ESTE NÚMERO É RACIONAL OU IRRACIONAL? UMA PROPOSTA DE ESTUDO ENVOLVENDO TECNOLOGIAS DIGITAIS E NÃO DIGITAIS

Alan Silva dos Santos
PUC-SP
alan.objetivo@gmail.com

Gerson Pastre de Oliveira
PUC-SP
gepasoli@gmail.com

Resumo:

Este estudo tem por objetivo discutir, tendo como sujeitos um grupo de licenciandos em Matemática, a forma pela qual se pode conjecturar acerca da racionalidade ou irracionalidade de números reais por meio de uma estratégia didática com o emprego de tecnologias 'tradicionais' e digitais (*software* Geogebra). A proposta em relação aos objetos matemáticos envolvidos baseia-se em identidades trigonométricas e no teorema das raízes racionais de um polinômio como forma de verificar a racionalidade ou irracionalidade de determinados números. Trata-se de uma pesquisa em andamento, por meio da qual se busca refletir acerca das concepções dos licenciandos em Matemática acerca dos conceitos relativos aos números racionais e irracionais e que pretende obter e analisar dados que permitam compreender questões ligadas à compreensão conceitual dos temas matemáticos em tela, bem como o efeito da estratégia empregada em relação à eventuais obstáculos evidenciados pelos sujeitos.

Palavras-chave: números racionais; números irracionais; teoria das situações didáticas; GeoGebra.

1. Introdução

O desenvolvimento de estudos de representações e verificações de números racionais e irracionais já foram objetos de diversas pesquisas, como as de Igliori e Silva (2001), Boff (2006), Souto (2010), Medeiros (2010) e Bartolomeu (2010). A maioria destes trabalhos indica a existência de dificuldades relativas ao conhecimento dos estudantes de diversos níveis quando se trata da representação e identificação de números racionais e irracionais, principalmente quando o trabalho com estes elementos fica restrito às tecnologias não digitais (lápis e papel).

As constatações providas por meio das investigações supramencionadas inspiraram a proposta relativa a este trabalho, que procura empregar uma visão, descrita mais adiante, acerca do uso das tecnologias na Educação Matemática de modo a discutir, tendo como sujeitos um grupo de licenciandos em Matemática, a forma pela qual se pode conjecturar acerca da racionalidade ou irracionalidade de números reais. Esta discussão ocorre no âmbito de uma investigação mais ampla, que procura, por sua vez, discutir o conceito de densidade do conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais em $\mathbb{R}$ e a densidade do conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dos números irracionais em $\mathbb{R}$, bem como as implicações didáticas desta proposta, investigação esta, por sua vez, vinculada ao projeto CNPq "Tecnologias e educação matemática: investigações sobre a fluência em dispositivos, ferramentas, artefatos e interfaces" (477783/2013-9).

Assim, na pesquisa em andamento aqui descrita, uma sequência didática foi elaborada em conjunto com a construção de um modelo digital no *software* GeoGebra, por meio do qual, no âmbito de uma estratégia didática, pode ser possível realizar a verificação da racionalidade ou irracionalidade de dado número a partir do emprego de identidades trigonométricas – este modelo foi chamado, no âmbito da investigação, de "calculadora para verificar racionalidade ou irracionalidade". Dentre os objetivos específicos que podem ser arrolados para este estudo, consta a utilização de simulações computacionais para fazer conjecturas diante de problemas que envolvam a identificação da racionalidade ou irracionalidade dos números.

Neste artigo, está descrita a calculadora mencionada, que tem por base matemática as identidades trigonométricas, o teorema das possíveis raízes de um polinômio e conceitos relativos aos números racionais e irracionais. Os dados preliminares que estão apresentados aqui dizem respeito a uma sequência didática que empregou a calculadora mencionada e que foi aplicada a um grupo de alunos do primeiro semestre do curso de licenciatura em Matemática, com a finalidade de favorecer um ambiente de construção do conhecimento quanto aos temas mencionados, priorizando a constituição de conjecturas e a exploração da interface digital. A seguir, semelhante iniciativa é relatada, a partir de descrições atinentes aos temas matemáticos.

2. Números racionais, números irracionais e identidades trigonométricas

Em relação aos números racionais, adota-se a seguinte definição:

> O conjunto $\mathbb{Q}$, dos números racionais, é formado pelas frações p/q, onde p e q pertencem a $\mathbb{Z}$, sendo $q \neq 0$. Em símbolos,
> $\mathbb{Q} = \{p/q;\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ \ q \neq 0\}$
> Lê-se: "$\mathbb{Q}$ é o conjunto das frações p/q tais que p pertence $a\ \mathbb{Z}, q$ pertence a $\mathbb{Z}$ e q é diferente de zero". (LIMA, p.3, 2013)

Assim, um número racional pode ser representado na forma m/n, sendo $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}^*$. O número racional possui representações decimais finitas e infinitas periódicas. As representações decimais finitas são do tipo cos60º = 1/2. As representações decimais infinitas periódicas são do tipo 3/9 = 0,333333..., com período 3.

De outro modo, quando as representações decimais infinitas não possuem período tem-se a representação de um número irracional. Em termos de definição,

> [...] qualquer número real, como $\sqrt{2}$, que não é racional, diz-se irracional. De acordo com essa definição, todo número real ou é racional, ou é irracional. A reta, ou eixo, com um número associado a cada um de seus pontos, na maneira descrita acima, é chamada reta real. Os pontos dessa reta se dizem racionais ou irracionais conforme os números a eles associados sejam racionais ou irracionais.
> Observe que a definição acima, de número irracional, resume-se no seguinte: qualquer número real que não possa ser expresso como razão a/b de dois inteiros, diz-se irracional. (NIVEN, p.46-47, 1990)

Um número irracional não possui dízima periódica em suas representações decimais infinitas. Observa-se, assim, que $sen 15° = 0{,}25881904\ldots$, possui uma representação decimal infinita e não periódica. Para verificar se $sen\ \alpha$ e $cos\ \alpha$ são, de fato, números racionais ou irracionais, pode-se utilizar das identidades trigonométricas descritas por Niven (1990) e expressas como, $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$, que é deduzida por meio da fórmula do cosseno da soma, isto é, $\cos(A + B) = \cos A.\cos B - \operatorname{sen} A.\operatorname{sen} B$, bem como $\operatorname{sen} 3\theta = 3\operatorname{sen}\theta - 4\operatorname{sen}^3\theta$, a qual, por sua vez, é deduzida por meio da fórmula do seno da soma, isto é, $sen(A + B) = senA.cosB + cosA.senB$.

Em seguida, deve-se considerar o teorema das raízes racionais de um polinômio, o qual indica que, se um número racional $\frac{a}{b}$ pode ser admitido como raiz de uma equação polinomial $c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + c_{n-2} x^{n-2} + \cdots + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0$, com a e b primos entre si, e $a \in \mathbb{Z}$, assim como $b \in \mathbb{Z}^*$, então c_0 é divisível por a e c_n é divisível por b.

Assim, após o cálculo realizado com as identidades trigonométricas, utiliza-se a seguinte representação para possíveis raízes de um polinômio: $c_3 x^3 + c_2 x^2 + c_1 x^1 + c_0 = 0$.

Desta forma, as possíveis raízes da equação polinomial de grau 3 são encontradas por meio das razões $\frac{c_0}{a}$ e $\frac{c_3}{b}$.

Para ilustrar estas relações, considere-se a verificação da racionalidade ou irracionalidade de *cos 40°*.

Substitui-se $\theta = 40°$ em $cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$

$cos3.40° = 4cos^3 40° - 3cos40°$, ou seja: $cos120° = 4cos^3 40° - 3cos40°$

Fazendo $cos40° = x$, e sabendo que $cos120° = -\frac{1}{2}$, tem-se:

$$-\frac{1}{2} = 4x^3 - 3x \; ; \; -1 = 8x^3 - 6x \; ; \; 8x^3 - 6x + 1 = 0$$

Utilizando o teorema das raízes racionais de um polinômio, obtém-se, partindo de $c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x^1 + c_0 = 0$:

$$8x^3 - 6x + 1 = 0$$

$$\frac{c_0}{a} = \frac{+1}{1} = 1 \; ; \frac{c_0}{a} = \frac{+1}{-1} = -1$$

$$\frac{c_3}{b} = \frac{8}{1} = 8; \frac{c_3}{b} = \frac{8}{-1} = -8 \; ; \frac{c_3}{b} = \frac{8}{2} = 4 \; ; \frac{c_3}{b} = \frac{8}{-2} = -4 \; ; \frac{c_3}{b} = \frac{8}{4} = 2 \; ; \frac{c_3}{b} = \frac{8}{-4} = -2$$

$$\frac{c_3}{b} = \frac{8}{8} = 1; \frac{c_3}{b} = \frac{8}{-8} = -1$$

Em seguida, substitui-se em $\frac{a}{b}$ os valores encontrados para *a* (± 1) e os valores encontrados para *b* ($\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$). Desta forma, as possíveis raízes racionais $\frac{a}{b}$ seriam $\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}; \pm\frac{1}{8}$.

Uma vez que se substituam quaisquer das raízes listadas, não seria possível satisfazer $8x^3 - 6x + 1 = 0$. Por exemplo, substituindo *x* por 1:

$$8x^3 - 6x + 1 = 0 \; ; \; 8 - 6 + 1 \neq 0$$

E assim sucessivamente com as demais raízes candidatas. Desta forma, conclui-se que *cos40°* é um número irracional. Por outro lado, considere-se a verificação da racionalidade ou irracionalidade de *sen330°*.

Substitui-se $\theta = 330°$ em $sen3\theta = 3sen\theta - 4sen^3\theta$

$$sen3.330° = 3sen330° - 4sen^3 330°$$

$$sen990° = 3sen330° - 4sen^3 330°$$

Fazendo $sen330° = x$, e sabendo que $sen990° = -1$, tem-se:

$$-1 = 3x - 4x^3$$

$$4x^3 - 3x - 1 = 0$$

Utilizando o teorema das raízes racionais de um polinômio, obtém-se, partindo de $c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x^1 + c_0 = 0$:

$$4x^3 - 3x - 1 = 0$$

$$\frac{c_0}{a} = \frac{-1}{1} = -1\ ; \frac{c_0}{a} = \frac{-1}{-1} = +1$$

$$\frac{c_3}{b} = \frac{4}{1} = 4\ ; \frac{c_3}{b} = \frac{4}{-1} = -4\ ; \frac{c_3}{b} = \frac{4}{2} = 2\ ; \frac{c_3}{b} = \frac{4}{-2} = -2\ ; \frac{c_3}{b} = \frac{4}{4} = 1; \frac{c_3}{b} = \frac{4}{-4} = -1$$

Em seguida, substitui-se em $\frac{a}{b}$ os valores encontrados para a (± 1) e os valores encontrados para b $(\pm 1, \pm 2, \pm 4)$. Desta forma, as possíveis raízes racionais $\frac{a}{b}$ seriam $\pm 1; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{4}$.

Neste caso, de posse de uma raiz, 1, é possível empregar o dispositivo Briot-Ruffini para obter as restantes. Seja o polinômio $P(x) = 4x^3 - 3x - 1$. O algoritmo mencionado prevê a divisão de um polinômio por um binômio do tipo $Q(x) = \ x - a$. Ora, como uma raiz racional é conhecida, tem-se, desta forma, que $x - 1 = 0$ Assim, no problema em questão, têm-se que $\frac{4x^3 - 3x - 1}{x - 1}$. Aplicando-se o dispositivo:

	a	*b*	*c*	*d*
1	4	0	-3	-1
		4	4	1
	4	4	1	0

Da aplicação supramencionada, vem que $R(x) = \ 4x^2 + 4x + 1$, e $P(x) = Q(x)R(x) + r$, com $r = 0$. Assim, considerando a forma quadrática de $R(x)$, tem-se que $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Desta maneira,

$$4x^2 + 4x + 1 = 0 \quad ; \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = -\frac{1}{2}$$

São, portanto, em relação à equação $4x^2 + 4x + 1 = 0$, as raízes racionais $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = -\frac{1}{2}$. Desta forma, têm-se, para $4x^3 - 3x - 1 = 0$, as raízes $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}\ e\ x_3 = 1$, racionais.

Neste caso, o dispositivo Briot-Ruffini permitiu encontrar três raízes x_1, x_2 e x_3, números racionais, sendo a primeira a raiz de $x-1=0$ e as restantes, as raízes de $4x^2+4x+1=0$. Portanto, seno de $330°$ é um número racional.

Assim, no âmbito desta investigação, a proposta descrita nesta seção será implementada com o emprego do *software* GeoGebra, e submetida aos alunos por meio de uma sequência didática envolvendo problemas relacionados aos conjuntos numéricos já mencionados. Para isto, a lógica de construção das sequências didáticas se liga a pressupostos teóricos e metodológicos, descritos a seguir.

3. Fundamentação e Metodologia

Esta pesquisa recorre à Teoria das Situações Didáticas – TSD Brousseau (1986) como referencial teórico a ser empregado nas análises. O principal enfoque desta teoria reside nas situações didáticas, entremeadas pelas interações que envolvem o professor, o aluno e o conhecimento matemático. Desta forma,

> Denominamos *situação o* modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento, como o recurso de que o sujeito dispõe para alcançar ou conservar, nesse meio, um estado favorável. Algumas dessas situações requerem a aquisição "anterior" de todos os conhecimentos e esquemas necessários, mas há outras que dão ao sujeito a possibilidade de construir, por si mesmo, um conhecimento novo em um processo de gênese artificial. (BROUSSEAU, 2008, p.19-20)

Do ponto de vista deste trabalho, interessa indicar que a construção do conhecimento matemático, segundo a TSD, pode ser promovida por meio da constituição de situações didáticas, nas quais o professor convida os estudantes à resolução de problemas adequados em relação ao conhecimento pretendido. Em função do aspecto de não antecipação de respostas e da renúncia a eventuais esquemas facilitadores, esta abordagem se caracteriza por permitir ao estudante avançar em uma trajetória que pressupõe conjecturas, perplexidades, debates e retroações. Neste sentido, cabe ao professor propor e ao estudante aceitar como sua a responsabilidade pela resolução dos problemas, o que, no âmbito da teoria, representa o processo de devolução. À priori, o aluno desconhece aquilo que o professor pretende ensinar, característica essencial para a constituição de situações adidáticas, ou seja, nas quais a intencionalidade didática do docente não está posta ou anunciada. Assim, no lugar de buscar referências na figura do professor, a propositura dos problemas componentes de determinadas situações prevê um contexto material, didático e teórico de caráter antagônico, o *milieu* (OLIVEIRA; MARCELINO, 2015). É neste sentido que se espera que a aprendizagem ocorra a partir das retroações em relação ao *milieu*. Desta forma, a trajetória de investigação desenvolvida pelos participantes face aos problemas proporciona que descobertas, cujas validades se justificam pela lógica interna da situação, se constituam, independentemente das intervenções docentes durante o processo.

Neste contexto, as dialéticas de natureza adidática se constituem como um processo, de acordo com os pressupostos da TSD e indicam que o estudante, individual e coletivamente, passa por momentos caracterizados por Brousseau (1986) como de *ação*, de *formulação* e de *validação*. Na dialética adidática de ação, o aprendiz constitui uma série de ações de caráter pontual, com a finalidade de produzir um conhecimento operacional. São atitudes experimentais e intuitivas frente aos problemas, caraterísticas, por exemplo, de uma lógica de jogo, quando se buscam estratégias que se mostrem eficazes em relação às etapas do desafio ou ao seu caráter geral. Neste movimento, então, propostas vistas como ineficazes podem ser descartadas, bem como podem ser gestadas estratégias novas e promissoras.

A dialética de formulação ocorre em momentos nos quais existem trocas de mensagens entre os aprendizes, o que pode envolver o emprego de linguagem natural ou matemática, a depender das condições cognitivas específicas das pessoas envolvidas. A partir deste momento, podem surgir modelos explícitos, que mobilizam regras comuns e elementos de referência. Aqui, o objetivo primordial reside no intercâmbio de informações. A ideia é que o aluno consiga construir paulatinamente "uma linguagem compreensível por todos, que considere os objetos e relações matemáticas envolvidas na situação didática" (ALMOULOUD, 2007, p.38).

A dialética de validação se caracteriza pelos momentos nos quais os estudantes buscam elementos para comprovação das conjecturas constituídas no âmbito de uma situação. Aos interlocutores, também envolvidos na busca por soluções para os problemas em exame, submetem-se os modelos matemáticos propostos, com as devidas justificativas. A partir de então, podem ocorrer debates acerca da validade daquilo que é proposto, momentos nos quais podem surgir explicações, refutações, reformulações, refinamentos e/ou rejeições. Desta forma, pode-se afirmar que "o objetivo principal da situação de formulação é a comunicação linguística, [enquanto] a dialética de validação busca o debate sobre a certeza das asserções, o que permite organizar as interações com o *milieu*" (ALMOULOUD, 2007, p 40).

Em momento seguinte ao trabalho dos estudantes, cabe ao professor retormar o caráter didático da intervenção por meio de sessões coletivas, com o objetivo de fixar o estatuto formal do conhecimento matemático. Este momento, a institucionalização, é de atal ordem que "se caracteriza pela passagem, em que o conhecimento construído como um meio para solucionar as situações de ação, formulação e validação adquire uma nova referência, passa a ter utilidade para uso futuro, pessoal ou coletivo" (BROUSSEAU, 2008, p. 4).

No âmbito desta pesquisa, a TSD deverá constituir o elemento teórico que permitirá articular as análises à proposta metodológica. Deste ponto de vista, a investigação aqui descrita apresenta caráter qualitativo, e envolve, como sujeitos, vinte alunos do primeiro semestre do curso de licenciatura em matemática de uma universidade localizada no estado de São Paulo, cuja participação no estudo ocorre de forma voluntária. A aplicação da sequência didática, composta por duas atividades, ocorrerá em duas sessões, com previsão de duração em torno de duas horas cada uma, em horário não coincidente com aquele reservado para as aulas regulares. Como já se explicitou, descreve-se aqui parte de um estudo que pretende discutir questões relativas à densidade dos conjuntos numéricos envolvidos, partindo da compreensão acerca das características dos números racionais e dos números irracionais, justamente o que a sequência busca explorar.

A primeira das atividades da sequência didática tem por objetivo propor problemas nos quais o estudante precisa indicar se determinados números são racionais ou irracionais. O estudante pode utilizar os recursos matemáticos de que dispor, desde que os justifique. Uma possibilidade é usar das identidades trigonométricas descritas na seção 2 deste trabalho, em conjunto, se for o caso, com o dispositivo Briot-Ruffini. De qualquer forma, os estudantes de licenciatura envolvidos nas resoluções dos problemas deverão investigar possíveis soluções, de modo que, sem a intervenção dos pesquisadores, transitem pelas dialéticas de ação, formulação e validação previstas na TSD. Ao final desta parte da sequência, os pesquisadores constituirão a institucionalização, apresentando, inclusive, o método adotado na seção 2 deste artigo. Esta atividade não prevê o uso de interfaces computacionais.

Deve-se destacar, no instrumento descrito a seguir (Quadro 1), que algumas questões procuram explorar as concepções dos sujeitos acerca dos números racionais e dos irracionais, de maneira a fomentar discussões sobre os conceitos envolvidos. Neste sentido, pretende-se levantar se tais concepções são estruturadas em torno de conhecimentos formais, algorítmicos ou intuitivos, conforme proposta teórica sustentada por Sirotic e Zazkis (2007), o que poderá

ISSN 2178-034X

encaminhar reflexões em torno de eventuais obstáculos que fiquem evidenciados nas respostas dos estudantes, expressos por erros ou imprecisões.

Quadro 1. Atividade 1

Sobre a Atividade 1

Esta atividade contém problemas que podem ser resolvidos com os recursos matemáticos que você achar adequados. Uma das alternativas disponíveis envolve as identidades trigonométricas $sen3\theta = 3sen\theta - 4sen^3\theta$ para $sen\alpha$ e $cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$ para $cos\alpha$, bem como teorema das possíveis raízes de um polinômio $c_3x^3 + c_2x^2 + c_1x^1 + c_0 = 0$. Por meio das razões $\frac{c_0}{a}$ e $\frac{c_3}{b}$, as possíveis raízes da equação polinomial de grau 3 são encontradas.

Atividade 1

Indique se os itens abaixo de **a** até **d** contêm números racionais ou irracionais como respostas aos senos e cossenos dados. Explique seu raciocínio.

a) sen10° b)sen50° c)cos60° d)cos120°

Responda:

1) Como você identifica um número racional? E um número irracional?
2) Quais foram suas dificuldades em responder aos quatro itens anteriores?

Fonte: os autores

A segunda atividade envolve o uso do *software* GeoGebra, mais especificamente por meio de uma aplicação que envolve a implementação do modelo proposto anteriormente (seção 2). Trata-se de um modelo digital, que permite a exploração de seu conteúdo de forma interativa, o que pode proporcionar que o sujeito faça inúmeras experiências e visualize os resultados, bem como as variações, à medida em que os parâmetros do modelo sejam alterados. Estas possibilidades (experimentações intensivas e visualização) somam-se ao dinamismo da interface, que reage prontamente às ações dos sujeitos (Borba e Villarreal, 2005; Oliveira, Gonçalves e Marquetti, 2015). Em relação ao modelo digital, Lévy (1993) argumenta:

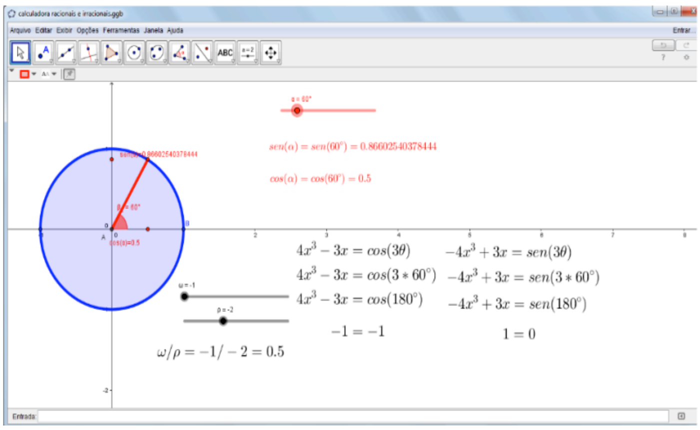
> Um modelo digital não é lido ou interpretado como um texto clássico, ele geralmente é explorado de forma interativa. Contrariamente a maioria das descrições funcionais sobre papel ou dos modelos reduzidos analógicos, o modelo informático é essencialmente plástico, dinâmico, dotado de uma certa autonomia de ação e reação. Como Jean-Louis Weissberg observou tão bem, o termo simulação conota hoje esta dimensão interativa, tanto quanto a imitação ou a farsa. (LÉVY, 1993, p.121)

Um modelo digital possui características que podem favorecer a construção do conhecimento matemático. Neste sentido, além das já mencionadas possibilidades dinâmicas de visualizar e experimentar, surge uma ainda mais instigante e que pode ser resumida por meio da palavra *reorganizar*. Para Tikhomirov (1981), efetivamente, as tecnologias reconfiguram a forma como pensam as pessoas, de modo que

> [...] o uso de sistemas computacionais e suas interfaces criam outra forma de intervenção: nela, o computador surge como ferramenta da atividade mental humana. Surge, portanto, uma nova atividade que, por conseguinte, demanda uma nova forma de pensamento. O advento do uso do computador, para o autor, fez mudar o processo de aquisição de conhecimentos (OLIVEIRA; GONÇALVES; MARQUETTI, 2015, p. 477).

O modelo em questão (Figura 1) permite que o estudante manipule um controle deslizante, que é um dispositivo que fornece variações em diferentes unidades (no caso, em graus), de modo a indicar um ângulo cujo resultado numérico do seno ou cosseno se deseja verificar em relação à racionalidade ou irracionalidade. Duas representações estão disponíveis e têm, respectivamente, caráter algébrico e geométrico. Em termos teóricos, o estudante pode refletir acerca dos resultados obtidos ao visualizar as representações matemáticas disponíveis. Da mesma forma, os sujeitos não ficam restritos às verificações pontuais propostas na atividade anterior, mas têm a possibilidade de conjecturar em relação a quantos ângulos desejarem (experimentações intensivas). Assim, a partir da lógica relativa às identidades trigonométricas, já mencionadas anteriormente, torna-se possível realizar a verificação em relação ao resultado numérico do seno e/ou cosseno de determinado ângulo representar um número racional ou irracional.

Figura 1. Modelo digital "calculadora de verificação para números racionais e irracionais"



Fonte: os autores

Em termos operacionais, na interface exposta na Figura 1, o aluno poderá observar se há ou não igualdade em relação aos resultados numéricos da equação polinomial de grau 3, ou seja, se, nos termos já apresentados, $4x^3 - 3x = \cos(3\alpha)$ ou $-4x^3 + 3x = \mathrm{sen}(3\alpha)$ após a

ISSN 2178-034X

substituição das possíveis raízes do polinômio, casos em que poderá admitir que o número examinado é racional. Os questionamentos propostos na Atividade 2 podem ser vistos no Quadro 2.

Quadro 2. Atividade 2

Atividade 2

Abra a aplicação do GeoGebra chamada “calculadora.ggb” que se encontra na área de trabalho de seu computador. Explore a interface, o que pode ser feito por meio do controle deslizante relativo ao ângulo α. Esta construção implementa uma proposta de verificação acerca da racionalidade ou irracionalidade de $sen(\alpha)$ e/ou $cos(\alpha)$ por meio das identidades trigonométricas $cos3\theta = 4cos^3\theta - 3cos\theta$ e $sen3\theta = 3sen\theta - 4sen^3\theta$, bem como do teorema das raízes racionais de um polinômio. Depois, revise suas respostas da atividade anterior em relação aos itens seguintes:

b) sen10° b)sen50° c)cos60° d)cos120°

Responda:

1) Faça uma descrição de como você compreendeu o funcionamento da aplicação.
2) Caso os resultados dos itens de **a** até **d** desta atividade sejam divergentes em relação à atividade anterior, comente os motivos pelos quais você acredita que isto tenha ocorrido.

Fonte: os autores

A análise das respostas da atividade 2 poderá permitir reflexões acerca da forma pela qual os estudantes de licenciatura envolvidos expressam o uso dos conceitos sobre números irracionais e racionais que evidenciaram na atividade 1 e as eventuais constatações a partir da apropriação da proposta de verificação contida na interface digital.

4. Considerações finais

Quando da finalização deste artigo, os sujeitos da pesquisa já haviam sido selecionados e as sessões já se encontravam agendadas para realização na instituição de ensino superior mencionada, o que permitirá proceder à coleta de dados. Uma vez organizadas as análises, será possível prosseguir o estudo por meio da elaboração dos instrumentos que permitirão discutir, a partir dos conceitos consolidados de números racionais e irracionais, questões relativas à densidade dos respectivos conjuntos numéricos. Espera-se, assim, compreender as concepções apresentadas pelos sujeitos em torno dos conceitos em estudo, tendo como base um conjunto de tecnologias digitais e não digitais como elementos de uma estratégia que pretende que os estudantes de licenciatura possam construir conhecimentos acerca dos tópicos abordados na pesquisa, assim como resolver obstáculos eventualmente constituídos por tensões geradas entre suas crenças e o saber formal.

Referências

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da Didática da Matemática*. Curitiba: Editora UFPR, 2007.

BARTOLOMEU, V.S. *Conhecimentos e dificuldades dos estudantes do ensino médio relacionados ao conjunto dos números reais*. Dissertação de Mestrado - PUC/SP, São Paulo. 2010.

BOFF, D.S. *A construção dos números reais na escola básica*. 2006. Dissertação (Mestrado Profissionalizante) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2006.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo das situações didáticas*: conteúdos e métodos de ensino. São Paulo: Ática. 2008.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble, n.7.2, p.33-115, 1986.

IGLIORI, S.B.C.; SILVA, B.A. Concepções dos alunos sobre números reais. In: LAUDARES, João Bosco, LACHINI, Jonas. *Educação matemática*: a prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo. Belo Horizonte: FUNARC, p. 39-67. 2001.

LÉVY, P. *As Tecnologias da Inteligência*: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34. 1993.

LIMA, E. L. *Curso de Análise volume 1.* 14 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013. (Projeto Euclides)

MEDEIROS, J. *Uma abordagem de ensino dos números reais*. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande, 2010.

NIVEN, I. *Números: Racionais e Irracionais.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1984.

OLIVEIRA, G. P.; MARCELINO, S. B. Adquirir fluência e pensar com tecnologias em Educação Matemática: uma proposta com o software Superlogo. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 17, n. 4, p. 816-842, 2015.

OLIVEIRA, G. P.; GONÇALVES, M. D; MARQUETTI, C. Reflexões acerca da tecnologia e sua inserção na pesquisa em Educação Matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 17, n.3, p. 472-489, 2015.

SIROTIC, N.; ZAZKIS, R. Irrational numbers: the gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, n. 65, p. 49 – 76, 2006.

SOUTO, A. M. *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica.* Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – UFRJ, Rio de Janeiro, 2010.

TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J.V. (Ed). *The Concept of Activity in Soviet Psychology*. New York: M.E. Sharpe Inc., p. 256-278, 1981.