POSSIBILIDADES PARA O PRINCÍPIO DA INDUÇÃO MATEMÁTICA NO CONTEXTO ESCOLAR

Clícia Valladares Peixoto Friedmann
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
cliciavbp@gmail.com

Johnny Nazareth dos Santos
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
johnnysantos16@hotmail.com

Agnaldo da Conceição Esquincalha
Universidade do Estado do Rio de Janeiro
aesquincalha@gmail.com

Resumo:
Um dos desafios que enfrentam professores de diferentes níveis de ensino é encontrar pontos de contato entre conteúdos estudados nas disciplinas estruturantes da licenciatura em Matemática e aqueles que fazem parte do currículo da Escola Básica. Neste minicurso, trabalharemos com o Princípio da Indução Matemática. Tal conteúdo, além de ser encarado como uma ferramenta para demonstrações matemáticas, também tem aplicações que podem ser motivadoras para a aprendizagem no contexto escolar. Dentre os assuntos e aplicações que apresentaremos, destacamos: progressões, soma dos ângulos internos de polígonos convexos, Torre de Hanói, sequência de Fibonacci e Triominós.
Palavras-chave: Princípio da Indução Matemática; Formação de professores; Demonstrações.

1. Introdução

Na formação de professores de Matemática, é desejável que exista um compromisso com a qualidade do conteúdo aprendido pelo licenciando, representado, primeiramente, pelos conhecimentos a respeito dos fundamentos da Matemática. Associado ao profundo conhecimento do conteúdo, há a necessidade de incluir outros conhecimentos sobre o desenvolvimento histórico dessa ciência, bem como suas relações com as demais áreas e a transposição desse conhecimento específico em saber escolar.

Estabelecer uma relação clara entre os conteúdos das disciplinas do núcleo científico da licenciatura com o saber escolar não nos parece algo trivial e, tampouco, usual. Um exemplo disso é visto quando o professor responsável por alguma disciplina de conteúdo matemático se mostra naturalmente mais preocupado em ensinar seus fundamentos, do que verificar a relação do que foi ensinado com outras áreas, ou mesmo pensar que sejam

necessárias
estratégias para que uma parcela do conteúdo específico seja articulada oportunamente com os da Escola Básica.

Talvez o próprio professor universitário tenha dificuldades em estabelecer essa articulação, ou imagine que, de alguma forma, o aluno já tenha tido contato com parte do que ele está ensinando. Também poderia pensar que não necessariamente haverá uma transposição para o saber escolar, pois muito do é ensinado na universidade está relacionado à aquisição de fundamentos da Matemática e tais fundamentos estão expostos em disciplinas estruturantes dessa ciência. De qualquer forma, essas possíveis questões fazem parte da realidade que muitos de nós vivenciamos, seja como professores de disciplinas de conteúdo matemático na licenciatura, como licenciandos ou como professores da Escola Básica.

Pretendemos, neste minicurso, apresentar o Princípio da Indução Matemática, assunto que consta das ementas de cursos introdutórios de Álgebra, Teoria dos Números, Matemática Discreta, por exemplo, e explorar algumas de suas aplicações ao ensino de conteúdos matemáticos explorados na Escola Básica.

2. Objetivos e metodologia

Os objetivos principais deste minicurso são:

- Conceituar o Princípio da Indução Matemática.
- Exemplificá-lo em demonstrações que envolvam conteúdos do Ensino Médio ou problemas motivadores para o estudo da Matemática.

Apresentaremos o Princípio da Indução Matemática de forma intuitiva e, em seguida, rigorosa. A partir daí, vamos expor exemplos, que envolvam conteúdos da Escola Básica e que são demonstrados por indução. Alguns dos exemplos e aplicações constam deste texto; outros são sugeridos como atividades e serão desenvolvidos com os participantes do minicurso.

3. O Princípio da Indução Matemática Completa

Segundo Millies e Coelho (2000), o Princípio da Indução Matemática Completa (PIMC) pode ser pensado como uma ferramenta para demonstração de teoremas, principalmente de alguns teoremas relacionados a números naturais. Uma demonstração

ISSN 2178-034X

baseada no PIMC, em linhas gerais, possui duas fases: a primeira envolve a verificação de que uma afirmação é válida para um determinado número natural *b*. Caso seja satisfeita para *b*, vamos supor que ela também é verdadeira para um natural arbitrário $k \geq b$ e deveremos provar que é satisfeita seu sucessor (k+1). O cumprimento das duas fases implica que a afirmação é verdadeira para todo natural maior ou igual a *b*.

Como Hefez (2006), antes de demonstrarmos o PIMC, enunciaremos o *Princípio da Boa Ordem*: Todo conjunto de números inteiros não negativos contém um elemento mínimo.

Teorema: (*Princípio da Indução Matemática Completa*). Sejam *b* um número inteiro dado e S o conjunto de números naturais maiores ou iguais a *b*. S tem as seguintes propriedades: 1) $b \in S$; 2) Se um inteiro $k \geq b$ pertence a S, então k+1 também pertence a S. Então S é o conjunto de todos os naturais maiores ou iguais a *b*.

Prova: Sejam *b* um número inteiro e S um conjunto de inteiros maiores ou iguais a *b* tais que: $b \in S$ e se um inteiro $k \geq b$ pertence a S, então k+1 também pertence a S. Suponhamos, por absurdo, que S não seja o conjunto de todos os naturais maiores ou iguais a *b*. Assim, seja S' o conjunto dos naturais maiores ou iguais a *b* que não estão em S.

Como S' é um conjunto de inteiros positivos limitados inferiormente, pelo Princípio da Boa Ordem, temos que S' possui elemento mínimo.

Seja m = mín S'. Note que $b < \mathrm{m}$ e, ainda, $b \leq \mathrm{m} - 1 < \mathrm{m}$. Logo, $\mathrm{m} - 1 \notin S'$, pois $\mathrm{m} - 1 < \mathrm{m} = \text{mín}\, \mathrm{S}'$. Assim, $\mathrm{m} - 1 \in \mathrm{S}$. E, por hipótese, $(\mathrm{m} - 1) + 1$ também pertence a S. Daí, $\mathrm{m} \in \mathrm{S}$. O que é uma contradição. Logo, S é o conjunto de todos os naturais maiores ou iguais a *b*.■

4. Indução Matemática e conteúdos do Ensino Médio

Demonstraremos, por indução, alguns exemplos que envolvem conteúdos do Ensino Médio. Em seguida, proporemos algumas atividades que serão desenvolvidos no minicurso.

Progressão Aritmética (PA)

Uma *PA* de razão **r** é a sequência dada por: $\mathrm{a}_1 = \mathrm{a}$; $\mathrm{a}_2 = \mathrm{a} + \mathrm{r}$; $\mathrm{a}_3 = \mathrm{a}_2 + \mathrm{r} = \mathrm{a} + 2\mathrm{r}$; ... ; $\mathrm{a}_\mathrm{n} = \mathrm{a} + (\mathrm{n} - 1)\mathrm{r}$, onde **a** e **r** são dois números inteiros.

Provar

emos que a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética é igual a $\frac{n(2a+(n-1)r)}{2}$.

Ou ainda, $S_n = a + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{n(2a+(n-1)r)}{2}$.

Prova: Para $n = 1$, temos $a = 1.\frac{2a}{2}$, ou ainda $a = a$. Logo a fórmula é verdadeira para $n = 1$.

Suponhamos que a fórmula seja válida para $n = k$.

$a + a_2 + \cdots + a_k = \frac{k(2a+(k-1)r)}{2}$. (Hipótese de Indução)

Temos que $(a + a_2 + \cdots + a_k) + a_{k+1} = \frac{k(2a+(k-1)r}{2} + a_{k+1}$.

Desenvolvendo o segundo membro da igualdade acima, obtemos:

$$\frac{k(2a + (k-1)r) + 2a_{k+1}}{2}.$$

Como $a_{k+1} = a + [(k+1) - 1]r = a + kr$.

Daí,

$$\frac{k(2a + (k-1)r) + 2(a + kr)}{2} =$$
$$\frac{2ak + k^2r - kr + 2a + 2kr}{2} =$$
$$\frac{2a(k+1) + kr(k+1)}{2} =$$
$$\frac{(k+1)(2a + kr)}{2}.$$

Logo, a fórmula é verdadeira para $n = k + 1$, o que mostra sua validade para a soma dos *n* primeiros termos de uma progressão aritmética. ■

Soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados

Mostraremos que a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de **n** lados é dada por $S_n = (n-2).180°$.

Partiremos do pressuposto que o leitor saiba que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. Antes de fazermos a demonstração, faremos uma análise das seguintes figuras:

ISSN 2178-034X

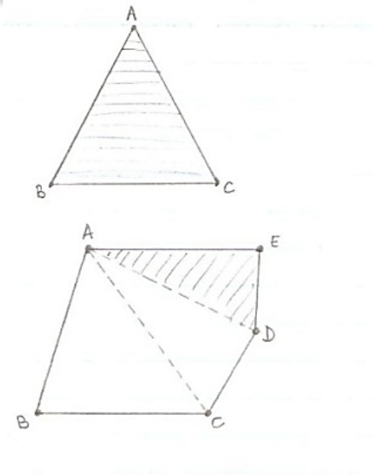

Figura 1: Figuras para análise antes da demonstração.

Podemos observar que à medida que criamos um novo vértice e, por consequência, uma nova figura, "acrescentamos" um triângulo (hachurado) ao polígono anterior. Mais precisamente, acrescentamos 180° à soma dos ângulos internos desse polígono. Chamaremos esse fato de observação 1.

Agora, iniciaremos a demonstração propriamente dita.

Prova: Como não existe polígono de um e nem de dois lados, provaremos a fórmula para a soma dos ângulos internos de um polígono convexo para $n \geq 3$.

Sabemos que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180°. Mas $180° = 1.180° = (3 - 2).180° = S_3$. Logo a fórmula é verdadeira para $n = 3$.

Queremos mostrar que a fórmula é válida para (k+1) é verdadeira, partindo da hipótese de indução de que o resultado é verdadeiro para $k \geq 3$. Desejamos provar que $S_{k+1} = [(k+1) - 2].180°$.

Considerando a observação 1 ($k \geq 3$) feita anteriormente, temos que: $S_{k+1} = S_k + 180°$

e pela hipótese de indução,

$$S_{k+1} = (k-2).180° + 180°$$

$$S_{k+1} = [(k-2)+1].180°$$

Ou ainda,

$$S_{k+1} = [(k+1)-2].180°.$$

Portanto, a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer é verdadeira para $n = k + 1$, o que mostra sua validade para todo polígono convexo de n lados: $n \geq 3$. ■

Atividades

Propostas:

a) Uma progressão geométrica de razão q é a sequência dada por: $a_1 = a$; $a_2 = a.q$; $a_3 = a_2.q = q^2.a$; ...; $a_n = (q^{n-1}).a$, tomaremos a e q como números naturais. Mostre que a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2 + \mathrm{a}_3 + \cdots + \mathrm{a}_\mathrm{n} = \frac{\mathrm{q}^\mathrm{n}.\mathrm{a} - \mathrm{a}}{\mathrm{q} - 1}.$$

b) Para todo *n* inteiro positivo. Prove que:

$$\mathrm{sen}\theta \; + \; \mathrm{sen}\; 2\theta + \ldots \; + \mathrm{sen}\; \mathrm{n}\theta \; = \; \mathrm{sen}\; \frac{(n+1)\theta}{2} \; \mathrm{sen}\; \frac{n\theta}{2} \; \mathrm{cossec}\; \frac{\theta}{2}.$$

5. Indução Matemática, problemas e aplicações

Pereira (2013) apresenta algumas possibilidades de uso do PIMC em problemas que podem motivar o interesse pela Matemática. Nesse minicurso, destacaremos o jogo da Torre de Hanói, atividades com os Números de Fibonacci e mosaicos com Triominós.

A Torre de Hanói é formada por *n* discos de diâmetros diferentes, com um furo no centro e uma base onde estão presas três hastes verticais, A, B e C. Em uma das hastes, por exemplo, a haste A, estão dispostos os discos em ordem decrescente de tamanho, estando o menor sobre todos os outros. Segundo Costa (2011) a Torre de Hanói envolve um jogo, foi elaborado e publicado, em 1882, pelo matemático francês Edouard Lucas. Esse jogo ficou famoso em todo o mundo e tem como objetivo transferir todos os n discos da haste A para a haste C, usando a haste B como intermediária, de acordo com as seguintes regras: (1) Apenas um disco deve ser movido por vez; (2) Um disco maior nunca pode ficar sobre um disco menor.

A história mais conhecida envolvendo o surgimento da Torre de Hanói diz que, no instante da criação do mundo, em Benares, norte da Índia, o deus Brahma teria instalado um imenso jogo da torre de Hanói. Esse jogo era formado por 64 discos de ouro enfiados em uma das três hastes de diamante e o objetivo era que os sacerdotes daquela região movessem os discos de uma haste para outra, respeitando as regras impostas. Para dar sentido à lenda, quando eles terminassem de realizar a mudança dos discos, o deus Brahma, com apenas um relâmpago, daria fim ao mundo (COSTA, 2011).

Podemos usar o jogo da Torre de Hanói com a intenção de responder aos seguintes questionamentos: (1) O jogo possui solução para todo n inteiro positivo? (2) Qual é o número mínimo de movimentos, J_n, com que solucionamos o problema com n discos?

Para respondermos ao questionamento (1), usamos o Princípio da Indução.

Seja A(n) a sentença: o problema com n discos possui solução, para n$\geq$ 1.

De forma trivial, concluímos que A(1) é verdadeira. Suponhamos que A(k) seja válida, o que corresponde a dizer que o jogo com k discos possui solução. Queremos mostrar que o jogo com (k+1) discos também possui solução.

Para solucionarmos o problema com (k+1) discos, basta resolvê-lo com k discos, por hipótese de indução, e depois movermos o disco que restou na haste principal, o maior de todos, para a haste vazia. Realizado isso, solucionamos novamente o problema com k discos, movendo-os para a haste em que está o maior dos discos. Assim, concluímos que o problema com (k+1) discos possui solução, logo podemos afirmar que o jogo possui solução para todo n inteiro positivo.

Agora, vejamos como responder ao questionamento (2). Podemos observar que, para determinar se o problema com (k+1) discos tinha solução, foi necessário solucionar duas vezes o problema com k discos, acrescentando o movimento feito pelo maior disco. Seja J_n número mínimo de movimentos com que solucionamos o problema com n discos. Com um único disco: $J_1 = 1$; um movimento. Com dois discos: $J_2 = 3$; três movimentos. Com três discos, temos: $J_3 = 7$; sete movimentos.

Uma possibilidade é pensarmos que o número mínimo de movimentos, com k discos, é dado por: $J_k = 2^k - 1$. De novo, usaremos indução para mostrar que essa fórmula é verdadeira para todo n positivo. Sabemos que $J_1 = 1 = 2^1 - 1$. Vamos supor que $J_k = 2^k - 1$ seja verdadeira para $k \geq 1$. Podemos determinar o número mínimo de movimentos para (k+1) discos a partir de k discos. Ou seja, $J_{k+1} = 2\,J_k + 1$.

De fato, da hipótese de indução, temos que: $J_{k+1} = 2.\left(2^k - 1\right) + 1 \Rightarrow J_{k+1} = 2^{k+1} - 1$. Concluímos, então, que número mínimo de movimentos com que solucionamos o problema com n discos é dado por: $J_n = 2^n - 1$. ■

Atividades propostas:

a) Os coelhos
de Fibonacci.

No século XIII, o matemático Leonardo Fibonacci estudou um problema que consistia em determinar quantos pares de coelhos poderiam ser gerados de um par de coelhos em um ano. Como hipóteses, considerou que:

1) A cada mês, ocorria a produção de um par de coelhos.
2) Um par de coelhos dava origem a um coelho quando completava dois meses.

Além disso, ele desconsiderou que os coelhos morressem. A fórmula encontrada para resolver a questão acima gerou uma sequência de números conhecida como Sequência de Fibonacci. Como obter essa sequência?

b) Mosaico com triominós.

Um *triominó* reto (L-triominó) é formado por três quadrados de mesmo tamanho, que estão dispostos como na figura 2. Imaginemos um tabuleiro, cujo número de casas seja 2^n x 2^n, como por exemplo, um tabuleiro de jogo de xadrez. Além disso, vamos considerar que cada casa do tabuleiro tenha as mesmas dimensões dos quadrados do triominó.

Queremos responder a seguinte pergunta: É possível cobrir o tabuleiro com trionimós, retirando-se a casa de um dos cantos superiores do tabuleiro?

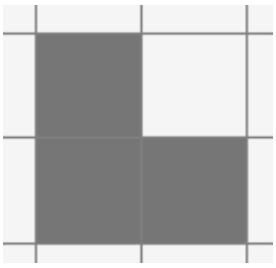

Figura 2: L-triominó.
Fonte: L-Triominoes (University of Cambridge, sd).

6. Considerações Finais

Com a realização do minicurso, esperamos contribuir para que os participantes tenham uma maior compreensão do uso do Princípio da Indução Matemática e de suas aplicações em problemas que podem ser explorados no Ensino Médio. Essa visibilidade pode colaborar para que o professor da Escola Básica valorize algumas demonstrações por indução e descubra formas motivadoras de introduzi-las em suas aulas.

7. Referências

ISSN 2178-034X

COSTA, E. B. C. A História da Ciência e o ensino da recursividade: as torres de Hanói. *História da Ciência e Ensino: construindo interfaces*, v. 4, p. 38-48, 2011.

HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006, 169p.

MILLIES, C. P.; COELHO, S. P. *Números: uma introdução à Matemática*. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2000, 241p.

PEREIRA, P. C. A. *O Princípio da Indução Finita*: Uma abordagem no Ensino Médio. 2013. 46f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2013.

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE. *L-triominoes***.** NRICH enriching mathematics. Disponível em: <https://nrich.maths.org/7026> Acesso em: 01/10/2015.