

## RÉGUA E COMPASSO: O AUXÍLIO DOS JOGOS LÓGICOS NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

*Leandro Viana da Rosa*  
UFRGS

*leandro.math@yahoo.com.br*

*Marilaine de Fraga Sant'Ana*  
UFRGS

*marilaine@mat.ufrgs.br*

### **Resumo:**

Este trabalho é um recorte de uma pesquisa de Mestrado em desenvolvimento. O objetivo principal é utilizar os jogos lógicos como um plano de fundo para abordarmos a construção geométrica por meio da régua e do compasso, além de outros conceitos. As atividades foram desenvolvidas com uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental de em uma Escola Municipal de Porto Alegre. Em especial mostramos que é possível a inserção desses materiais a fim de serem usados como ferramentas de auxílio no ensino aprendizagem de matemática. Os registros coletados no estudo de caso possibilitaram a validação da proposta.

**Palavras-chave:** jogos lógicos; régua e compasso; geometria.

### **1. Introdução**

Este trabalho é um recorte de uma pesquisa de Mestrado em desenvolvimento. Na dissertação são abordados diversos aspectos dos jogos em sala de aula, mas neste trabalho estratificamos uma parte concentrada nas construções com régua e compasso.

Para Boyer e Merzbach (2012), Tales de Mileto teria sido designado como o primeiro matemático de acordo com as histórias escritas pelo filósofo Proclo e dado as primeiras contribuições significativas para o desenvolvimento da Geometria ao demonstrar cinco importantes teoremas. Muitos outros matemáticos gregos viriam contribuir para este desenvolvimento, dos quais podemos destacar Platão, que pode ter sido o principal responsável para que as construções geométricas fossem realizadas somente com régua e compasso devido a simetria das configurações. Os autores ainda afirmam que a régua e o compasso tem sido de suma importância desde que Euclides, por volta de 300 a.C., reuniu na obra intitulada *Os Elementos*, principalmente nos seis primeiros volumes, grande parte do conhecimento de geometria daquela época.

O trabalho apoia-se nas ideias da representação semiótica de Raymond Duval e da imagem conceitual de David Tall. Segundo Duval (2009), saber distinguir um objeto de sua representação é o que leva a termos a compreensão matemática para o conceito estudado. Segundo o autor, podem existir diversas representações para um mesmo objeto.

"Toda confusão entre o objeto e a sua representação provoca, com o decorrer do tempo, uma perda de compreensão. Os conhecimentos adquiridos tornam-se então rapidamente inutilizáveis fora de seus contextos de aprendizagem: seja por falta de atenção, seja porque se tornam representações inertes não sugerindo tratamento produtivo." (DUVAL, 2009, p. 14).

Já a definição de imagem conceitual de acordo com Tall e Vinner (1981) é que ela consiste na estrutura cognitiva na mente de todo o indivíduo que está associada a um conceito dado, e que esses aspectos associados podem ser bem diferentes da sua definição formal. Podemos formalizá-la através de definições verbais ou até de representações visuais. Os autores afirmam que a imagem conceitual é construída ao decorrer dos anos através das experiências vivenciadas, e que ela pode mudar, bastando que o indivíduo se depare com novos estímulos e amadureça esse novo conhecimento apresentado.

A prática foi desenvolvida em uma Escola Municipal de Porto Alegre, com a participação de vinte e seis alunos de uma turma do nono ano do Ensino Fundamental. O objetivo do trabalho é utilizar os jogos lógicos a fim de introduzirmos conceitos e construções geométricas por meio do uso da régua e do compasso. Em especial deseja-se obter evidências que é possível a inserção desses materiais com o propósito de serem usados como ferramentas de auxílio no ensino e na aprendizagem de Matemática.

## 2. Metodologia de Pesquisa

A abordagem metodológica de investigação que foi utilizada é o estudo de caso, que é especialmente adequada quando procuramos compreender, explorar ou descrever acontecimentos. O estudo de caso "busca retratar a realidade de forma profunda e mais completa possível, enfatizando a interpretação ou a análise do objeto, no contexto em que ele se encontra, mas não permite a manipulação das variáveis e não favorece a generalização." (FIORENTINI; LORENZATO, 2006, p. 110). Os autores também comentam que o estudo de caso é aconselhável na elaboração de hipóteses, para verificação do experimento ou em certas

ocasiões até na sua revisão, mas principalmente para pesquisar características únicas, que sejam dignas da investigação por parte do pesquisador.

Para Ventura (2007) o Estudo de Caso possui aplicações muito variadas, conforme podemos notar no seguinte trecho de seu artigo:

Com base nas aplicações apresentadas, evidenciam-se as vantagens dos estudos de caso: estimulam novas descobertas, em função da flexibilidade do seu planejamento; enfatizam a multiplicidade de dimensões de um problema, focalizando-o como um todo e apresentam simplicidade nos procedimentos, além de permitir uma análise em profundidade dos processos e das relações entre eles [...] Como toda pesquisa apresenta vantagens e limitações na sua aplicação, merecendo o cuidado necessário quando buscar generalizações. Em nenhum momento, o pesquisador deverá desprezar, em busca da simplificação, o rigor científico necessário para sua validação. (VENTURA, 2007, p. 386)

De acordo com Fiorentini e Lorenzatto (2006) para o investigador ter pleno conhecimento e analisar cada detalhe do caso, é possível utilizar variados instrumentos de coleta de dados. Nessa modalidade de investigação a coleta de informações é realizada diretamente no local em que o experimento acontece. Neste trabalho foi utilizado o diário de campo, no qual registramos observações e descrições de episódios de diálogos, além das gravações em vídeo e fotos para que os detalhes da mesma atividade fossem estudados e observados em um momento posterior. Também foram requisitados registros escritos pelos alunos, nos quais eles tiveram a oportunidade de interpretar situações propostas durante os encontros, além da construção dos tabuleiros.

### 3. Experimentação

O primeiro jogo lógico relatado se chama *Halma*<sup>1</sup>. Este jogo é considerado de deslocamento, no qual cada jogador tem seu campo de origem preenchido com suas peças, sendo que o objetivo é transferir todas as peças para a posição oposta, em diagonal a sua posição inicial que suas peças ocupavam no início do jogo. Foram trabalhadas diversas evoluções de tabuleiros que podemos notar nas figuras abaixo com as peças já colocadas em suas posições de origem.

<sup>1</sup> As regras mais detalhadas do *Halma* e dos demais jogos relatados neste trabalho podem ser encontradas no site <http://www.inf.ufrgs.br/lobogames>

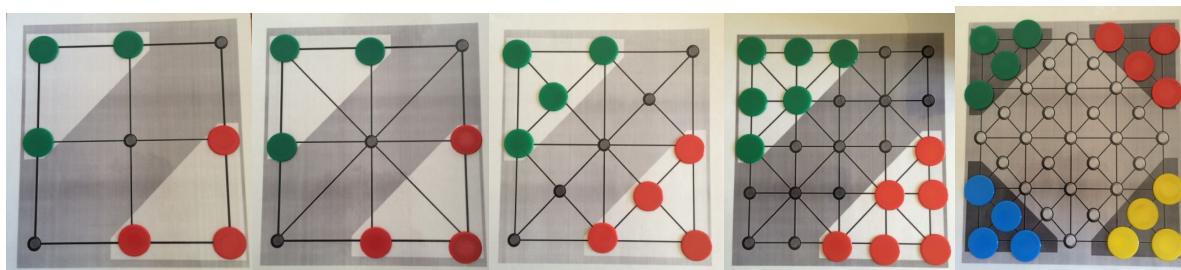


Figura 1 - Tabuleiros de Halma  
Fonte: Arquivos do Autor

Após as regras do jogo já estarem estabelecidas pelos alunos e das discussões da análise do raciocínio lógico, das estratégias adotadas e das resoluções das situações problemas encontradas durante o jogo lógico apresentado, é chegada a hora de formalizar a construção geométrica para todos os tabuleiros de *Halma*.

Antes de começar a utilização do compasso foi pedido aos grupos que descrevessem com suas palavras a definição de quadrado, pois todos observaram que o tabuleiro trabalhado neste momento era constituído dessa figura geométrica. Uma grande parte dos grupos respondeu da forma mais simples possível a pergunta, nos dizendo que "*para definir um quadrado bastava a figura ter quatro lados iguais*". Outra parte dos alunos respondeu que "*a definição de quadrado é tudo aquilo que tem quatro lados sendo duas linhas horizontais e duas linhas verticais*". Apenas um grupo fez a observação dos quatro lados iguais e quatro ângulos retos.

Notamos, observando a prática e o registro dos alunos, que eles exploraram as formas mais simples quando foi pedido a eles que definissem o quadrado. Na discussão com a turma, eles foram questionados se não existia outra figura que eles conheciam que tivesse os quatro lados iguais, mas que não fosse um quadrado. Assim após algum tempo, um dos alunos falou que a "pipa" era uma figura que possuía quatro lados iguais. A "pipa" era o objeto que esses alunos conheciam, porém naquele momento não souberam responder que ela representava o losango. Observamos que para muitos alunos bastava ter os lados iguais para poder caracterizar um quadrado, porém quando confrontados com a representação de um losango, começamos a introduzir um novo fator para ajudar o aluno na caracterização do objeto. Segundo Duval (2009), essa confusão pode gerar ao decorrer do tempo uma perda de compreensão matemática. O autor afirma que é comum os alunos confundirem as

representações e os objetos correspondentes, pois eles possuem dificuldade em executar essa conversão, não reconhecendo o objeto mesmo que seja por diferentes representações.

No caso da outra resposta obtida por parte dos alunos, foi discutido com eles que aquela definição serviria apenas para retratar um caso específico de quadrado em que os lados estariam na horizontal e vertical. Foi pedido que desenhassem um esboço de um quadrado, da mesma forma como foi definido, e que após isso girassem a folha em torno de  $30^\circ$ . Pelo fato de girarmos a folha não poderíamos mais dizer que a figura tinha seus lados nas verticais e horizontais, e não era por causa disso que deixaria de ser um quadrado. O que pode ter sido o gerador dessa definição do quadrado pelos alunos é o fato de verem o seu desenho, tanto em livros didáticos quanto nas aulas expositivas de seus professores, sempre da mesma forma. De acordo com Tall e Vinner (1981), a imagem conceitual é construída ao passar do anos e pode vir a ser formalizada através de representações visuais, sendo necessário a existência de novos estímulos para que o indivíduo venha a mudar a sua imagem. Dessa forma, a discussão com o grupo de alunos sobre a definição do quadrado e o exemplo praticado por todos, de desenhá-lo e mover a folha, é o estímulo que necessitavam para gerar novos conhecimentos e fazer com que mudassem a antiga imagem conceitual do quadrado.

Após apresentar ao grande grupo todas as respostas dadas no encontro, construímos junto a eles a definição do quadrado, assim como a definição de retas paralelas e também de retas perpendiculares. Os alunos foram separados em 5 grupos compostos por 4 estudantes e 2 grupos compostos por 3 estudantes. Após este momento, levantamos a questão de qual seria a melhor forma para a construção do primeiro tabuleiro de *Halma* trabalhado. Depois de algumas discussões em grupo, chegamos à conclusão que deveríamos começar desenhando um segmento (lado do quadrado) com o auxílio da régua, e após isso poderíamos construir outro segmento de mesmo tamanho e que tivesse um ângulo de  $90^\circ$  com o primeiro. Assim novamente foi lembrado o que havíamos falado sobre retas perpendiculares e então, em uma aula expositiva, foi mostrado aos alunos o passo a passo da construção de retas perpendiculares através da régua e compasso.

Assim os passos dados foram:

Dada uma reta e um ponto P na reta, podemos obter uma reta perpendicular à reta dada, do seguinte modo:

- Centrar o compasso no ponto P e marcar quaisquer pontos A e B sobre a reta que estão à mesma distância de P;
- Centrar o compasso no ponto A e raio igual à medida de AB para traçar um arco;
- Centrar o compasso no ponto B e com o mesmo raio, traçar outro arco;
- Os arcos traçados cruzam-se em um ponto que podemos chamar de C;
- A reta contendo PC é perpendicular à primeira reta construída.

Após os alunos realizarem essa construção, foi pedido que usassem esse conhecimento para descrever a construção do nosso objetivo. Assim eles falaram que, em primeiro lugar, deveriam desenhar um lado do quadrado escolhendo um tamanho para isso. O segundo passo seria desenhar um lado de mesmo tamanho e que fosse perpendicular ao primeiro. Para isso falaram que usariam a construção de reta perpendicular explicada pelo professor, tomando o ponto P com um dos extremos do segmento desenhado inicialmente. Para construir o outro lado perpendicular usariam o outro extremo para aplicar a construção e utilizariam a mesma medida dos lados anteriores para garantir que os lados tenham o mesmo tamanho. Por fim deveriam ligar os pontos das duas retas perpendiculares à primeira reta desenhada para finalizar o quarto lado, que seria paralelo ao primeiro lado construído e de mesmo tamanho.

Para continuarmos a construção os alunos falaram que bastava achar o ponto médio de cada lado e após isso ligá-los (ponto médio de um lado com o ponto médio do lado oposto). E assim na intersecção dos segmentos encontrariam a última casa do tabuleiro. Desse modo, a discussão de como começar a construção do tabuleiro foi finalizada junto aos alunos, e foi pedido que cada grupo desenhasse o tabuleiro e que também escrevessem com suas palavras a construção. Essa atividade foi desenvolvida para que os alunos trabalhassem com as condições de paralelismo, perpendicularismo, condições de existência de um quadrado, diagonais e construções utilizando régua e compasso.

A construção do tabuleiro pode ser dividida em 5 partes (Figura 1), sendo que a primeira parte que envolvia a régua e o compasso para a construção de retas perpendiculares e também do ponto médio, foi relatado no parágrafo anterior.

Na segunda parte os alunos perceberam que bastava adicionar as diagonais do quadrado maior para finalizarmos a etapa.

A terceira parte também foi finalizada com êxito e todos os grupos chegaram a conclusão que poderíamos visualizar o tabuleiro composto por quatro quadrados e para terminarmos esta etapa bastava desenhar as duas diagonais de cada um deles.

Na quarta parte os grupos descreveram que novamente deveriam achar o ponto médio dos lados de cada um dos quatro quadrados e após isso deveriam ligar esses pontos de modo que surgiriam duas retas paralelas aos lados verticais do quadrado maior e também duas retas paralelas aos lados horizontais da visualização dos alunos.

A quinta e última etapa também foi de simples construção. Os grupos perceberam que neste momento o tabuleiro estava composto por 16 quadrados, e que para finalizar a construção bastava desenhar as diagonais que faltavam em cada um desses 16 quadrados menores. Desse modo os alunos finalizaram o desenho do tabuleiro como podemos ver na figura abaixo:

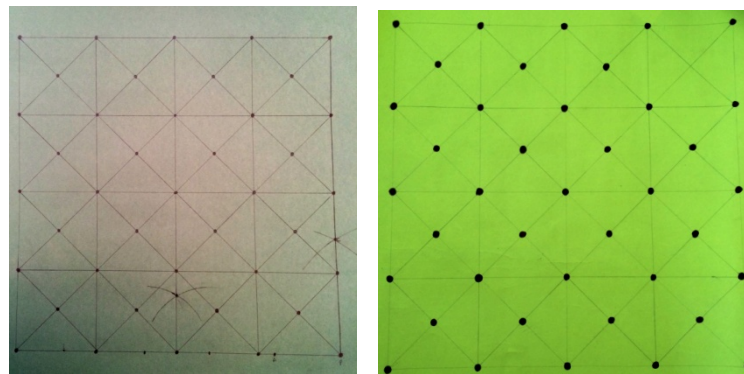


Figura 2 - Tabuleiros do jogo *Halma* construídos pelos alunos
   
 Fonte: Arquivos do Autor

Trabalhar essa primeira parte com construção, foi muito proveitoso. Optamos pelo modo lúdico para que os estudantes tivessem a oportunidade de manipular o material. O entusiasmo inicial gerado pelas táticas de jogo foi a principal motivação para que os alunos demonstrassem interesse para a segunda parte desta etapa, que envolvia a utilização de régua e do compasso, materiais que alguns alunos ainda não haviam manipulado ou raramente manuseado anteriormente.

Muitos alunos não conheciam ou não sabiam relacionar as palavras paralelas e perpendiculares com os seus significados na matemática. Novamente podemos citar a teoria da imagem conceitual por encontrarmos essa dificuldade do aluno de relacionar a palavra com a sua imagem. De acordo com Tall e Vinner (1981), para cada indivíduo a definição de um conceito gera a sua própria imagem conceitual. Desse modo, em uma sala de aula, estamos sujeitos que diversas imagens conceituais de um mesmo objeto apareçam, pois cada aluno possui o seu próprio jeito de absorver essas representações e assim, o professor é a ferramenta principal para formalizar o conceito desejado.

Dentre os jogos lógicos que foram trabalhados podemos destacar e abordar rapidamente quatro: *Cercar a Lebre*, *Raposa e Cachorros*, *Leopardo e Caçadores* e *Vacas e Tigres*.

A primeira parte da construção do tabuleiro do jogo *Cercar a Lebre* é bem similar à anterior, com o acréscimo do desenho dos triângulos utilizando um dos lados do quadrado como base e a reta perpendicular a esse lado como a altura do triângulo.

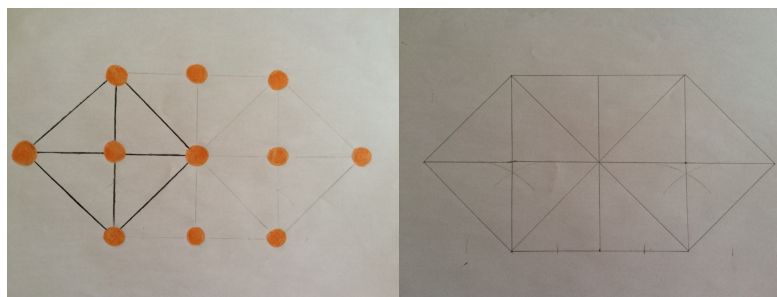
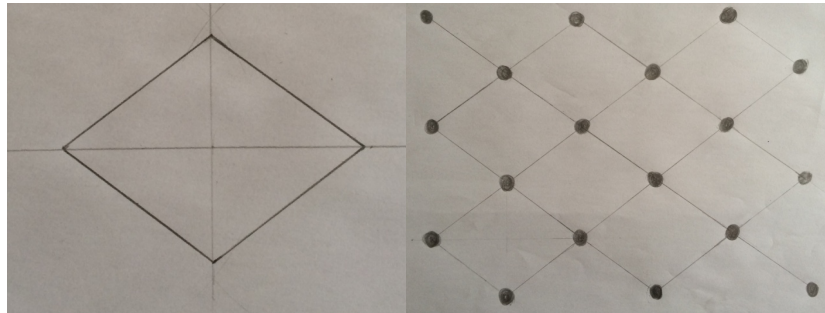


Figura 3 - Tabuleiros do jogo *Cerca a Lebre* construídos pelos alunos  
Fonte: Arquivos do Autor

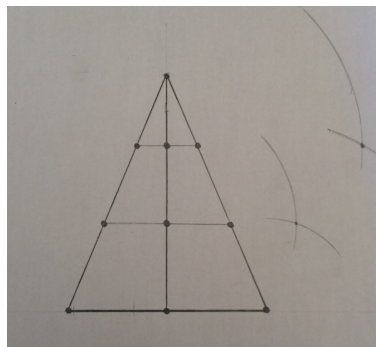
Para a construção do tabuleiro do jogo *Raposa e Cachorros* foi possível fazer uma relação com as aulas referentes ao Teorema de Pitágoras. Assim, relacionamos a construção do losango com o triângulo retângulo de lados 3cm, 4cm e 5cm para facilitar o entendimento. Desse modo, junto com os alunos, notamos que um losango poderia ser composto por quatro desses triângulos pitagóricos e a partir disso o tabuleiro poderia ser finalizado utilizando as retas suportes dos lados e das diagonais.





**Figura 4** - Construção do primeiro losango e tabuleiro final do jogo *Raposa e Caçadores*
  
 Fonte: Arquivos do Autor

O objetivo principal do jogo *Leopardo e Caçadores* foi a construção de retas paralelas utilizando a régua e o compasso, mas também devemos salientar a importância de desenhar o triângulo a partir da sua altura (neste caso os alunos voltaram a utilizar as ferramentas de régua e compasso para desenhar a reta perpendicular que passava pelo ponto médio da base).



**Figura 5** - Construção do tabuleiro do jogo *Leopardo e Caçadores*
  
 Fonte: Arquivos do Autor

Apesar de ser um tabuleiro "simples", o maior objetivo do jogo *Vacas e Tigres* foi o trabalho da noção de proporcionalidade como um facilitador para o entendimento de nossos alunos na hora da divisão de segmentos proporcionais.



Figura 6 - Tabuleiro do jogo *Vacas e Tigres* construído pelos alunos  
Fonte: Arquivos do Autor

Após serem apresentados a diversas formas de construções geométricas, os alunos optaram por formar grupos, duplas ou trabalhar individualmente na elaboração de um tabuleiro, no qual estariam livres para formalizar qualquer proposta, desde a criação de regras até o momento de manusear a régua e o compasso para o desenvolvimento de um novo tabuleiro.

Podemos notar o esforço dos alunos e a dedicação para apresentarem ótimos trabalhos, além de salientar a criatividade usada. Todos os tabuleiros foram originais, aproveitando ideias dos vários trabalhados durante os encontros e sempre utilizando a construção das retas perpendiculares, do ponto médio, da divisão proporcional de segmentos e também a utilização de uma mesma reta suporte para a continuação dos desenhos elaborados. Dentre os trabalhos apresentados destacaremos três tabuleiros construídos através da régua e do compasso:

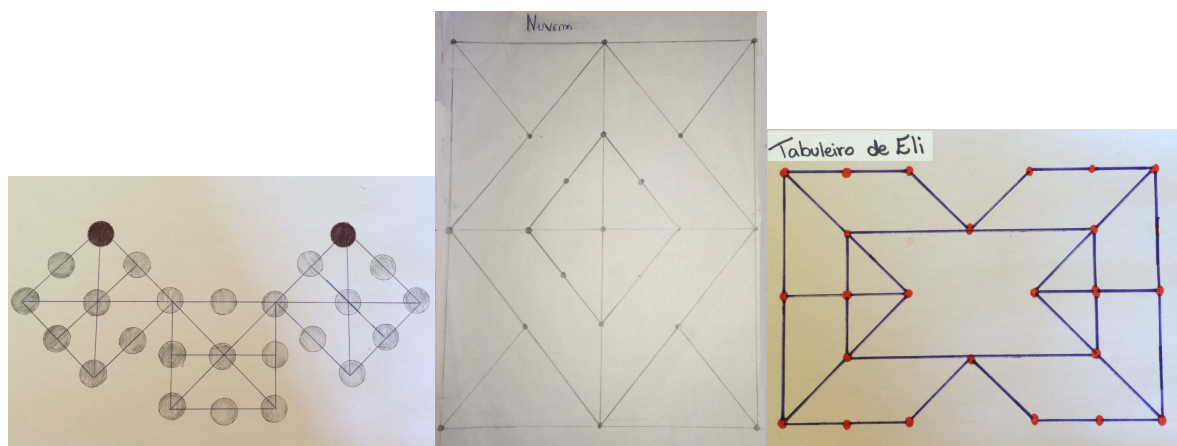


Figura 7 - Tabuleiros criados pelos alunos  
Fonte: Arquivos do Autor

O grande destaque do primeiro tabuleiro fica pelas observações que podemos ver em sua construção, pois as diagonais do quadrado central servem como suporte para a construção dos lados dos outros quadrados. As proporções são todas mantidas e a simetria poderia ser trabalhada em um projeto futuro com esses alunos. O segundo trabalho destacado foi o único que apresentou o losango como parte do tabuleiro. Todos os pontos que servem como casas também respeitaram uma rigorosa proporção e deram um tom harmonioso ao desenho apresentado. O grupo de alunos que desenhou o terceiro tabuleiro absorveu as informações do encontro que tratava de proporcionalidade e as empregou muito bem neste tabuleiro, criando um retângulo que facilitasse a divisão de seus lados em segmentos proporcionais. As retas suportes dessas divisões foram usadas para a criação do retângulo central.

#### 4. Considerações Finais

Esse trabalho tratou da inclusão dos jogos lógicos como um facilitador a fim de contribuir para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Temos evidências que os jogos lógicos que apresentamos tornaram os conceitos matemáticos que abordamos mais atrativos, pois com as construções geométricas pudemos estabelecer novas relações com a matemática, como por exemplo, as construções com régua e compasso aliadas à criatividade na construção de novos tabuleiros utilizadas pelos estudantes.

Podemos dizer que, a partir das análises realizadas sobre os resultados que foram obtidos, seja por meio dos registros escritos pelos alunos e pelo professor ou através de vídeos e fotos, é possível afirmar que esta proposta foi válida, pois tínhamos como objetivo utilizar os jogos lógicos e a régua e o compasso como ferramentas de auxílio para abordarmos os conceitos e construções geométricas que seriam fundamentais para a criação de novos tabuleiros pelos alunos, o que se efetivou.

As expectativas foram superadas, pois existia o medo da aceitação de algo novo (no caso os jogos e a construção deles utilizando como ferramenta a régua e compasso), pelos alunos. Porém, desde o primeiro encontro, a turma recebeu bem essa proposta, gostaram dos diversos jogos lógicos e também mostraram curiosidade e dedicação durante os encontros com o manuseio do compasso, instrumento utilizado pela primeira vez por alguns deles.

Com certeza nesse período houve uma troca de saberes entre o educando e o educador, e muitas questões surgiram. As dúvidas e ensinamentos ao longo dos encontros contribuíram de forma positiva tanto para o professor quanto para os alunos.

Podemos afirmar que os objetivos foram alcançados e como perspectiva futura está a análise dos jogos lógicos no decorrer do ano letivo, utilizando também softwares para a construção geométrica dos tabuleiros e investigação de outros conceitos matemáticos neste contexto.

## 5. Referências

BOYER, Carl, MERZBACH, Uta. **História da Matemática**. Trad. Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

DUVAL, Raymond. **Semióse e pensamento Humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Trad. Lênio Fernandes e Marisa Rosâni Abreu. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009.

FIorentini, Dario, LOrenzato, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas, SP, Autores Associados, 2006.

TALL, David, VINNER, Shlomo. **Concept Image and Concept Definition in Mathematics, with Special Reference to Limits and Continuity**. Educational Studies in Mathematics, 12, p.151-169, 1981.

VENTURA, Magda Maria. **O Estudo de Caso como Modalidade de Pesquisa**. Revista Socerj, Rio de Janeiro, V. 20, n.5, p.383-386, set/out, 2007.