedimento colocando sobre a mesa três, quatro, cinco e seis cubos, respectivamente. Para cada cubo colocado, eu convidei um aluno, que foi até a frente, circundou a mesa e disse em voz alta o número de faces visíveis. Eram apenas seis cubos que eu tinha levado para a sala de aula.

Conforme eu aumentava o número de cubos e convidava os alunos para irem até a frente, os alunos verbalizavam uma das conclusões: *"o número de faces visíveis no empilhamento aumenta de quatro em quatro"*. Nesse momento, eu os questionei: *"E se na pilha tivessem 17 cubos?"*. Alguns alunos foram aumentando de quatro em quatro ao número de faces visíveis para dar o resultado, enquanto outros disseram: *"Basta multiplicar o número de cubos por quatro e somar com um que nós temos o número de faces visíveis*". Então, eu os questionei novamente: "*Por que multiplicar por quatro e somar um*?".

Muitos alunos responderam: *“porque em cada pilha, temos quatro faces que são as laterais e mais a face superior”.*

Solicitei que acrescentassem uma terceira coluna na tabela que acompanhava a tarefa proposta e reescrevessem o número de faces visíveis em função do número de cubos sobrepostos, do modo como eles verbalizaram, multiplicando o número de cubos sobrepostos por quatro e somando um, número que representa a quantidade referente à face superior. O desenho a seguir ilustra a tabela de um dos alunos, o qual vou designá-lo por A_1.



* • Regra Geral: O número de faces visíveis é igual a quantidade de cubos multiplicado por 4 e no resultado acrescenta mais uma unidade.
Observe na tabela abaixo:

Qde. de cubos	Faces visíveis	Sequência
1	5	1 × 4 + 1
2	9	2 × 4 + 1
3	13	3 × 4 + 1
4	17	4 × 4 + 1
5	21	5 × 4 + 1
6	25	6 × 4 + 1
7	29	7 × 4 + 1
8	33	8 × 4 + 1
9	37	9 × 4 + 1
10	41	10 × 4 + 1

Figura 1 Recorte de uma atividade produzida pelo aluno A_1

Nesse momento, os alunos fizeram uso da linguagem escrita para expressar a conclusão geral, que era uma das minhas intenções, pois eu usaria essa linguagem como um “trampolim” para a escrita em linguagem algébrica formal. Outra intenção era que eles percebessem que o número de faces visíveis depende do número de cubos empilhados, ainda que naquele momento o meu objetivo não fosse o de explorar o conceito de função. Eu entendo que o registro do aluno A_1, que aparece na terceira coluna da tabela, é uma manifestação do pensamento algébrico, pois envolve a percepção de regularidades, aspectos variantes, que é o número de faces visíveis e de cubos empilhados e invariantes, que correspondem ao número de faces laterais e superiores e a generalização da situação.

Um único aluno da sala chegou a uma conclusão diferente dos demais, vou designá-lo por A_2. Ele concluiu que, para um cubo empilhado sobre a mesa, é possível observar cinco faces; dois, nove faces visíveis; três cubos, treze e que, nessas situações, o número de faces visíveis pode ser escrito em função do número de cubos, empilhando do seguinte modo:

Quadro 2 – Registros do modo como o aluno A_2 pensou

Número de cubos sobrepostos na mesa	Número de Faces Visíveis
1	$1 \times 5 = 5$
2	$2 \times 5 - 1 = 9$
3	$3 \times 5 - 2 = 13$

Eu não havia entendido como ele tinha pensado, pedi que explicasse para os colegas da sala como ele havia pensado. A explicação foi essa: *"O primeiro número da expressão numérica indica o número de cubos, que é variável, cinco é fixo, porque são cinco faces visíveis para cada quantidade de cubos empilhados, a subtração indica o número de faces que não é possível visualizar, pois um cubo está em contato com o outro e assim é possível encontrar o resultado do número de faces visíveis".*

Eu fiquei surpreso, admito que demorei mais tempo do que os alunos para compreender o modo como A_2 havia pensado. Tenho lembranças de que, no dia, eu percebi como o professor precisa estar preparado para lidar com as diferentes observações, conclusões que os alunos chegam e que essa diversidade de modos de pensar enriquece o ambiente de aprendizagem. Eu pude perceber a importância do pensamento algébrico e da linguagem algébrica como modo de organização de uma situação, como uma ferramenta, e não só como objeto de estudo.

Algo que eu não explorei naquele dia e penso que deveria ter feito era pedir que todos os alunos comparassem as conclusões gerais, por exemplo, as escritas $2 \times 4 + 1 = 9$ para indicar que, para dois cubos empilhados, há nove visíveis e que esse mesmo número de faces também pode ser reescrito como $2 \times 5 - 1 = 9$. Deveria ter pedido que eles explicassem por que as expressões fornecem o mesmo número de faces visíveis, pedir que eles explorassem a equivalência das expressões numéricas.

Todos os alunos conseguiram explicar que o número de faces visíveis variava, conforme o número de cubos sobrepostos, bem como o significado de cada número nas expressões numéricas. Além disso, os alunos também tinham expressado suas conclusões por meio da língua escrita e oral.

Após os registros dos alunos que eu citei anteriormente, eu os questionei: "*Será que temos outra maneira de escrever a conclusão geral (generalização)?*". Eles ficaram pensativos, ninguém deu uma resposta. Como se tratava do final de uma das aulas, pedi que olhassem no dicionário de Língua Portuguesa e no livro de Matemática o significado da palavra álgebra, como tarefa de casa.

Na aula seguinte, fizemos uma discussão dos significados da palavra álgebra. Os alunos fizeram a leitura do que encontraram nos dicionários. Durante as leituras, alguns alunos demonstraram lembrar algo a respeito de Equação do 1.º grau, conteúdo estudado por eles no ano anterior.

Aproveitei aquele momento da aula para retomar a conclusão geral da atividade que tinham feito na aula anterior. Os alunos fizeram a leitura da conclusão geral, eu disse que a mesma conclusão poderia ser escrita em linguagem algébrica, então pedi a eles que escolhessem uma letra que representasse o número de cubos sobrepostos na pilha que estava sobre a mesa na aula anterior e eles escolheram a letra c, que é a inicial da palavra cubo. Em seguida, de forma análoga, pedi que escolhessem uma letra que representasse o número de faces visíveis: escolheram f, que é a inicial da palavra faces. Nesse momento, nós olhamos para a tabela que cada um tinha no caderno, que estava assim:

Quadro 3 – Representação da tabela feita em aula

Número de Cubos	Número de Faces Visíveis	Número de Faces Visíveis
1	5	$1 \times 4 + 1 = 5$
2	9	$2 \times 4 + 1 = 9$
3	13	$3 \times 4 + 1 = 13$
4	17	$4 \times 4 + 1 = 17$
5	21	$5 \times 4 + 1 = 21$
6	25	$6 \times 4 + 1 = 25$
7	29	$7 \times 4 + 1 = 29$
8	33	$8 \times 4 + 1 = 33$
9	37	$9 \times 4 +1 = 37$
10	41	$10 \times 4 + 1 = 41$

Solicitei que acrescentassem mais uma linha[4] na tabela e ficou desse modo:

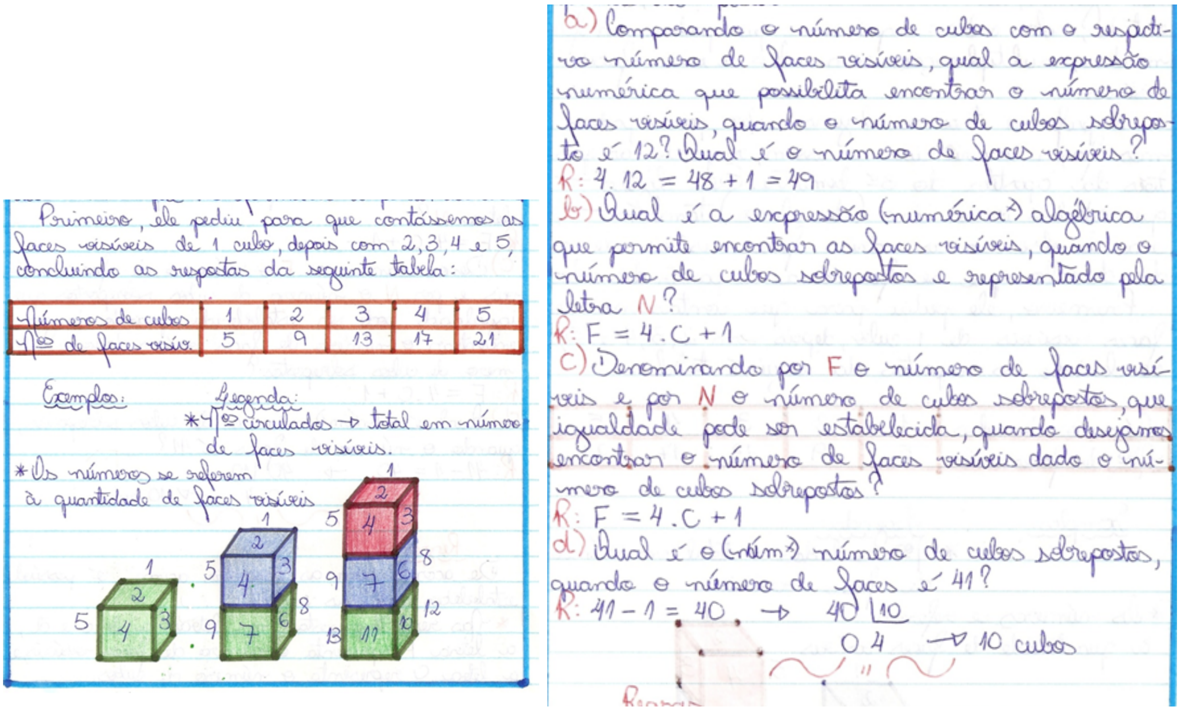
Quadro 4 – Representação do que foi feito em aula para a escrita da generalização em linguagem algébrica

Número de Cubos	Número de Faces Visíveis	Número de Faces Visíveis
1	5	$1 \times 4 + 1 = 5$
2	9	$2 \times 4 + 1 = 9$
3	13	$3 \times 4 + 1 = 13$
4	17	$4 \times 4 + 1 = 17$
5	21	$5 \times 4 + 1 = 21$
6	25	$6 \times 4 + 1 = 25$
7	29	$7 \times 4 + 1 = 29$
8	33	$8 \times 4 + 1 = 33$
9	37	$9 \times 4 +1 = 37$
10	41	$10 \times 4 + 1 = 41$
c	$4.c + 1$	$c . 4 + 1 = f$

A partir daí, ficou claro para os alunos que o número de faces visíveis podia ser escrito como $f = 4.c + 1$, que é uma expressão algébrica que representa a conclusão geral (generalização) da atividade investigada.

Em seguida, eu pedi para que os alunos fizessem um relatório e respondessem mais quatro perguntas para sintetizar a atividade realizada. A seguir, há alguns recortes dos relatórios produzidos pelos alunos A_1 e A_3, que mostram indícios da compreensão que eles tiveram após essas aulas.

[4] Na aula, primeiro explorei com os alunos as escritas da terceira coluna; assim, com a minha intervenção, eles generalizaram e escreveram a expressão algébrica c.4 + 1. Em seguida, escrevi a expressão que está na última linha da segunda coluna.



Primeiro, ele pediu para que contássemos as faces visíveis de 1 cubo, depois com 2, 3, 4 e 5, concluindo as respostas da seguinte tabela:

Números de cubos	1	2	3	4	5
Nºs de faces visív.	5	9	13	17	21

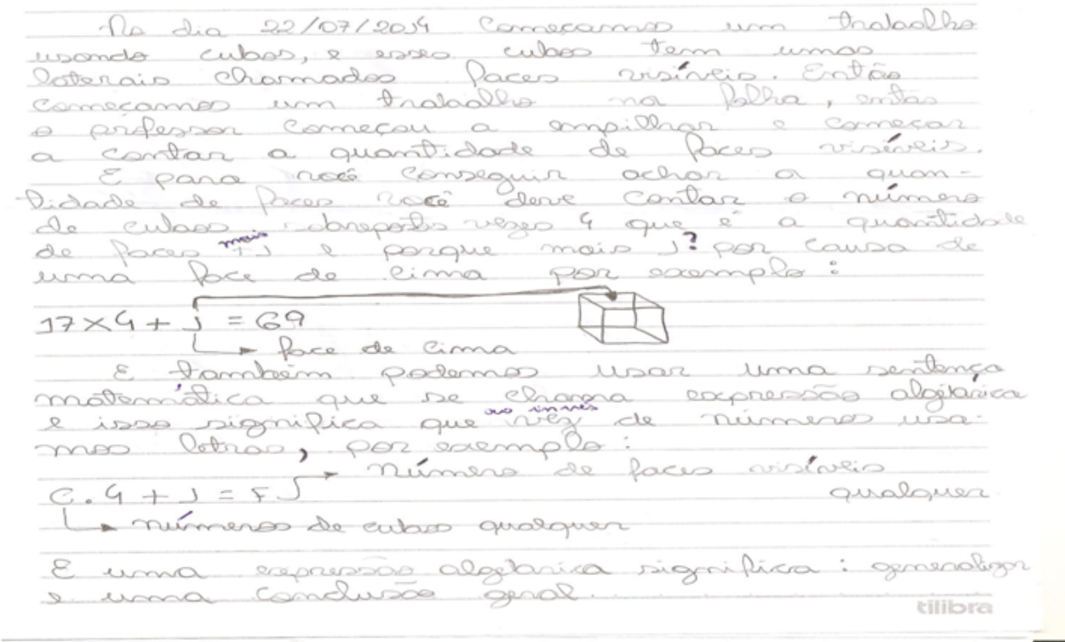
Exemplos: Legenda: * Nºs circulados → total em número de faces visíveis.
* Os números se referem à quantidade de faces visíveis

a) Comparando o número de cubos com o respectivo número de faces visíveis, qual a expressão numérica que possibilita encontrar o número de faces visíveis, quando o número de cubos sobreposto é 12? Qual é o número de faces visíveis?
R: 4 . 12 = 48 + 1 = 49
b) Qual é a expressão (numérica) algébrica que permite encontrar as faces visíveis, quando o número de cubos sobrepostos é representado pela letra N?
R: F = 4 . C + 1
c) Denominando por F o número de faces visíveis e por N o número de cubos sobrepostos, que igualdade pode ser estabelecida, quando desejamos encontrar o número de faces visíveis dado o número de cubos sobrepostos?
R: F = 4 . C + 1
d) Qual é o (núm) número de cubos sobrepostos, quando o número de faces é 41?
R: 41 − 1 = 40 → 40 | 10
0 4 → 10 cubos

Figura 2 Recorte do relatório produzido pelo aluno A_1

O recorte desse relatório dá indícios da compreensão do aluno A_1: ele conseguiu generalizar, percebeu a regularidade que estava acontecendo. É possível obter esses indícios por meio das respostas para as perguntas que eu fiz no final da atividade investigada.

O relatório de A_3 também é um exemplo de que ele conseguiu compreender o que é generalização e o modo de expressá-la em linguagem algébrica formal.



No dia 22/07/2014 Começamos um trabalho usando cubos, e esses cubos tem umas laterais chamadas faces visíveis. Então começamos um trabalho na folha, então o professor começou a empilhar e começar a contar a quantidade de faces visíveis.
E para você conseguir achar a quantidade de faces você deve contar o número de cubos sobrepostos vezes 4 que é a quantidade de faces mais +1 e porque mais 1? por causa de uma face de cima por exemplo:
17×4+1 = 69
face de cima
E também podemos usar uma sentença matemática que se chama expressão algébrica e isso significa que ao invés vez de números usamos letras, por exemplo:
C.4+1 = F → número de faces visíveis qualquer
números de cubos qualquer
E uma expressão algébrica significa: generalizar e uma conclusão geral.

Figura 3 Recorte do relatório produzido pelo aluno A_3

O relatório de A_3 mostra que ele compreendeu a ideia do uso da expressão algébrica como um modo de escrever a generalização. Além disso, é possível perceber indícios de sua compreensão a respeito de variável na escrita c.4 + 1 = f, pois escreve *"número de cubos qualquer"* para a letra c e *"número de faces visíveis qualquer"* para a letra f.

A discussão que eu realizei com os alunos a respeito do que é variável e incógnita também é algo que eu considero importante e necessário nas aulas de matemática, pois a minha experiência tem mostrado que muitos alunos da Educação Básica e do Ensino Superior demonstram não compreender essa diferença.

4. Considerações Finais

Nesse relato, eu apresentei uma de quatro atividades que foram desenvolvidas em sala de aula, para dar início ao trabalho com o cálculo literal com duas turmas do 8.º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública em Maringá no Paraná.

Além de dar início ao trabalho com o cálculo literal em que os alunos tiveram a oportunidade de comunicar suas ideias, escrever suas conclusões gerais por meio da linguagem algébrica formal, eu também tinha intenção de que os alunos "reinventassem" a álgebra, por meio da observação de padrões e de regularidades, passando por etapas semelhantes ao que o homem passou na construção da Matemática e, com isso, pudessem conjecturar e desenvolver a argumentação, algo que eu considero importante na aprendizagem em Matemática.

Outra intenção que expressei algumas vezes neste texto era a de ir além das manipulações algébricas, que era explorar regularidades e pensar genericamente, usar a álgebra como modo de organizar uma situação. Com isso, eu procurei propor tarefas em que os alunos pudessem investigar, levantar hipóteses, conjecturar, pois eu também considero que realizar investigação de natureza matemática é fundamental na aprendizagem em Matemática.

Procurar entender o modo como os meus alunos pensavam com as tarefas que eu propunha também era uma das minhas intenções, pois a partir daí eu podia dar início à escrita com a linguagem algébrica formal.

Nessa tarefa que eu relatei, eu também tinha a intenção de que os alunos percebessem a relação entre grandezas variáveis e construíssem intuitivamente a ideia de função.

Eu procurei tornar o espaço dessas aulas – em que ocorreram as atividades investigativas, bem como aquelas em que aconteciam momentos de manipulação algébrica mediante o estudo do cálculo algébrico com exercícios usuais – um espaço de Educação Matemática. As aulas oportunizaram aos alunos momentos de reflexão, de troca de ideias, de desenvolvimento da argumentação, de atitudes investigativas; em suma, momentos de trabalho cooperativo e de produção de sentidos em relação aos conteúdos estudados.

5. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática: ensino de quinta a oitava séries. Brasília, 1998.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um reprensar... a educação algébrica, **Pro-posições**, Campinas, v.4, n.1(10), p. 78-91, mar.1993. Disponível em http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/proposicoes/textos/10-artigos-fiorentinid_etal.pdf Acesso em: 22 mar. 2016.

GRAVEMEIJER, K.P.E. O que torna a matemática tão difícil e o que podemos fazer para o alterar?. **Educação matemática**: caminhos e encruzilhadas. Lisboa: APM, p. 83-101. 2005.

IMENES, L. M; LELLIS, M. **Matemática Imenes & Lellis**. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2009. 6º Ano.

IMENES, L. M; LELLIS, M. **Matemática Imenes & Lellis**. 1ª edição. São Paulo: Moderna, 2009. 8º Ano.

KAPUT, J. J. Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by “algebrafying” the K–12 curriculum. In: FENNEL, S. (Ed.). **The nature and role of algebra in the K–14 curriculum:** proceedings of a national symposium. Washington, DC: National Research Council, National Academy Press, 1998, p.25-26.

KAPUT, J. J. Teaching and learning a new algebra with understanding. In FENNEMA, E. & ROMBERG, T. (Orgs.). **Mathematics classrooms that promote understanding**. Mahwah, NJ: Erlbaum, 1999, p.133-155.

LINS, R.C., GIMENEZ J. **Perspectivas Em Aritmética e Álgebra Para O Século XXI**. Campinas: Papirus, 2001.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H.. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.