O ESTUDO DAS ADIÇÕES DE FRAÇÕES COM DENOMINADORES DIFERENTES ATRAVÉS DAS REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS

Conceição de Lourdes Farias Brandão
FACIG – Faculdade de Ciências Humanas e Sociais de Igarassu
Cecinha.brandão@hotmail.com

Manoel Messias Cardoso Lobo Ribeiro
Faculdade de Ciências Humanas de Olinda
Manoel_lobo@yahoo.com.br

Resumo

O presente artigo discute acerca da docência no tocante à adição de frações com denominadores diferentes. Para tanto, adota um viés filosófico pautado na Fenomenologia Husserliana, doutrina filosófica de rigor científico e encarregada de investigar como os objetos do conhecimento surgem na consciência do homem, independentemente de preconceitos ou julgamentos e se importando apenas com aquilo que se mostra a si mesmo a partir de si mesmo. Igualmente, adota também a Ontologia como pano de fundo, uma vez que a mesma é o ramo da Filosofia encarregada de estudar o ser enquanto ser. Nossa proposta é a de conscientizar e sensibilizar os docentes de modo em que eles pensem a respeito do objeto fração enquanto ser ou essência, isto é, traços ou caracteres que compõem tal objeto do conhecimento. É com base nesse pensamento que esperamos o futuro desenvolver de um trabalho docente pautado na descoberta subjetiva do aluno.

Palavras chaves: Adição de frações heterogêneas, fenomenologia, percepção, ensino-aprendizagem e subjetividade.

1. Introdução

Iniciamos o presente artigo apresentando um fragmento da história da Matemática, ciência a qual se relaciona, obrigatoriamente, com os números, as grandezas e as formas. Embora a Matemática, tal como nos informa Boyer (1974), lide necessariamente com os números e as grandezas, esta ciência não se reduz a esses meros feitos. Complementando, o autor também apresenta o feliz fato de a Matemática ter se libertado do mundo natural, ambiente o qual, obviamente, se mostra insuficiente perante o que podemos fazer com ela.

Precisamente acerca dos números, ao pensarmos friamente e de modo lógico, perceberemos imediatamente que eles se apresentam como objetos mentais, ou seja, são criações psicológicas capazes de serem associadas a quaisquer outros objetos, sejam eles físicos ou igualmente mentais. Tais associações não são, como nos relata Darwin (1871) por intermédio de Boyer (1974), exclusividade da espécie humana; alguns animais superiores dotados de memória e imaginação são capazes dessas mesmas competências.

De acordo com os estudos de Darwin (1871, citado por BOYER, 1974), animais como os corvos são capazes de distinguir conjuntos com até quatro elementos, fato que, consequentemente, nos leva a pensar na ideia de percepção, distinção e contagem, mesmo que os números possivelmente não sejam “desenhados” no psiquismo desses seres, tal como nos nossos. No entanto, mesmo diante da suposta improbabilidade das representações gráficas dos números em referência aos não-humanos, o mérito oriundo da relação que os corvos e outros animais similares mantêm frente à Matemática não pode ser ignorado.

Se desejarmos exemplos mais próximos de nós e existentes nos dias atuais, tomemos então os gatos como entes exemplares. Veremos o quão fácil é perceber como eles lidam com situações que envolvem Matemática em seus cotidianos, embora eles não o façam identicamente aos humanos. A nível ilustrativo, é sem esforço tomar como base os “cálculos e medições” que esses felinos realizam quando vão saltar de um lugar para outro. Além disso, para os mesmos, há também a ciência de que pular de determinadas alturas pode colocar suas vidas em risco. Que representa tal feito senão uma Matemática significativa e aplicada na vida por excelência?

Foi com o breve exposto que quisemos deixar clara a importância e a implicação da questão mental, isto é, a tomada de consciência, o modo de perceber as situações e as estratégias psicológicas que os animais e os homens utilizam para solucionar os problemas do cotidiano ao fazerem uso da Matemática na vida por excelência. Acerca da referida ciência, cabe informar que o presente escrito tem como objetivo tratar da problemática soma de frações heterogêneas, mais precisamente no campo da percepção e da docência.

Quase finalizando a corrente secção e simultaneamente colocando o acima exposto em outras palavras, tomamos Berkeley (MORENTE, 1970) e seu famoso discurso como referência para alegarmos que ser é ser percebido, uma vez que as coisas são tal como as percebemos, já que por obrigação estamos implicados na problemática do conhecimento e nos métodos para chegarmos até ele. Desse modo, não podemos conceber a adição de frações com denominadores diferentes como algo fácil ou difícil em si mesmo, pois não se trata de uma qualidade inerente ao objeto em si, mas de uma característica doada por nós. O quão fácil ou difícil no presente caso dependerá do modo como enxergamos o objeto em questão e como expomos durante a prática docente frente aos nossos alunos.

Portanto, focar a problemática da aquisição do conhecimento por parte do sujeito cognoscente a partir de um viés psicológico, lógico, ontológico e matemático, constitui o cerne mesmo da preocupação dos autores. Sendo tal sujeito um dos elementos essenciais para que o fenômeno conhecimento ocorra (MORENTE, 1970), não poderemos de modo algum desprezar as relações que o mesmo mantém com os objetos conhecidos, pois sozinho nada existe, nada pode ser. Sujeito e mundo, no presente caso, formam unidade.

2. As ideias e as essências

Conta-nos a história da Filosofia acerca de Platão (MORENTE, 1970), homem responsável por cunhar o pensamento no qual há um mundo invisível e intangível em relação aos sentidos, mas perfeitamente acessível por meio do intelecto e da razão: é o mundo das ideias. Diferentemente do mundo sensível, o mundo das ideias não perece como o primeiro e guarda as essências ou "matérias-primas" (enquanto eidos) de tudo o que hána materialidade.É justamente por isso que mundo sensível não passa de uma mera "cópia de má qualidade" do mundo das ideais, porque neste último tudo é eterno e nada muda. Deixe-nos explicar melhor.

Por exemplo, se analisarmos o ser (essência) quadrado (SÁ, 2014), veremos que ele não é um objeto físico, mas ideal ou mental. Ademais, seu modo de existir não poderá ser outro que não sendo uma figura geométrica plana, dotada de quatro lados de mesmo comprimento e possuindo quatro ângulos em 90º (noventa graus) cada. Por se tratar de um objeto ideal ou mental, conforme dito anteriormente, faz-se impossível representá-lo fisicamente com precisão, pois os objetos físicos possuem espessura e por conseguinte exigem a tridimensionalidade do espaço.

Desse modo, ao considerarmos as ideias como essências ou "matérias-primas" (no sentido qualidades ou características) que fundamentam os objetos do mundo sensível, automaticamente dispomos daquilo que é comum e invariável em relação aos entes da mesma categoria (aquilo que todo quadrado tem em comum, no presente caso). Epistemologicamente falando, a imutabilidade dos objetos do mundo das ideias se apresenta como uma espécie de blindagem em relação ao tempo e ao argumento. É justamente por isso, na visão de Platão (MORENTE, 1970), que os objetos ideais são de fato reais, já que dispõem das competências mencionadas.

A mesma ideia se aplica ao ser fração. A respeito dele, veremos que, ao contemplarmos logo mais um trecho da história da humanidade, mais precisamente acerca das culturas que fizeram uso da fração, sua essência sempre esteve presente e de modo imutável, uma vez que se trata de um objeto ideal bem construído. A fração é o que é e não pode existir de outro modo senão como a ligação entre parte e todo tomado como referencial. Conhecendo a fração e bem ciente do seu modo de ser, cabe apenas ao homem alterar a sua percepção em relação a esse objeto, de modo a facilitar a prática docente quando ela o aborda. Lembre-se que os atributos de fácil e difícil não são inerentes ao ser da fração, mas doados pelo humano que o concebe mentalmente.

4. História das frações

Segundo Boyer (1974), os homens da Idade da Pedra não utilizavam frações, valiam-se apenas do uso dos números naturais. Entretanto, na Idade do Bronze, começou a surgir a necessidade do conceito de fração e notação de frações. Já no Egito, durante a época das cheias, as águas do Nilo subiam muitos metros acima do seu leito normal e inundavam uma vasta região ao longo de suas margens. Continuando, quando essas mesmas águas baixavam, elas deixavam uma vasta faixa de terras férteis e prontas para cultivo.

Ainda por volta de 3.000 a. C., um faraó repartiu o solo às margens do rio Nilo entre os poucos agricultores disponíveis. Nesse contexto, todos os anos, durante os meses de junho, o nível das águas começava a subir e desmarcava o limite do terreno previamente estabelecido pelos funcionários do governo. Assim, através desse costume, a geometria e, consequentemente, as medidas por meio das frações, começaram a ser desenvolvidas no Egito.

Já os Mesopotâmicos utilizavam as frações em registros das suas transições comerciais, representadas com os mesmos valores monetários da sua cultura. Os chineses, por sua vez, conheciam as operações sobre frações comuns, para as quais achavam o mínimo múltiplo comum. Em outros contextos culturais era aplicado analogicamente às diferenças entre os sexos, referindo-se o numerador como “filho” e o denominador como “mãe”, assim tornando mais fácil a manipulação das regras dos cálculos de frações.

Atualmente o estudo dos números fracionários tende a se tornar cada vez mais difícil e complicado, pois os alunos não se sentem familiarizados nas diferentes expressões do tipo: 2 metros, meio dia, 1/4 de um barbante, um quarto do quilo de café, 3/5 de volta numa quadra e 20%, e tampouco estimulados pelo professor a pesquisar como surgem e são vistas as frações no cotidiano.

O ensino de frações deveria ser gradativo e relacionado com outros conteúdos simultaneamente, como os números decimais e porcentagem. Conforme Lopes (2008):

> (...) Não é de se estranhar, portanto, que os alunos tenham dificuldades, e que certos conceitos e procedimentos têm permanência curta, resistindo quando muito, do dia do 'ponto ensinado' ao dia da prova. Esses mesmos estudos sugerem que o ensino de frações deve ser realmente conceituadas e incorporadas as estruturas de pensamento dos alunos(...)

Em síntese, as ideias acima se referem ao modo como o professor consegue conduzir o aluno a observar as situações da vida e sendo bem exploradas, manipuladas em materiais concretos possa levar o aluno à compreensão de diferentes significados das frações e historicamente como surgiram as frações e às necessidades de medidas.

5. Fenomenologia e ser ou essência

Dissemos anteriormente, ao citarmos Platão (MORENTE, 1970) e o mundo das ideias, que as essências – que são objetos ideais – constituem os fundamentos de quaisquer objetos existentes no mundo físico. É seguindo exatamente essa mesma linha de pensamento que apresentamos agora ao leitor a Fenomenologia, uma doutrina filosófica composta por um método, cujo objetivo é encontrar as essências dos objetos do conhecimento. Entretanto, é importante ressaltar de antemão que a investigação das essências pode dispensar seus correlatos físicos: interessa apenas aquilo que está presente na consciência humana, nua e cruamente.

A Fenomenologia (GOTO, 2008; STRUCHINER, 2007; MOREIRA, 2004) se encarrega de investigar aquilo que surge à consciência do homem, deixando de lado os pressupostos ou quaisquer a prioris que o sujeito possa ter em relação ao objeto intuído. Como o objetivo é conhecer aquilo que se mostra a si mesmo a partir de si mesmo (fenômeno), a doutrina iniciada pelo matemático e posteriormente filósofo Edmund Husserl (1859-1938) visa apenas descrever o conteúdo da consciência, independentemente de critérios julgadores. Nesse sentido, não há certo ou errado, lógico ou ilógico, pois a questão se baseia puramente na subjetividade.

Sendo a ciência da subjetividade, a Fenomenologia (GOTO, 2008; STRUCHINER, 2007; MOREIRA, 2004) volta ao zero mesmo da questão, ao ponto de partida por excelência, que é o homem consciente e lançado ao mundo, atuando como fonte originária de qualquer construção humana. Já que toda consciência é consciência de alguma coisa, porque esta não pode ser oca, obrigatoriamente a ação de estar consciente traz em seu bojo um objeto do conhecimento inerentemente atrelado. Algo sempre se mostra, e é esse mostrar e seu modo de fazê-lo que interessam à Fenomenologia.

Em relação à descoberta das essências, a “versão científica” do método fenomenológico apresentada por Moreira (2004) discorre acerca de três ações fundamentais para alcançar o objetivo: (1) a epoché (lê-se epokê), que é a suspensão do juízo ou conceitos anteriores; (2) a redução fenomenológica ou eidética, a qual reduz o objeto intuído à sua ideia ou essência; e (3) a variação imaginativa livre, incumbida de encontrar os traços ou caracteres responsáveis por constituir o objeto, e que sem os quais ele não pode ser o que é.

Portanto, o ser ou a essência se apresenta como condição *sinequa non* para que um representante seu possa existir; trata-se daquilo que é comum e invariável a todos os entes da mesma categoria.

6. O ser ou a essência da adição de frações com denominadores diferentes

Trazendo a ideia da secção acima para o campo da Matemática, veremos automaticamente que qualquer operação de adição envolvendo frações com denominadores diferentes exige o redimensionamento das suas partes existentes e a criação de novas outras dentro dos inteiros, ou seja, obriga um reparticionamento equilibrado entre os todos e partes a serem somadas. Constituindo o reparticionamento equilibrado e a criação de novas partes dentro dos inteiros o ser ou a essência da adição de frações com denominadores distintos, tal objeto não poderá existir de outro modo senão desse.

A ideia é simples: já que não podemos somar partes com tamanhos diferentes, teremos obrigatoriamente que torná-las iguais para que a operação seja feita. Em outras palavras, os inteiros permanecem os mesmos, porém mudam os tamanhos e as quantidades das partes que os compõem. Ademais, após o redimensionamento das partes existentes e a criação de novas outras dentro de um inteiro comum aos termos da adição (frações com denominadores distintos a serem somadas), é possível enxergar as frações originais, porém essas estarão subdivididas e se mostrarão como frações equivalentes. Nossas ilustrações explicam melhor.

Cientes de que o ser ou a essência da adição de frações com denominadores diferentes não pode existir de outro modo, resta-nos apenas compreendê-lo a partir dele mesmo, se quisermos realmente conhecê-lo epistemologicamente. A lógica interna e inerente ao modo próprio de ser desta adição força o homem a buscar volitivamente uma solução para a problemática proposta quando este abre mão das fórmulas ou receitas prontas, tal como é no caso da utilização do Mínimo Múltiplo Comum (MMC).

Fenomenologicamente falando, o sujeito que se dispõe a mergulhar na episteme e na inquietude necessárias à resolução de questões dessa natureza, deve fazê-lo por si mesmo após a suspensão dos preconceitos ou a prioris. Em termos mais simples, queremos dizer que a epoché proposta pela Fenomenologia (GOTO, 2008; STRUCHINER, 2007; MOREIRA, 2004) torna o indivíduo “intelectualmente virgem” em relação ao objeto investigado. É claro que não se trata de uma ação simples, pois na prática tudo é mais trabalhoso.

7. O estudo de frações e as suas representações gráficas

Quando falamos em fração, logo surge na cabeça de jovens e adultos a ideia de uma figura geométrica como retângulos ou representação do cotidiano na forma de pizzas e chocolates divididos em partes iguais sobre o conceito. Encontramos no dicionário o seguinte:

> Sf. 1. Parte de um todo. 2. Mat. Número que representa uma ou mais partes da unidade que foi dividida em partes iguais. Pode ser escrita em forma decimal, como por exemplo, 0,5 ou na forma de divisão entre dois números inteiros, um acima e outro abaixo de um traço: ½ (FERREIRA, 2009, p. 416).

Dentre as várias definições de fração que os pesquisadores matemáticos expõem, podemos incluir as quatro ideias apresentadas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998): relação, parte/todo, quociente, razão e operador.

Geralmente quando é abordado o conteúdo "frações", a maioria dos alunos apresentam dificuldades nas questões propostas, pois o que é exigido no dia a dia para os alunos no conceito de frações e no ensino dos cálculos com frações em situações problemas que relacione o cotidiano para muitos alunos é torna–se monótono. Para Vasconcelos e Belfort (2006, p.39):

> (...) como muitos outros temas de Matemática, seu ensino limita-se em geral, a aplicação de formulas e regras, sem que os alunos entendam muito bem o que estão fazendo. E, no caso especifico de frações, muitas vezes a explanação limita-se a algumas ideias particulares, sem abranger todas as ideias que são associadas. São formulas e regras desprovidas de significados e que devem ser memorizadas e repetidas.

O processo do ensino de frações é tão importante quanto o processo do ensino e aprendizagem de qualquer outro conteúdo matemático, na medida em que se encontra presente e relacionados com outros conceitos trabalhados na própria disciplina de Matemática.

Para D'AMBROSIO (1996), no ensino da matemática destacam-se aspectos básicos como relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figura), por isso a aprendizagem em matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado, resultante das conexões entre todas as disciplinas com o cotidiano nos seus diferentes temas.

Com o uso dos recursos tecnológicos no ensino de frações nas questões relacionadas ao quotidiano ficam raras, pois já não encontramos tão facilmente balanças analógicas, velocímetros de carros e instrumentos de medidas com ponteiros como é o caso dos hidrômetros dão uma ideia de parte e todo.

Para Hilton (1980), a respeito do cálculo mental:

> (...) a intuição deveria desempenhar um papel muito maior na aritmética de frações do que na álgebra de funções racionais. Não se deseja que um aluno que um alunos calcule 1/2+1/2, ou mesmo 1/2+3/4, com auxílio da regra para calcular a/b+c/d.

Frações mais comuns no dia a dia, como é o caso das citadas por Hilton, são de fácil percepção visual e, assim, possíveis de serem calculadas mentalmente. As vantagens aí são:

$= \frac{1}{2}$ $= \frac{1}{3}$ $= \frac{5}{6}$ $= \frac{3}{6}$ $= \frac{2}{6}$

desenvolvimento do raciocínio lógico; agilidade na resolução dos problemas; e, até mesmo, auxílio na compreensão do processo de adição de outras operações mais complexas, evitando assim, as respostas absurdas.

Apresentamos a seguir, atividades do cálculo de adição de frações com denominadores diferentes que visam a auxiliar o cálculo mental, a interpretação geométrica e perceber a função das frações nos desenhos e frações equivalentes para evitar o excesso de regras e diminuir os erros causadas por elas.

De acordo com os PCN (BRASIL. 1998. p. 67):

> O importante é superar a mera memorização de regras e de algoritmos (“divide pelo debaixo e multiplica pelo de cima”, “inverte a segunda e multiplica”) e os procedimentos mecânicos que limitam, de forma desastrosa, o ensino tradicional do cálculo.

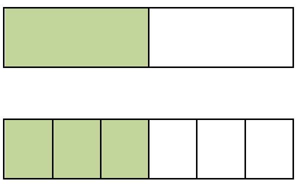
No cálculo de adição de frações com denominadores diferentes (que os pedaços são de tamanhos diferentes) podem ser realizadas de diferentes maneiras: transformando em frações com mesmo denominador em frações equivalentes, no uso do m.m.c. (mínimo múltiplo comum) e o que queremos mostrar é a abordagem do cálculo das frações com denominadores diferentes através do desenho de retângulos.

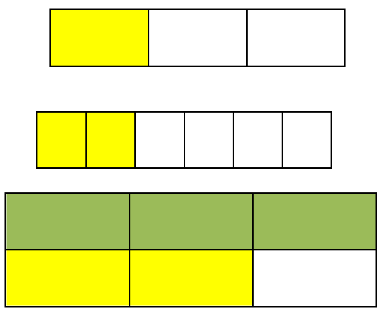
Sentindo a necessidade de haver mais materiais didáticos que trabalhem frações equivalentes e a visualização de adição de frações com denominadores diferentes na representação gráfica é que propomos atividade que possam servir como introdução ao assunto. Os problemas propostos buscam a compreensão do assunto na expectativa de que o próprio aluno encontre a saída utilizando às técnicas operacionais através da resolução de desenhos e equivalências com a ajuda do professor sem precisar memorizar fórmulas.

Atividades propostas de adição de frações com denominadores diferentes e a resolução através da representação gráfica e frações equivalentes.

1. Em questões do tipo:

Na festa de aniversário de Mário sua mãe comprou uma torta de frango para comemorar. Na hora da festa a $\frac{1}{2}$ foi comida pelos amigos dele e a $\frac{1}{3}$ deixando para comer com sua mãe. Quanto Mário repartiu, ao todo, com seus colegas e sua mãe?



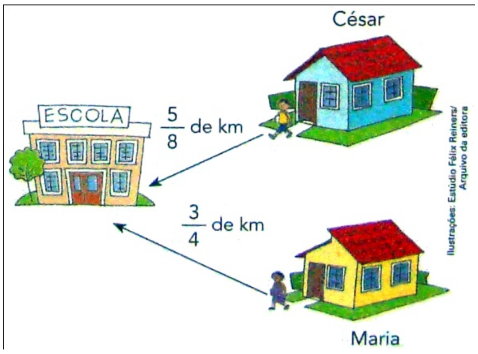


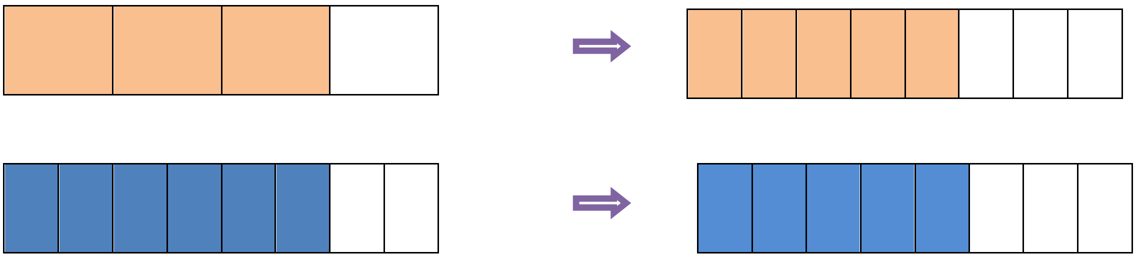
Então, $\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

$= \frac{6}{8}$

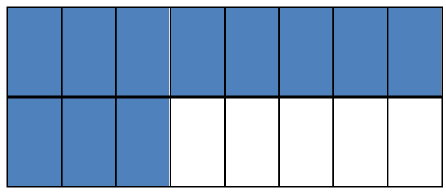
2. No problema proposto em DANTE (2014, p. 225):

   Maria e César vão para a escola a pé.





Então, $\frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$



Percebemos que quando os denominadores são múltiplos, então vemos que seu mmc é igual à ao maior número que aparece entre os dois denominadores ou mais caso apareça e na sua representação geométrica observa-se que o resultado é o maior dos denominadores.

3. No problema proposto em DANTE (2014, p. 223):

   Em uma construção, o terreno foi aproveitado assim:

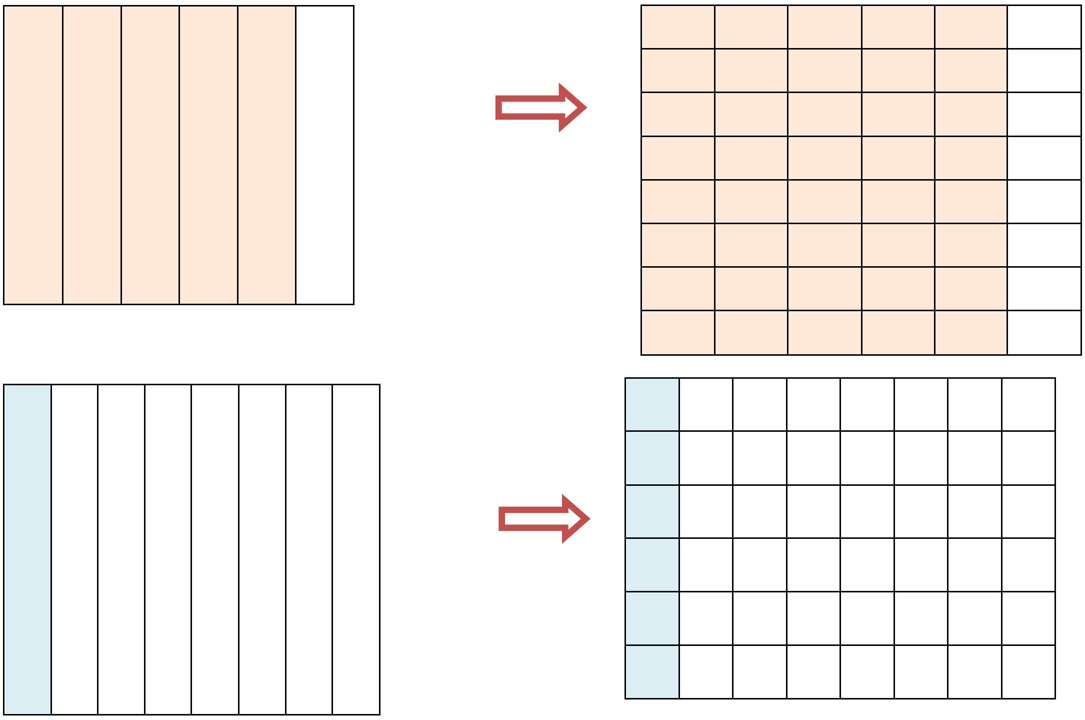
$\frac{5}{6} \rightarrow$ casa e

$\frac{1}{8} \rightarrow$ jardim

Que fração do terreno é ocupada pela casa e pelo jardim juntos?

Precisamos efetuar a adição e como essas frações têm denominadores diferentes vamos observar o desenho das frações a seguir para uma melhor compreensão:

$= \frac{1}{8}$



Então, com denominadores iguais podemos somar:

$\frac{40}{48} + \frac{6}{48} = \frac{46}{48}$, simplificando o numerador e denominador por 2 temos: $\frac{23}{24}$.

Observamos que no caso de frações com denominadores diferentes, primeiro construímos desenhos que representam frações equivalentes de mesmo denominador e, em seguida, efetuamos as operações. No “método prático” pelo mínimo múltiplo comum (mmc) os alunos, apenas mecanizam o processo sem compreendê – lo.

Observando:

Frações equivalentes a $\frac{5}{6} = \frac{5}{6}, \frac{10}{12}, \frac{15}{18}, \frac{20}{24}, \frac{25}{30}, \frac{30}{36}, \frac{35}{42}, \frac{40}{48}, \ldots$

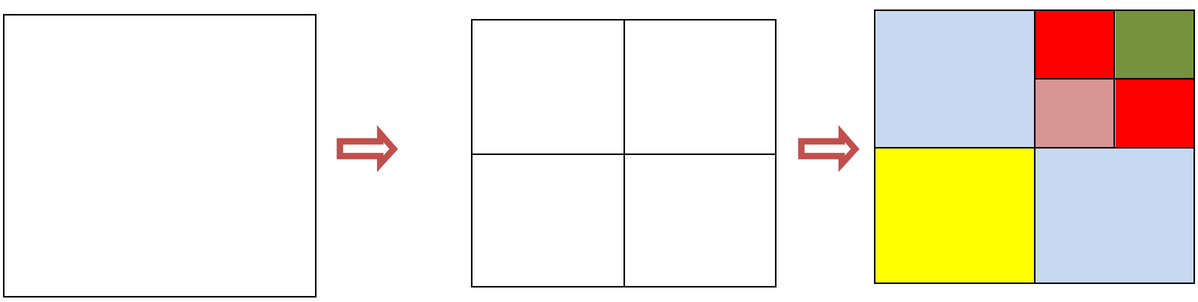
Fraçõesequivalentes a $\frac{1}{8} = \frac{1}{8}, \frac{2}{16}, \frac{3}{24}, \frac{4}{32}, \frac{5}{40}, \frac{6}{48} \ldots$

Concluímos que:

$\frac{5}{6} + \frac{1}{8} = \frac{20}{24} + \frac{3}{24} = \frac{23}{24} \qquad \frac{40}{48} + \frac{6}{48} = \frac{46}{48}$

No problema proposto em DANTE (2014, p. 234):

4. Observe a sequência de figuras e responda o que se pede:



Agora indique a fração irredutível correspondente à região pintada.

a) Parte amarela: $\frac{1}{4}$ da região toda

b) A parte azul: $\frac{2}{4}$ ou $\frac{1}{2}$ da região toda

c) Parte vermelha: $\frac{2}{16}$ ou $\frac{1}{8}$ da região toda

d) Parte verde: $\frac{1}{16}$ da região toda

e) Parte marrom: $\frac{1}{16}$ da região toda

8. Considerações finais

O estudo das frações eoperações na Educação Básica, muitas vezes tem dado maior ênfase ao ensino dos procedimentos em detrimento do ensino dos conceitos relativos a estas frações. No caso da equivalência de frações, por exemplo, o ensino da construção dos gráficos ocupam um lugar e um tempo importante do processo ensino-aprendizagem desta função.

O estudo com representações gráficas no ensino de adição de frações com denominadores diferentes tem permitido aos professores e professoras de Matemática levando a refletir a importância de uma forma sem memorizações na sala de aula. Com estas representações, a análise das figuras e as frações equivalentes pode ser potencializada, favorecendo a aprendizagem dos conceitos que realmente importam neste processo, como o estudo das frações equivalentes, adição de frações, multiplicação de um número pela fração e a multiplicação de uma fração pelo número.

O uso das representações geométricas em sala de aula apresenta muito benefícios à ação educativa. Mas, é preciso que estes recursos sejam explorados de forma a possibilitar aplicações e visualizações em cálculos que seriam dificultadas e o professor conduzindo o aluno a descobrir, com compreensão, o resultado de tais operações.

Referências

BOYER, C. B. *História da matemática.* São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

BRASIL, MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília: MEC, 1998.

D´AMBROSIO, U. *Da realidade à ação:* reflexões sobre educação e matemática. 2ª ed. São Paulo: Sumus Editorial, 1996.

DANTE, L. R. *Projeto Apis:* matemática. 2ª ed. São Paulo: Ática, 2014.

FERREIRA, A. B. H. *Mini – Aurélio:* O dicionário da língua portuguesa. 7. Ed. Curitiba:

Positivo, 2009. 406 p.

GOTO, T. A. Introdução à Psicologia Fenomenológica: a nova psicologia de Edmund Husserl. In: ______. *Prolegômenos à Fenomenologia Transcendental de Edmund Husserl.* São Paulo: Paulus, 2008. cap. 1, p. 35-100.

HEIDEGGER, M. Ser e Tempo. In: ______. *Necessidade, estrutura e primado da questão do ser.* Petrópolis: Vozes, 1988. Tradução de Márcia de Sá Cavalcanti. cap. 1, p. 27-41.

HILTON, P. Do we still need fractions on the elementary curriculum? In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 4., 1980, Boston *Proceedings*... Boston: Birkhäuser, 1980. P. 37-41. Disponível em: <http://matematicahoje.com.br/telas/educ_mat/artigos/artigos_view.asp?cod=20>. Acesso em: 17 de abril de 2016.

LOPES, A. J. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema,* Rio Claro, ano 21, n.31, p. 1-22, 2008.

MOREIRA, D. A. O método fenomenológico na pesquisa. In: ______. *A pesquisa empírica e suas variantes.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. cap. 1, p. 1-18.

MOREIRA, D. A. O método fenomenológico na pesquisa. In: ______. *Conceito preliminar de fenomenologia.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. cap. 5, p. 59-72.

MOREIRA, D. A. O método fenomenológico na pesquisa. In: ______. *Outros conceitos indispensáveis à compreensão da fenomenologia.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. cap. 7, p. 83-92.

MORENTE, M. G. *Fundamentos de filosofia:* lições preliminares. São Paulo: Mestre Jou, 1970.

RUDIO, V. F. Orientação não-diretiva na educação, no aconselhamento e na psicoterapia. In: ______. *Relação de ajuda e orientação não diretiva.* Petrópolis: Vozes, 1987. cap. 1, p. 9-14.

SÁ, R. In: INFOESCOLA. *Geometria plana:* conceitos históricos e cálculos de áreas. 2014. Disponível em: <http://www.infoescola.com/matematica/geometria-plana-conceitos-historicos-e-calculo-de-areas/>. Acesso em: 17 de abril de 2016.

STRUCHINER, C. D. Fenomenologia: de volta ao mundo-da-vida. *Revista da Abordagem Gestáltica,* Goiânia, v.12, n.2, dez. 2007.

VASCONCELOS, C. B.; BELFORT, E. Diferentes significados de um mesmo conceito: o caso das frações. *Discutindo Práticas em Matemática,* Rio de Janeiro, n. 13, p. 39-49, ago./set. 2006. Disponível em: <http://tvbrasil.org.br/fotos/salto/series/162048Discutindo.pdf>. Acesso em: 17 de abril de 2016.