CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I: COMO OS ALUNOS ESTÃO INICIANDO ESSA DISCIPLINA NO CURSO DE ENGENHARIA?

Geneci Alves de Sousa
CETIQT/SENAI – UNIABEU – SEEDURJ - SMERJ
prof.geneci@yahoo.com.br

Luciano Roberto Padilha de Andrade
CETIQT/SENAI – UNIG – SEEDURJ
lucpad2013@gmail.com

Resumo:
As disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral apresentam um alto índice de reprovação nas principais instituições de ensino superior do Brasil, em especial, o Cálculo I. Dessa forma, os índices de reprovação e evasão se apresentam de forma sempre elevados. Esse relato foi realizado com um grupo de alunos, matriculados na disciplina de Cálculo I, do curso de Engenharia Química de uma IES, do município do Rio de Janeiro. O objetivo desse trabalho foi verificar o grau de homogeneidade com que os alunos se encontram ao resolverem duas questões relativas aos conteúdos de funções e sequências. As dificuldades encontradas foram analisadas e classificadas de acordo com a metodologia de Análise de Erros (CURY, 2010) e os resultados sugerem a existência de lacunas na transição do Ensino Médio para o Superior, além da existência de obstáculos à aprendizagem de funções e representações gráficas.
Palavras-chave: Cálculo; Investigação; Dificuldades de aprendizagem

1. Introdução

A disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (Cálculo I) ainda apresenta alto índice de reprovação e evasão, em alguns Cursos de Graduação de diversas Instituições de Ensino Superior (IES). Os elementos causadores, bem como sugestões às prováveis soluções desse problema, têm sido objeto de estudo de diferentes pesquisadores em nível nacional e internacional.

Segundo Rezende:

> [...] um dos grandes desafios no ensino superior de matemática ainda é, sem dúvida, o tão propalado "fracasso no ensino de Cálculo". Creio que, se investigarmos a origem histórica de tal "fracasso", verificaremos que este tem início desde o momento em que se começa a ensinar Cálculo. (REZENDE, 2003)

Podemos citar também um grupo de pesquisa da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ) - Projeto Fundão – que há cinco anos vem pesquisando como se dá a transição do Ensino Médio para o Superior, testando diferentes atividades com alunos do Ensino Médio e calouros de alguns cursos de Graduação, analisando e propondo sugestões.

Este trabalho foi desenvolvido a partir da observação, pelo grupo do Projeto Fundão, de duas questões que envolviam o conceito de funções e de sequências. Ambas possuíam componentes curriculares cujos resultados, após aplicação e análise, poderiam servir para contribuir na pesquisa mais ampla.

A aplicação se deu em uma instituição de Ensino Superior localizada no município do Rio de Janeiro, com 18 alunos de um total de 22 matriculados no primeiro período do curso de Engenharia Química. Inicialmente foi solicitado que todos resolvessem essas duas questões.

A primeira questão apresentava o gráfico de duas funções A(x) e B(x), onde ambas eram definidas por duas sentenças. Os gráficos eram referentes aos preços cobrados por duas copiadoras ao efetuarem uma quantidade de cópias “x”. O aluno deveria, a partir desse gráfico, extrair as informações necessárias para que pudesse expressar a lei de formação de cada função. Em um segundo momento, seria necessário encontrar um ponto comum, entre os dois gráficos, e comparar os resultados encontrados ao se considerar que foram realizadas 360 cópias.

A segunda questão apresentava uma sequência de triângulos que, a partir de um triângulo equilátero, era dividido em 4 triângulos equiláteros e congruentes, criando um padrão geométrico (Triângulo de Sierpinski). O aluno deveria identificar e compreender o padrão, ser capaz de reproduzir outras etapas da repetição, determinar uma expressão matemática que pudesse relacionar o número de triângulos sombreados à etapa da construção do padrão e representar graficamente as duas leis de formação.

2. Referencial Teórico

Como metodologia, optamos pela análise de erros de Cury (2010), tendo em vista que a produção escrita dos alunos possibilita avaliar as soluções apresentadas e entender ou compreender as causas dos erros cometidos.

A definição de "erro" ainda pode ser uma questão a ser consensual entre pesquisadores. Podemos observar em Cury (2010), que:

> [...] se entenda como erro, na resolução de uma questão, o que não corresponde à produção esperada de um aluno (ou professor) que já deve ter tido contato com os conteúdos apresentados na referida questão ou com estratégias de resolução de problemas em Matemática. É, portanto, um referencial que toma como suposta verdade o conhecimento institucional, ou seja, o que a instituição "Escola" espera ver apresentado por alunos (ou professores) de um determinado nível de ensino, em suas produções escritas em Matemática. (CURY, 2010, p.2)

A análise do erro cometido pelo aluno pode nortear o desenvolvimento da resolução e como ele a efetuou. Sendo assim, torna-se um elemento importante para o desenvolvimento do conhecimento e um indicador do que o aluno é capaz ou não de desenvolver. Segundo Macedo (1997), para que o aluno possa superar o "erro", é necessário que passe por três níveis:

> ... o primeiro caracteriza-se pela impossibilidade de resolver a situação... no segundo é capaz de solucionar o problema de maneira empírica, sendo que o erro só é percebido após ter sido cometido... o terceiro tem como característica a possibilidade da solução do problema, ou seja, o erro torna-se antecipável (MACEDO, 1997, p.41).

Pinto (2004) diz que, em Matemática, não se deve denotar ao "erro" o status de um "vírus que deve ser imediatamente eliminado". Temos que considerar que todos nós possuímos limitações e, elas são diferentes. Podemos utilizá-los como um elemento norteador para que possamos reconstruir as atividades, a partir dos erros cometidos. Segundo ele, a análise de erros pode ser explorada com o objetivo de nortear as ações para a correção das possíveis falhas ao se trabalhar o conteúdo.

> a análise de erros, enquanto meio, possibilita que os erros sejam explorados e compreendidos a partir de suas origens, fornecendo valiosos subsídios para o professor planejar a partir de uma pedagogia diferenciada ações pertinentes à evolução do processo. (PINTO, 2004, p.130)

A escolha do conteúdo de funções para se averiguar de que forma os alunos chegam ao curso Superior, em especial na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, se deve ao fato de o considerarmos de grande importância para todos os alunos em geral e, não só para a formação do futuro engenheiro. Caraça (1984) enfatiza a correspondência entre conjuntos na introdução ao conceito de funções. De fato, pois, podemos destacar a variedade de aplicações nas quais utilizamos o conceito de funções, como: o custo operacional, o controle de temperatura e pressão, o crescimento proporcional, etc.

2. Atividades

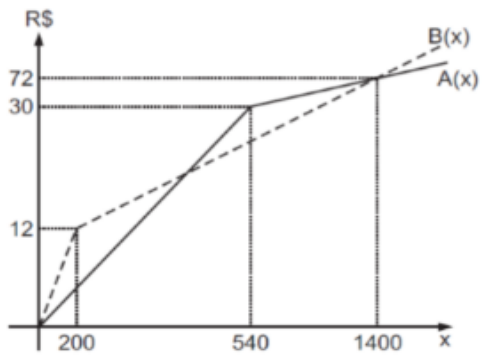
Apresentaremos a seguir as atividades aplicadas aos alunos.

Atividade 1

A figura mostra os esboços dos gráficos das funções *A(x)* e *B(x)*, que fornecem os preços que as copiadores, A e B, cobram para fazer x cópias.

a) Qual a expressão das funções *A(x)* e *B(x)*?

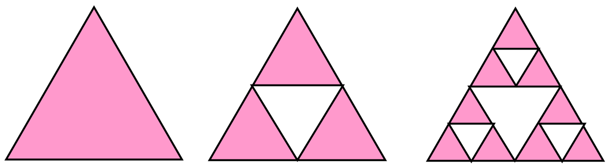
b) Compare os valores das copiadoras A e B para fazer 360 cópias.



Atividade 2

Triângulo de Sierpinski (Adaptado de Carvalho,1997, p.29)

Observe o padrão geométrico "Triângulo de Sierpinski", construído a partir de um triângulo equilátero, dividido em 4 triângulos equiláteros congruentes, cujo triângulo do centro é desconsiderado, restando dessa forma apenas 3 triângulos equiláteros.



a) Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos triângulos coloridos compõem o tapete?

b) Na 5ª figura, quantos triângulos coloridos compõem o tapete?

c) A figura que possui 243 triângulos coloridos está em que etapa da construção do tapete?

d) Escreva uma regra que relaciona o número de triângulos coloridos do tapete à etapa em que se encontra a construção.

e) Como ficaria a lei de formação começando do segundo triângulo?

f) Represente graficamente as duas leis de formação.

3. Análise das atividades

Como a primeira atividade possui dois itens, estes serão analisados separadamente.

ISSN 2178-034X

Descartamos inicialmente três alunos que deixaram o item em branco, ou seja, sem resolução. Dos quinze restantes analisados, apenas quatro discentes apresentaram a ideia de proporcionalidade, seis expressaram em linguagem algébrica o problema, seis entenderam o uso dos pares ordenados na construção das funções e apenas três alunos analisaram o crescimento, decrescimento e coordenadas dos pontos de intersecção nos eixos x e y para a resolução.

Fazendo uma análise das resoluções do item "a" pode-se perceber que os discentes não conseguem associar os conceitos de função aprendidos no ensino médio para analisar um gráfico. A identificação das relações apresentadas pelo gráfico poderia tornar a resolução mais "fácil", dessa forma, não havendo a necessidade de utilização de formas decoradas.

A partir dos resultados apresentados desse item, somos levados a concluir que os discentes já se acostumaram a processos de memorização de resoluções e não conseguem desenvolver um raciocínio dedutivo. Os processos de resoluções mecânicos propostos no Ensino Médio estão fixados no discente, sendo ele incapaz de identificar o conceito matemático em processos do cotidiano.

Apesar de não ser objeto de estudo mais detalhado podemos atribuir ao campo linguístico as dificuldades de resoluções por alguns discentes, pois eles não conseguem identificar no corpo da questão as ferramentas para a resolução da mesma.

Os discentes não encontram nenhum significado nos conceitos de função do 1º grau, iniciado no Ensino Fundamental e ampliado no Ensino Médio, as respostas apresentadas sugerem que há um predomínio da memorização sistemática. Dessa forma, após a realização das provas, o conteúdo não significativo é apagado da memória, como se não tivesse importância.

Analisando o item "b", poucos discentes utilizaram-se do modelo matemático construído no item "a" para a resolução. Verifica-se que há uma deficiência ao tentar reconhecer o domínio das funções para cada copiadora.

Sob este aspecto, Lopes (1999) reforça que:

> o conhecimento matemático é em camadas que se superpõem. Você começa a aprender Matemática no primeiro ano da escola. Se você não sabe dividir, não vai saber o que é uma taxa, se você não sabe o que é uma taxa não vai saber o que é uma derivada e assim por diante. Essa é talvez uma das

> principais razões porque existem tantas reprovações em Cálculo em nossas universidades. Em muitos casos, os estudantes universitários não sabem os conceitos matemáticos anteriores que são necessários para fazer os cursos de Cálculo. (LOPES, 1999, p.125)

Através da análise das soluções apresentadas pelos discentes, pode-se concluir que os discentes, quando ingressam no ensino superior na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, em sua maioria, possuem carências de conteúdos básicos de funções que são requisitos necessários para se introduzir o conceito de limites. Além do conhecimento anterior sobre funções, mais especificamente se faz necessário o conhecimento referente à interpretação de gráficos. Pode-se destacar a carência de conhecimento apresentado nas resoluções sobre as propriedades das funções, em que, conhecimentos sobre variáveis dependentes e independentes, domínio e imagem, são imprescindíveis para construção e análise do estudo de limites.

Analisando os desenvolvimentos da segunda questão podemos destacar:

a) **Desenhe a próxima figura da sequência. Quantos triângulos coloridos compõem o tapete?**

Ao fazer uma análise do item “a”, percebe-se claramente que os alunos têm o domínio da construção da figura, um padrão de resolução proposto no enunciado da questão, vê-se que eles baseiam a resolução das questões simplesmente na manipulação dos dados visíveis, a leitura e a interpretação da questão não são realizadas.

b) **Na 5ª figura, quantos triângulos coloridos compõem o tapete?**

As respostas apresentadas nesse item sugerem que as deficiências apresentadas podem não ser apenas na questão analítica, mas também na compreensão do abstrato para criação do modelo matemático. Observa-se que há dificuldades em desenvolver questões simples com relação ao estudo da matemática, logo comprometendo o processo de ensino e de aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. As respostas indicam que os alunos desta amostra não compreendem o que é uma sequência, não sabem analisá-la como processo lógico, não sabem desenvolver uma noção intuitiva, ou seja, não sabem pensar sistematicamente.

c) **A figura que possui 243 triângulos coloridos está em que etapa da construção do tapete?**

ISSN 2178-034X

No item "c", a dificuldade na resolução se justifica pela falta de habilidade em observar o padrão de construção de cada figura, identificar a dependência entre as grandezas envolvidas e a criação de um modelo matemático que o auxiliasse. Analisando as tentativas de resoluções, há indícios que nos levam a concluir que os alunos apresentam grandes dificuldades decorrentes da ausência dessa forma de trabalho no Ensino Médio. Podemos considerar estas lacunas de aprendizado como um obstáculo que atua negativamente na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral.

Tall (1991) também sinaliza que a deficiência ou ausência do pensamento matemático avançado pode ser considerado como fator condicional para um resultado satisfatório dos alunos nas disciplinas de Cálculo, ao afirmar que

> "[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições." (Tall, 1991, p.20)

d) Escreva uma regra que relaciona o número de triângulos coloridos do tapete à etapa em que se encontra a construção.

Apenas dois alunos resolveram corretamente esse item. Eles apresentam grande deficiência em transportar o que se identifica no problema para uma linguagem matemática. Esta deficiência influencia negativamente no aprendizado dos conceitos de limite e derivada de uma função, a base do ensino do Cálculo Diferencial I.

Nasser, Sousa & Torraca (2015, p.6) também pesquisaram as dificuldades de aprendizagem em Cálculo e observaram que: "[...] Em geral, a interpretação do enunciado de uma situação problema e sua transposição para uma expressão analítica da função que envolve não são tarefas fáceis para alunos do Ensino Médio, e mesmo no início da graduação".

e) Como ficaria a lei de formação começando do segundo triângulo?

Obtivemos o mesmo resultado que no item anterior, tendo em vista se tratar de itens correlatos. Novamente a dificuldade em transpor da linguagem verbal para a analítica é evidente ao observar as tentativas dos alunos em montar um modelo que descreva a relação entre os valores conhecidos e desconhecidos (variáveis) de cada triângulo. Dessa forma, os resultados sugerem que tais conteúdos não foram bem desenvolvidos no Ensino Médio.

Segundo Duval,

> "Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato". (Duval, 2003, p. 31)

f) Represente graficamente as duas leis de formação.

Da mesma forma que nos itens "d" e "e", e por consequências deles, também apenas dois alunos tentaram esboçar os gráficos, não obtendo sucesso. Não foram observadas por eles as características exponenciais do gráfico, unindo pontos por segmentos de retas, além da identificação de pontos no plano cartesiano. A falta de base gráfica pode dificultar na compreensão dos diferentes conceitos envolvidos no aprendizado de limites e derivadas de uma função.

Em sua pesquisa com alunos do Ensino Médio e do Curso de Engenharia, em especial na disciplina de Cálculo I, Nasser, Sousa & Torraca (2015, p.4) observaram as mesmas deficiências e classificaram como sendo um obstáculo à aprendizagem. Segundo eles, os alunos têm "a crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta, deixando de considerar a lei de formação da função".

4. Considerações Finais

Através da análise das soluções apresentadas pelos discentes, pode-se concluir que os discentes quando ingressam no ensino superior na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, em sua maioria, possuem carências de conteúdos básicos de funções. O futuro engenheiro necessita compreender a relação de correspondência entre duas grandezas para poder entender os novos conceitos a serem introduzidos na disciplina de Cálculo. De acordo com Caraça (1984), o conceito de função está ligado à ideia de correspondência entre dois conjuntos. A função é vista como uma busca da compreensão da 'Realidade', com suas características fundamentais: a interdependência e a fluência (p. 109).

A construção de gráficos deve ser incentivada a partir das transformações no plano, em especial com o auxílio de software dinâmicos, Geogebra por exemplo, que possibilitarão uma maior interação e, consequentemente, melhor aprendizagem dos discentes. Nesse aspecto Palis (2010) destaca que a utilização de ferramentas tecnológicas pode auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem de funções e na construção de seus respectivos gráficos.

A utilização do Triângulo de Sierpinski evidencia que os alunos não conseguem desenvolver um raciocínio lógico ao tentar identificar um padrão de repetição na construção das figuras, fazer a transposição da linguagem verbal para a analítica, representar graficamente uma situação problema. Tais dificuldades podem ser um “entrave” para os alunos que iniciam na disciplina de Cálculo Diferencial. Vários pesquisadores como Nasser (2009), Nasser, Sousa e Torraca (2012) e Brousseau (1983), sinalizam esses “entraves” e os classificam como sendo um obstáculo no aprendizado.

Dessa forma, as pesquisas citadas indicam que uma mudança na forma de abordar tais conteúdos, na escola básica, torna-se necessária para que possamos reduzir, ou até mesmo eliminar, tais obstáculos na aprendizagem e, com isso, eliminando o estigma de que a disciplina de Cálculo é a vilã dos cursos de Engenharia.

5. Referências

BROUSSEAU, G. - Les obstacles epistemologiques et lês problémes en mathématiques. Recherches en Didactique dês Mathématiques, 4(2), 165-198, 1983

CARAÇA, B. DE J. Conceitos Fundamentais da Matemática. Livraria Sá da Costa Editora. Lisboa, Portugal, 1984.

CARVALHO, M. C. C. S. Padrões numéricos e sequências – São Paulo: Moderna, 1997.

CURY, H, Análise de Erros, Anais X ENEM 2010 <http://www.gente.eti.br/lematec/CDS/ENEM10/?info_type=invitation&lang_user=> Acessado em 15/04/2016.

DUVAL, R. - Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia D. A. (org.). Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica (pp. 11-33). Campinas: Papirus, 2003.

LOPES, A. Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de cálculo da UFRGS. Matemática Universitária, n26/27, p.123-146, 1999.

MACEDO, L., 4 cores, senha e dominó. Oficina de jogos em uma perspectiva construtivista e psicopedagógica, 2ª edição, São Paulo: Casa do Psicólogo, 1997.

NASSER, L. - Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates (pp. 43-58). SBEM, 2009.

NASSER, L., SOUSA, G. & TORRACA, M. - Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil, 2012.

NASSER, L., SOUSA, G., TORRACA, M. Aprendizagem de cálculo: Dificuldades e sugestões para a superação, Anais do XIV CIAEM 2015
<http://xiv.ciaem-redumate.org/index.php/xiv_ciaem/xiv_ciaem/paper/viewFile/654/291>
Acessado em 15/04/2016.

PALIS, G. - A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática (em CD). Salvador, BA, 2010.

PINTO, N. B., Avaliação da Aprendizagem como prática investigativa. In ROMANOWSKI, J. P., MARTINS, P. L. O. e JUNQUEIRA, S. R. A. (orgs) Conhecimento local e conhecimento universal: a aula, aulas nas ciências naturais e exatas, aulas nas letras e artes. Cutitiba: Champagnat, 2004.

REZENDE, W. M. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese de Doutorado. São Paulo: FE-USP, 2003.

TALL, D. (Ed.) - Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, Kluwer Academic Publ, 1991.