

REFLEXÕES POR RETAS: ATIVIDADES INVESTIGATIVAS E GEOGEBRA

Herbert Wesley Azevedo¹
IME - USP
herbertwesley@hotmail.com

Resumo:

Através do Software GeoGebra e de atividades investigativas, pretendemos apresentar aos participantes as principais propriedades das reflexões por retas, uma vez que o ensino sobre isometrias é recomendado nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Nesta oficina também apresentaremos atividades com gravuras de M. C. Escher que podem ser aplicadas em salas de aula do Ensino Fundamental II e Ensino Médio.

Palavras-chave: Investigação Matemática; Reflexões por Retas; GeoGebra.

1. Introdução

O estudo das Transformações Geométricas está proposto nos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental e nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio. Nesses documentos é ressaltado que isometrias e homotetias no plano podem ser estudadas em sala de aula também como ferramentas que auxiliam no aprendizado de outros temas, como por exemplo, congruências e semelhanças de triângulos, assuntos esses que são fundamentais na Educação Básica. Há cerca de duas décadas não era usual os professores trabalharem com as Transformações Geométricas em sala de aula (MABUCHI, 2000), no entanto, ao longo dos últimos anos, o estudo das isometrias e homotetias tem sido incorporado também nos livros didáticos para o Ensino Médio (BRASIL, 2014), indicando assim, avanços na tentativa de se cumprir o currículo recomendado e uma continuidade no ensino do tema, em relação ao Ensino Fundamental.

É sabido que alguns alunos demonstram dificuldades com Geometria em vários níveis de ensino (NASCIMENTO, 2008), (SOARES, 2009), (PEREIRA, 2010). Nos cursos de Licenciatura em Matemática há alunos que apresentam dificuldades para compreender os conteúdos sobre Transformações Geométricas. Uma vez que os professores, possivelmente, procuraram ensinar da mesma maneira que aprenderam, esses futuros docentes não se sentirão à vontade para tratar desse assunto quando estiverem à frente de suas turmas. Ensinarão de maneira superficial, sem segurança, ou não irão ensinar por não terem familiaridade com o tema.

¹ Mestrando do Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática do IME – USP.

Temos por objetivo sanar ou diminuir essas dificuldades na formação superior, apresentando algumas das propriedades das reflexões por retas, através de atividades que contemplam alguns momentos da Investigação Matemática (PONTE, BROCARDI e OLIVEIRA, 2003, p. 20), tendo o software GeoGebra como auxílio em algumas dessas atividades.

2. Objetivos

O minicurso é destinado aos professores de Matemática do Ensino Fundamental II, do Ensino Médio e alunos do curso de Licenciatura em Matemática. O objetivo do minicurso é apresentar aos participantes algumas das propriedades envolvendo reflexões por retas, esta que talvez seja a mais conhecida das isometrias.

Apesar das atividades contemplarem apenas a reflexão por retas, acreditamos que nossa proposta, por meio de Investigação Matemática, possa funcionar como referência aos participantes, pois vale ressaltar que através da operação de composição de reflexões por retas as outras isometrias (translação, reflexão por ponto, rotação, reflexão transladada) são produzidas. Procuramos, desta forma, incentivar esses professores e futuros docentes a abordarem o tema em suas aulas.

A Investigação Matemática proporciona a mudança de foco na sala de aula, do professor para o aluno e provoca uma prática investigativa também no professor (PONTE, BROCARDI e OLIVEIRA, 2003, p. 142), ou seja, é desejável que professores e futuros professores não ensinem apenas do modo tradicional em suas práticas. Assim, através deste minicurso, temos por objetivo apresentar aos participantes possíveis mudanças em suas aulas, por meio desta metodologia.

3. A Investigação Matemática

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais os professores são direcionados a procurar novas posturas em sala de aula:

Adotar estratégias de ensino diversificadas, que mobilizem menos a memória e mais o raciocínio e outras competências cognitivas superiores, bem como potencializem a interação entre aluno-professor e aluno-aluno para a permanente negociação dos significados dos conteúdos curriculares, de forma a propiciar formas coletivas de construção do conhecimento (BRASIL, 2000, p. 74).

Desta forma, percebemos que, cabe ao professor buscar outras maneiras de ensinar, procurando novas metodologias, fazendo com que seus alunos se interessem em aprender cada vez mais. Devemos lembrar que “as escolhas feitas pelo professor é que vão determinar, de certa maneira, a qualidade da aprendizagem dos alunos” (BRASIL, 2000, p.83).

Se queremos ver mudanças nas atuações dos professores em sala de aula, esses estímulos às mudanças devem ser visíveis nos cursos de formação de professores e na formação continuada, uma vez que os professores replicam parte dos métodos de ensino que tiveram.

Normalmente, seus referenciais de prática, são as lembranças que têm dos procedimentos de seus próprios professores, sem clareza de uma escolha pedagógica, que irá interferir diretamente na interação necessária entre professor, aluno e conteúdo a ser ensinado. (BURATTO, 2006, p. 45).

Temos assim, na Investigação Matemática, uma ferramenta para fazer com que os alunos deixem o papel passivo nas aulas, pois, os mesmos são levados a construir o aprendizado. Nesse sentido, atividades investigativas são relevantes para a educação matemática de nossos estudantes e para a formação inicial e continuada dos professores.

Vê-se dessa maneira a importância de proporcionar, na formação inicial e continuada de professores, experiências de natureza investigativa para que percebam quão significativo pode ser o desenvolvimento de um trabalho semelhante com seus próprios alunos.

A estratégia para trabalhar em sala de aula com Investigação Matemática é semelhante à utilizada em Resolução de Problemas proposta por Pólya (1995). Outros autores também defendem a abordagem por Resolução de Problemas: Pozo (1998), Onuchic (1999), Dante (2000), Cavalcanti (2001). É ressaltado em alguns desses trabalhos a importância do professor adotar essa metodologia. Note que ela está presente nas orientações curriculares das décadas de 80 e 90, sendo que Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) afirmam

Acabou por se constatar que os problemas a propor podem ser de muitos tipos, estando longe de terem todos o mesmo interesse educacional (Abrantes, 1988). Uma análise das potencialidades dos diferentes tipos de problemas levou a um interesse cada vez maior pelas questões abertas, susceptíveis de dar origem a atividades de investigação matemática por parte dos alunos. (PONTE, BROCARDIO e OLIVEIRA, 2003, p. 14),

Com o avanço tecnológico, o acesso às calculadoras e computadores em sala de aula, favoreceu o caráter experimental e investigativo. Isso provocou uma “nova perspectiva” na metodologia modificando a proposta de George Polya para uma “metodologia de ensino em

que o professor propõe ao aluno situações problemas, caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos” (D’AMBROSIO, 1989, p.17). Ainda segundo D’ambrosio, a Investigação Matemática busca a construção de conceitos por parte do aluno através do estímulo à sua curiosidade matemática.

Na visão de Ponte e seus colaboradores, a Investigação Matemática propõe atividades mais abertas, com questões que não estão bem definidas de início (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003). Com isso, o desenvolvimento cognitivo do aluno é favorecido havendo participação ativa do mesmo, além de fazer com que o discente atue como um matemático, *incentivando a argumentação com outros colegas e o professor* (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003, p. 23). O que caracteriza uma investigação matemática são os seguintes momentos:

O primeiro abrange o reconhecimento da situação, a exploração preliminar e a formulação de questões. O segundo momento refere-se ao processo de formulação de conjecturas. O terceiro inclui a realização de testes e o eventual refinamento das conjecturas. E, finalmente, o último diz respeito à argumentação, à demonstração e avaliação do trabalho realizado. (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003, p. 20)

A Investigação Matemática não se limita às práticas discentes, essa se direciona ao professor que *pode também desenvolver uma atitude investigativa em relação à Matemática e em relação à sua prática* (PONTE, BROCARDO e OLIVEIRA, 2003, p. 142). Esta metodologia se apresenta como um caminho a mais para a Educação Matemática. A sua introdução na Educação Básica, assim como a Resolução de Problemas, precisa estar presente em sala de aula, inclusive em curso de formação de professores, tanto inicial como continuada (LAMONATO; PASSOS, 2011).

4. Apresentação e detalhamento de algumas das atividades

Os problemas propostos aos participantes do minicurso serão, em sua maioria, efetuados com o auxílio do software GeoGebra. Os professores serão auxiliados no desenvolvimento destas atividades e também na manipulação do software. Em algumas delas, os participantes deverão formular conjecturas e justificá-las, ou seja, em alguns problemas que proporemos, ao menos dois dos momentos da Investigação Matemática, mencionados acima por Ponte, Brocardo e Oliveira, serão contemplados.

Iniciaremos o minicurso apresentando a definição de reflexão por reta. As primeiras atividades envolvem apenas uma reta através da qual algumas figuras são refletidas. Também trabalharemos com atividades que envolvem a composição de duas reflexões

A seguir, apresentamos algumas das atividades:

Definição 1: A reflexão em relação a uma reta m é uma aplicação que associa a cada ponto P do plano, P não pertencente à m , o ponto P' , tal que m é a reta mediatriz do segmento $\overline{PP'}$ e que fixa os pontos de m . Exemplo:

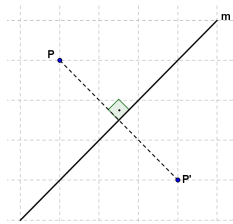


Figura 1 – Reflexão do ponto P pela reta m.

Atividade 1. Faça as reflexões dos pontos A, B, C, D, E, F e G em relação à reta m, conforme figura abaixo:

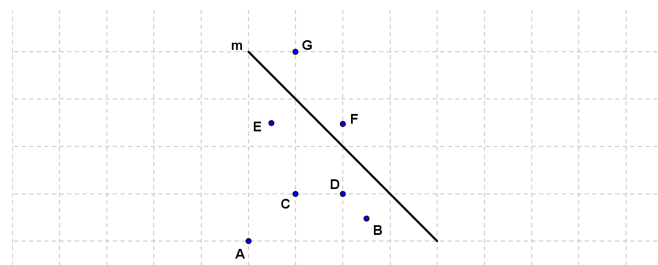


Figura 2 – Reflexão de pontos.

Definição 2: Sejam A, B e C três pontos colineares distintos. Diremos que o ponto C está entre os pontos A e B se for satisfeita a seguinte condição: $AC + CB = AB$. Usualmente esta relação é indicada por $A - C - B$.

Atividade 2. É razoável supor que, em todas as reflexões em relação a retas, as distâncias entre dois pontos dados e as de suas respectivas imagens são preservadas? Vale o mesmo para a relação de “estar entre”? Justifique.

Definição 3: Seja F uma transformação do plano. F é uma isometria se, para dois pontos distintos P e Q do plano e sendo $P' = F(P)$ e $Q' = F(Q)$, tivermos $PQ = P'Q'$, ou seja, a distância de P a Q é a mesma de que a distância de P' a Q' .

Atividade 3. Dada uma reta m no plano, prove que a reflexão em relação à reta m é uma isometria. Utilize a figura abaixo na sua demonstração.

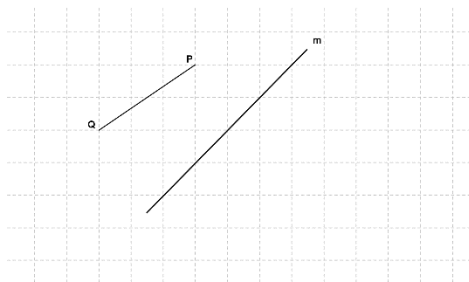


Figura 3 – Reflexão do segmento \overline{PQ} em relação à reta m .

Atividade 4. Sejam S_1 e S_2 duas circunferências em semi-planos opostos de uma reta m . Considere S_1' a reflexão de S_1 pela reflexão em relação à m . O que podemos dizer sobre o número de intersecções entre S_2 e S_1' ?

Atividade 5. Faça a reflexão composta do ponto P , começando pela reta r e depois pela reta s , sendo a reta r paralela à reta s .

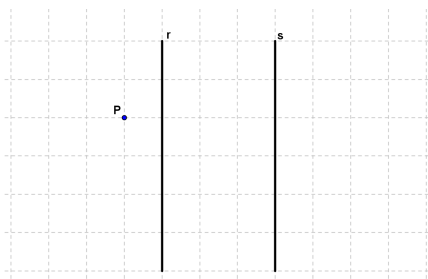


Figura 4 – Reflexão composta

Atividade 6. A composta das duas reflexões acima, em relação a duas retas paralelas, é igual a qual outra transformação do plano?

Atividade 7. Na gravura abaixo existe alguma figura mínima que, se refletirmos algumas vezes, conseguimos reproduzir a gravura original? Em caso afirmativo, identifique-a

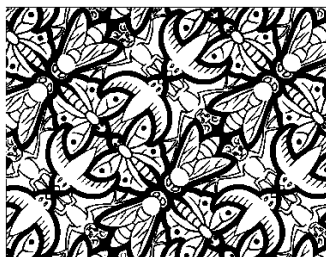


Figura 5 – Gravura de M. C. Escher

Fonte: <https://artnme.wordpress.com/2007/04/24/mc-escher/>

5. Considerações Finais

A importância das Transformações Geométricas para o ensino básico em Matemática se evidencia pela relação que o tema possui com outros tópicos da área, pela possibilidade de introdução e utilização de softwares matemáticos e pela possibilidade motivar discussões sobre demonstrações, nas aulas de matemática.

Acreditamos que este minicurso contribuirá para o professor melhorar a sua forma de ensino, de modo que se aprimore ainda mais em suas ministrações futuras sobre as atividades relacionadas às reflexões por retas. Desejamos assim colaborar para o aumento do conhecimento e formação do professor, para que este se sinta confortável em tratar deste tema com os seus alunos, levando-os à um melhor aprendizado.

6. Referências

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática – 3º e 4º ciclos**. Brasília: MEC/SEF, 1998.

_____. Ministério da Educação e do Desporto. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio**. Brasília: SEF, 2000.

_____. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, v. 2. Brasília: MEC/SEB, 2006.

_____. Ministério da Educação e Cultura, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos PNLD 2015 - Matemática**. Ensino Médio. Brasília: MEC/SEB, 2014.

BURATTO, I. C. F. **Representação semiótica no ensino da Geometria: uma alternativa metodológica na formação de professores**. 2006. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica) – Centro de Educação Científica e Tecnológica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2006.

CAVALCANTI, C. Diferentes formas de resolver problemas. In: SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, M. I. (Orgs.). **Ler, escrever e resolver problemas: Habilidades básicas para aprender matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2001.

D'AMBROSIO, B. S. **Como ensinar matemática hoje? Temas e Debates**. SBEM, Brasília, Ano II, n. 2, p. 15-19, 1989. Disponível em:
<http://www.academia.edu/1082177/Como_ensinar_matem%C3%A1tica_hoje>. Acesso em: 02 Fev. 2016.

DANTE, L. R. **Didática da resolução de problemas de matemática: 1ª a 5ª series**. 12. ed. São Paulo: Ática, 2000.

LAMONATO, M; PASSOS, C. L. B. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. **Revista Zetetiké**, Campinas, v. 19, n. 36, p. 51-74, jun. 2011. Disponível em: <<https://www.fe.unicamp.br/revistas/ged/zetetike/article/download/.../3316>>. Acesso em: 01 Mar. 2016.

MABUCHI, S. T. **Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores**. 2000. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

NASCIMENTO, A. A. S. B. **Relações entre os conhecimentos, as atitudes e a confiança dos alunos do curso de licenciatura em matemática em resolução de problemas geométricos**. 2008. 202 f. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2008.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através de resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: Unesp, 1999.

PEREIRA, R. L. **Interpretação de textos matemáticos: dificuldades na Resolução de problemas de geometria plana**. 2010. 154 f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Universidade Federal do Pará, Belém, 2010.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**; Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica. 2003. POZO, J. I. (Org.). **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

SOARES, L. H. **Aprendizagem significativa na educação matemática: uma proposta para a aprendizagem de geometria básica**. 2009. 141 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.