A ÁLGEBRA DA EDUCAÇÃO BÁSICA VISTA POR ALUNOS CONCLUINTES DO ENSINO MÉDIO

Maria de Fátima Costa Sbrana
Universidade Federal do ABC
fatima.sbrana@.ufabc.edu.br

Karina Aguiar Alves
Universidade Federal do ABC
karina.aguiar@aluno.ufabc.edu.br

Marieli Vanessa Rediske de Almeida
Universidade Estadual de Campinas
marieli.almeida@outlook.com

Vivili Maria Silva Gomes
Universidade Federal do ABC
vivili.gomes@ufabc.edu.br

Resumo:

O objetivo desta investigação é identificar as manifestações algébricas encontradas em resoluções de estudantes de uma sala de aula do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do ABC, SP, tendo por embasamento o quadro de referência construído pelos integrantes do projeto Conhecimento Matemático para o Ensino de Álgebra: Uma abordagem baseada em perfis conceituais, do Programa Observatório da Educação (OBEDUC), financiado pela CAPES. O quadro de referência em questão foi desenvolvido a partir de um estudo aprofundado de referenciais teóricos que abordam algumas concepções de álgebra de autores como Usiskin; Lee; Fiorentini, Miorin e Miguel; Lins e Gimenez. Apesar dos dados terem sido coletados numa única sala de aula, foi possível extrair de forma exploratória algumas dificuldades encontradas pelos estudantes em relação à álgebra e sua provável (não) assimilação pelos estudantes como uma ferramenta prática para abordagem e resolução de problemas.
Palavras-chave: Educação algébrica; concepções de educação algébrica; Educação Básica.

1. Introdução

A proposta apresentada e discutida neste trabalho faz parte de uma agenda de pesquisas mais ampla situada dentro do Programa Observatório da Educação (OBEDUC), financiado pela CAPES, no âmbito do projeto Conhecimento Matemático para o Ensino de Álgebra: Uma abordagem baseada em perfis conceituais, no qual investigamos conhecimentos mobilizados por professores em atuação na Educação Básica ao ensinar álgebra. Como parte integrante de nossas investigações, o presente trabalho tem enfoque voltado à análise de resoluções feitas por estudantes da Educação Básica de questões propostas com objetivo de identificar e analisar, nesses sujeitos, as manifestações de categorias de álgebra apontadas pelo grupo em estudos divulgados em trabalhos anteriores.

Ao dar início aos estudos realizados no âmbito de nosso projeto de pesquisa, encontramos variadas concepções, de diferentes autores, sobre o que seria álgebra. A partir desses diferentes entendimentos, surgiu a necessidade, em nosso grupo, de sintetizar tais concepções, a fim de direcionar nossas investigações. Dessa forma, após uma primeira etapa do projeto que envolveu a revisão de literatura sobre álgebra, elaboramos um quadro de referência que apresenta nossas concepções sobre a álgebra da educação básica. Tal quadro foi apresentado no trabalho de Silva, Saito, Souza e Bezerra (2015, p. 2622).

Adotamos como princípio metodológico norteador, no primeiro ano de projeto, o levantamento de artigos, dissertações e teses que abordavam o ensino de álgebra, concepções de álgebra e concepções acerca das compreensões de educação algébrica já dispostas na literatura. Esse aporte conceitual foi necessário para identificarmos como a álgebra vem sendo tratada nas pesquisas em Educação Matemática e em áreas afins.

Com base nestes estudos, partimos para a segunda etapa do projeto, que consistiu na análise de questões das avaliações ENEM/2011 e Prova Brasil. Trabalhos iniciais sobre essa etapa foram divulgados em eventos da área (ALVES, FAGUNDES, ROSSETO, SILVA e GOMES, 2014) e (SILVA, SOUZA e BEZERRA, 2014).

Com o apoio do quadro de referência e dos resultados da segunda etapa, iniciamos a terceira etapa da investigação, realizada com professores de Ensino Superior e com professores da Educação Básica, com o intuito de conhecer e compreender o que esses professores pensam sobre álgebra e quais conhecimentos utilizam para ensinar álgebra. Neste contexto, para verificar os conhecimentos algébricos que contribuem com o ensino de álgebra na escola, iniciamos a quarta etapa de investigação com os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano Ensino Médio, buscando compreender o que os estudantes demonstram conhecer sobre álgebra e quais conhecimentos mobilizam para resolver questões propostas que serão explicitadas na sequência desta comunicação. Neste artigo trataremos dos alunos do 3º ano do Ensino Médio.

2. Fundamentação Teórica

Entre os trabalhos estudados para a elaboração de nosso quadro de referência está o trabalho de Usiskin (1995), o qual apresenta quatro diferentes concepções de álgebra: (i) aritmética generalizada, na qual as variáveis seriam generalizadoras de modelos; (ii) álgebra como estudo de procedimentos para resolução de problemas; (iii) álgebra como estudo de relações entre grandezas; e (iv) álgebra como estudo das estruturas.

Também foram consideradas pelo grupo as concepções de Lee (2001), que aponta (i) álgebra como linguagem; (ii) álgebra como caminho de pensamento; (iii) álgebra como atividade; (iv) álgebra como ferramenta; (v) álgebra como aritmética generalizada; e (iv) álgebra como cultura.

Por sua vez, o trabalho de Fiorentini, Miorin e Miguel (1993) apresenta três concepções de álgebra, quais sejam, Linguístico-pragmática, Fundamentalista-estrutural e Fundamentalista-analógica.

Por fim, consideramos o trabalho de Linz e Gimenez (2001), o qual também apresenta três concepções de álgebra. São elas a concepção letrista, concepção letrista facilitadora e a concepção denominada modelagem matemática. Ainda, nossos estudos sobre o trabalho de Lins e Gimenez (1997) trouxeram uma outra concepção, denominada Pré-álgebra.

Com a análise dos trabalhos citados e a partir de inúmeras discussões e reflexões realizadas em nosso grupo de pesquisa, foi elaborado um quadro de referência com nossas concepções de educação algébrica. O quadro em questão apoiará nossas análises realizadas sobre os entendimentos de álgebra apresentados pelos alunos do 3º ano do Ensino Médio que discutiremos nesse artigo e é apresentado a seguir.

Quadro 1: Quadro de referência das categorias de álgebra.

Categorias de Álgebra	Principais ideias
1. Pré-Álgebra	» Manipulação de somas, produtos e potências aritméticos; » Resolução de problemas aritméticos para a introdução do pensamento algébrico.

2. Generalizações	» Aritmética generalizada; » Estrutura de representação formal do concreto (através da abstração); » Atribuir grau de abstração e generalidade aos símbolos linguísticos.
3. Relações	» Estudo das relações entre grandezas.
4. Estruturação	» Estudo das estruturas e propriedades atribuídas às operações com números reais e polinômios; » Linguagem simbólica/variável como símbolo arbitrário.
5. Modelagem	» Iluminar ou organizar uma situação, como ferramenta; » Construção da atividade e exercícios de modelagem; » Modelagem de situações a partir de situações-problema.
6. Manipulação	» Conjunto de técnicas ou procedimentos específicos para abordar problemas por métodos algorítmicos; » Capacidade de efetuar e expressar transformações algébricas primordialmente simbólicas; » Atividades que envolvam incógnitas com o objetivo de simplificar ou resolver.

Fonte: Silva, Saito, Souza e Bezerra (2015, p. 2622).

A categoria Pré-Álgebra, conforme mencionamos, surgiu a partir da análise do trabalho de Lins e Gimenez (1997). Essa categoria envolve a manipulação de somas, produtos e potências aritméticas, bem como a resolução de problemas aritméticos introdutórios ao pensamento algébrico.

A categoria Generalizações foi compilada a partir dos trabalhos de Fiorentini, Miorin e Miguel (1993), Lee (2001), Usiskin (1995) e Lins e Gimenez (1997). Envolve a aritmética generalizada, estruturas de representação formal por meio de abstrações e a atribuição de certo grau de abstração e generalidade a símbolos linguísticos.

A categoria Relações foi elaborada a partir do trabalho de Usiskin (1995) envolvendo a concepção de álgebra como estudo de relações entre grandezas.

A categoria Estruturação surgiu a partir de nossa análise dos trabalhos de Usiskin (1995) e Fiorentini, Miorin e Miguel (1993). Essa categoria envolve o estudo de estruturas e propriedades atribuídas a operações com polinômios e números reais e a mobilização de linguagem simbólica, sendo a variável considerada um símbolo arbitrário.

A categoria Modelagem foi elaborada a partir dos artigos de Lee (2001) e Lins e Gimenez (2001). Envolve a utilização da álgebra como ferramenta, iluminando ou organizando situações, a construção de atividades e exercícios envolvendo modelagem e a modelagem a partir de situações-problema.

Finalmente, a categoria Manipulação surgiu com as análises realizadas pelo grupo sobre os trabalhos de Usiskin (1995) e Fiorentini, Miorin e Miguel (1993). Essa categoria envolve a utilização de técnicas e procedimentos específicos para a abordagem de problemas com utilização de algoritmos, a capacidade de trabalhar com transformações algébricas simbólicas e atividades que envolvam a utilização de incógnitas para a simplificação e resolução de situações matemáticas.

3. Aspectos Metodológicos

Esta investigação define-se através de uma abordagem qualitativa de pesquisa ao considerar elementos de caráter interpretativo, tais como, a interação entre sujeitos e objetos de conhecimento como fonte de significados construídos socialmente. Outro elemento da pesquisa qualitativa que destacamos é a coleta dos dados realizada no próprio local onde intercorre a produção dos fenômenos que se quer investigar, quer seja, a escola ou a sala de aula (ESTEBAN, 2010). Ainda, de acordo, com Demo (2000), insere-se numa perspectiva teórica por ter como objetivo "reconstruir teoria, conceitos, ideias, ideologias, polêmicas, tendo em vista, em termos imediatos, aprimorar fundamentos teóricos" (DEMO, 2000, p. 20), ou ainda, desenvolver quadros teóricos.

Selecionamos para participar da pesquisa três escolas públicas da região metropolitana do Estado de São Paulo, sendo que duas estão localizadas na cidade de Santo André e uma na cidade de São Bernardo do Campo. Nesta comunicação discutiremos a atividade aplicada na escola pública de São Bernardo do Campo, selecionada por nosso grupo pela facilidade de acesso dos pesquisadores e pelo espírito cooperativo encontrado entre a direção e os professores que concordaram em participar da pesquisa. A investigação ocorreu, como já dissemos, com os alunos do 3º ano do Ensino Médio em dois momentos.

O primeiro momento foi o contato inicial com esses estudantes que se deu por meio de uma aula cedida pelo professor titular onde nos apresentamos como grupo de pesquisa e convidamos os interessados a participar de nossa investigação. Assim, entregamos um formulário para levantarmos o perfil dos participantes e, ao finalizar essa primeira intervenção, efetuamos uma atividade introdutória do tipo *brainstorm*, na qual a partir da palavra "equação", escrita na lousa, pedimos que os estudantes dissessem palavras que se relacionavam com seu significado.

O segundo momento consistiu na elaboração e aplicação de um questionário com cinco questões matemáticas envolvendo a álgebra, extraídas das macro avaliações (SILVA, SOUZA e BEZERRA, 2014) e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP, 2015), e que possuem como característica comum a possibilidade de diferentes maneiras de resolução para cada questão. Os participantes, em torno de 28 alunos, foram reunidos em grupos com três ou quatro estudantes num total de oito grupos, sendo que apenas dois resolveram completamente as cinco questões. As questões escolhidas para análise e apresentação, nesta comunicação, são as denominadas questão 2 e questão 3 no questionário. Os motivos da escolha são explicitados na análise que segue.

4. Análise e Discussão

As duas questões selecionadas para análise apresentaram em torno de 50% de acertos, nos oito grupos em que foram resolvidas, os quais foram denominados de G1 a G8. Isso nos leva a inferir que possuem um grau de dificuldade razoável, pelo menos em princípio. Como todas as questões contidas na sequência proposta, essas duas questões também possibilitavam a resolução por diferentes abordagens matemáticas. Um dos nossos objetivos era verificar se, com o amadurecimento matemático desses estudantes, por serem de 3º ano do Ensino Médio, também encontraríamos resoluções mais aprimoradas em relação às feitas pelas turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, cujos resultados são apresentados em outra comunicação neste XII ENEM. Nossa pretensão é fazer, posteriormente, uma articulação entre os nossos resultados e as resoluções desenvolvidas nos anos finais do Ensino Fundamental.

A questão 2 foi adaptada da última prova da 11ª edição da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP, 2015) e sua escolha deve-se a variedade de resoluções possíveis que abarcam diferentes conceitos matemáticos, tais como, identificação de padrões, reconhecimento de quadrados perfeitos e suas propriedades, como também, uma possível generalização a partir da afirmação "a linha n contém $2n - 1$ termos e termina com o número n^2", o que pode ser verificado através do Princípio de Indução Finita. A variedade de conceitos matemáticos contemplados por essa questão estimula o desenvolvimento de pensamentos mais aprimorados sobre representações algébricas, um dos objetivos de nosso grupo consiste em verificar as potencialidades algébricas que diferentes exercícios possam ter.

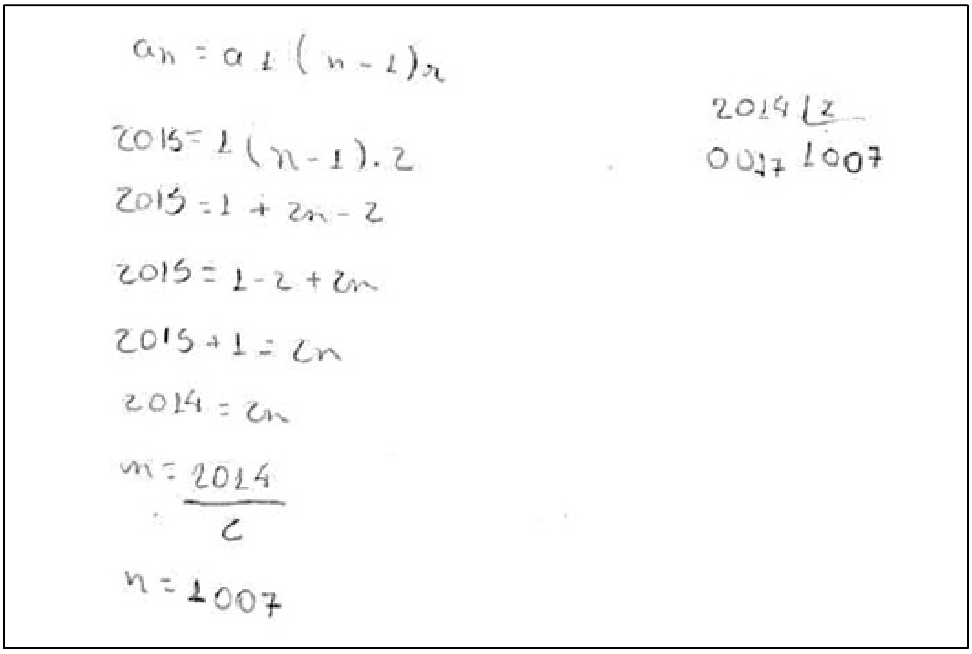
QUESTÃO 2

Os números inteiros positivos foram escritos em sequência, como indicado na figura. Observe que na primeira linha foi escrito o número 1 e que nas seguintes há dois números a mais do que na linha anterior. Em qual linha foi escrito o número 2015?

Linha 1 1
Linha 2 2 3 4
Linha 3 5 6 7 8 9
Linha 4 10 11 12 13 14 15 16
Linha 5 17 18 19 20 21 22 23 24 25

Para nossa análise trouxemos duas resoluções com abordagens distintas. Na primeira resolução do grupo G7, vemos uma tentativa equivocada de aplicar a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética. A abordagem dessa resolução nos evidencia o reconhecimento de um padrão numérico de crescimento da sequência, o que provavelmente foi confundido pelos respondentes ao considerar a razão da progressão como $n = 2$, ou seja, como o número de elementos que se acrescenta em cada linha, diferentemente da definição de uma razão em uma P.A. que podemos escrever como $r = a_{n+1} - na$. Observamos que há uma tentativa de empregar os conceitos trabalhados no Ensino Médio nessa questão, mas que, provavelmente, a definição de progressão se confunde com a de sequência, nos mostrando que há um domínio claro do conceito trabalhado.

Figura 1 – Protocolo G5


$a_n = a_1 (n-1)r$

$2015 = 1(n-1).2$

$2015 = 1 + 2n - 2$

$2015 = 1 - 2 + 2n$

$2015 + 1 = 2n$

$2014 = 2n$

$n = \frac{2014}{2}$

$n = 1007$

$2014 \,\underline{|\, 2}$

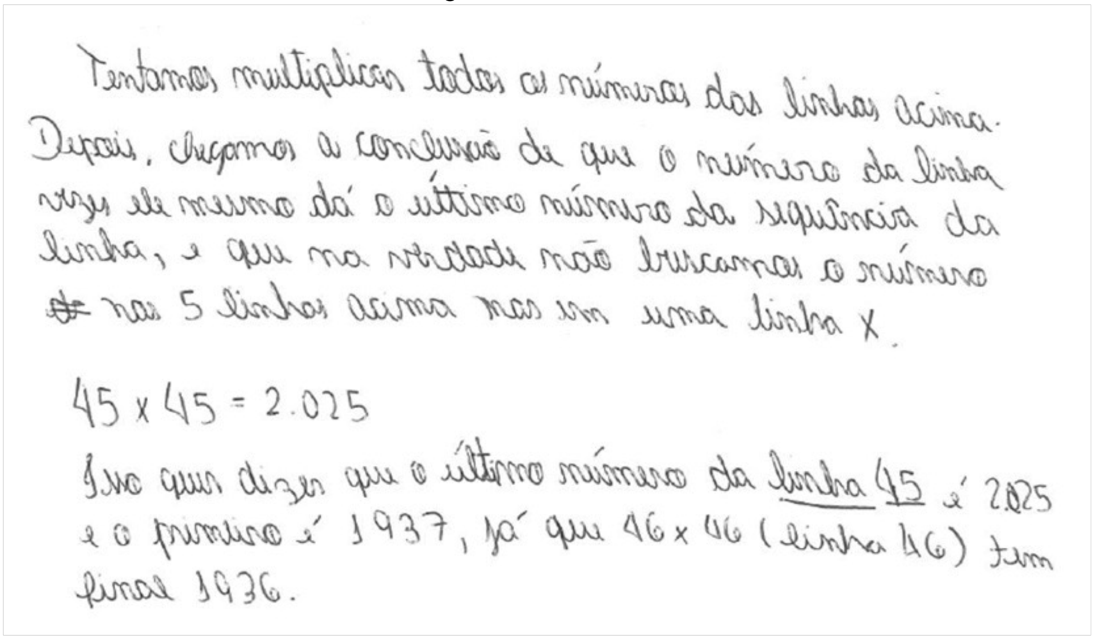
$0014 \quad 1007$

Fonte - Dados da pesquisa

A categoria na qual acreditamos que essa resolução melhor se enquadra é a de Manipulação uma vez que os estudantes tentam aplicar uma fórmula de maneira algoritmizada, sem se ater ao significado da expressão e as implicações da utilização dessa estratégia para resolução da questão.

No segundo protocolo encontramos uma justificação dos procedimentos adotados pelos estudantes ao resolver a questão e observamos que há a descrição literal do procedimento realizado pelo grupo em linguagem coloquial. Destacamos na frase "*não buscamos o número nas 5 linhas acima, mas em uma linha x*", o conceito de incógnita como um valor desconhecido a ser encontrado se expressa na frase acima, embora não haja por parte dos estudantes nenhuma intenção explícita de uma transposição da linguagem natural para uma linguagem matemática. A resolução apresentada pelo G5 se assemelha as demais resoluções encontradas dessa mesma questão nos oito grupos investigados.

Figura 1: Protocolo G5


Tentamos multiplicar todos os números das linhas acima. Depois, chegamos a conclusão de que o número da linha vezes ele mesmo dá o último número da sequência da linha, e que na verdade não buscamos o número ~~de~~ nas 5 linhas acima mas sim uma linha X.

45 x 45 = 2.025

Isso quer dizer que o último número da linha 45 é 2025 e o primeiro é 1937, já que 46 x 46 (linha 46) tem final 1936.

Fonte: Dados da Pesquisa

A fim de continuarmos nos aprofundando em questões que contemplassem diferentes formas de resolução e, principalmente, analisarmos se e como os estudantes abordam algebricamente essas questões, apresentamos a questão3 retirada de um dos trabalhos desenvolvidos pelo GEPEMA[1] com o intuito de debruçados nas análises iniciais do grupo de Londrina, analisarmos quais características poderíamos encontrar nas resoluções dos estudantes investigados.

QUESTÃO 3
Um carteiro entregou 100 telegramas em 5 dias. Em cada dia, a partir do primeiro, entregou 7 telegramas a mais que no dia anterior. Quantos telegramas entregou em cada dia?

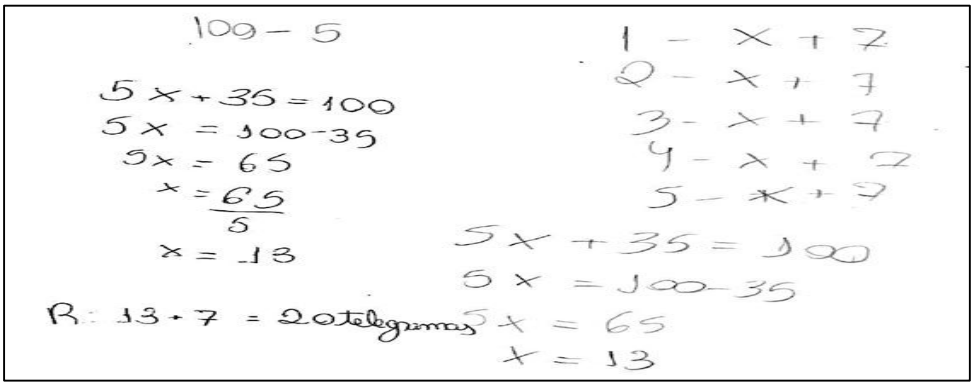
A partir de nossa coleta de dados, foram selecionadas duas resoluções que contemplam abordagens previstas por Buriasco, Cyrino e Soares (2004) em suas análises propostas para a correção de questões do tipo abertas. Cabe salientar, que o intuito de nosso trabalho não é aplicar o método desenvolvido pelos autores e sim nos basearmos em seus estudos para levantarmos indícios de uma abordagem algébrica para a resolução da questão.

[1] Grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação, sediado na Universidade Estadual de Londrina. *Homepage:* http://www.uel.br/grupo-estudo/gepema/

Embora tal atividade possua uma gama de objetivos variados a serem analisados, nosso enfoque concentrava-se na manifestação das categorias de *Generalização* e *Modelagem*, onde esperávamos identificar se os estudantes fariam a (i) transposição da linguagem natural para uma linguagem algébrica, seus (ii) procedimentos de resolução e a (iii) aplicação da fórmula como um tipo de generalização, categoria esta, denominada por Usiskin (1995) como *Estudo das relações entre grandezas.*

No protocolo abaixo, encontramos uma abordagem algébrica na tentativa de transposição da linguagem para uma equação polinomial de primeiro grau. O G5 sistematiza as informações dos cinco dias ao lado, considerando *x* como o número de telegramas a serem entregues, o emprego da incógnita é utilizada de maneira apropriada, o equívoco encontra-se em não considerar que a cada dia que se passou houve um acréscimo de 7 telegramas ao valor do dia anterior, talvez por distração na leitura ou uma falha de compreensão na proposta da atividade. Ao considerar a resposta final como *20 telegramas* entregues por dia, o grupo encontra uma resposta coerente com o sistema equivocado de resolução proposto, já que são *20 telegramas* em *5 dias*, isso resulta no total de *100 telegramas* na semana. Embora a compreensão da atividade possa ter comprometido a resolução, verificamos que há uma transposição algébrica e a resolução procedimental da equação se dá de forma correta, manifestando assim as categorias previstas inicialmente.

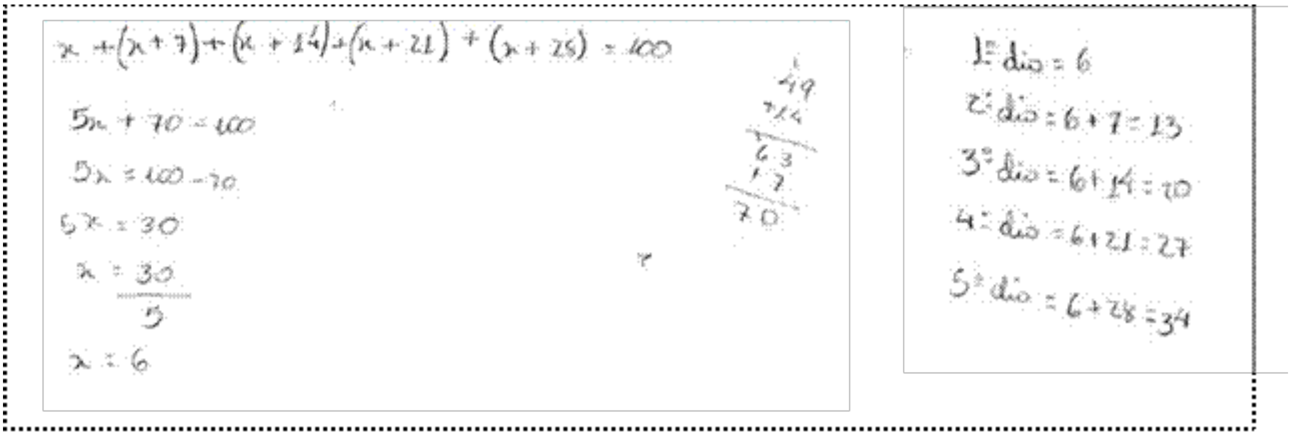
Figura 2: Protocolo do G5



Fonte: Dados da Pesquisa

Na última análise proposta neste trabalho, trazemos uma resolução que contempla de forma satisfatória as categorias almejadas. O G6 identifica e transpõe a equação apropriada para a resolução da questão, utilizando conceitos aprendidos e trabalhados nas séries finais do Ensino Fundamental, observamos um domínio na identificação da equação que expressa o problema, como também, na resolução desta equação. Apesar de esperarmos uma abordagem matemática mais próxima dos conteúdos trabalhados no Ensino Médio, como o da aplicação da fórmula do termo geral de uma P. A. e de sua soma, destacamos o conteúdo das autoras ao observar a demonstração de uma abordagem algébrica e sua compreensão para a resolução da questão.

Figura 3: Protocolo G6



Fonte - Dados da pesquisa

5. Considerações Finais

As questões selecionadas para análise nos trouxeram resultados muito relevantes quanto à aplicação do *Quadro de referência das categorias de álgebra*, que contempla diversas manifestações matemáticas possíveis, privilegiando a abordagem algébrica de resoluções. Ainda que nosso grupo de respondentes nesta investigação esteja restrito a uma única sala de aula, acreditamos que os resultados aqui apresentados sejam evidências de prováveis dificuldades encontradas no que diz respeito a aprendizagem de conceitos algébricos apontadas na na literatura. Acreditamos também que a carência de abordagens matemáticas mais maduras, relacionando os conteúdos trabalhados na Educação Básica e sua (não) assimilação pelos estudantes como uma ferramenta prática para abordagem e resolução de problemas, enfatiza a resistência que muitos estudantes possuem na ampliação e significação desses conceitos. Essa aparente resistência dos estudantes pode ter relação com a forma como se ensina álgebra, considerando que ser professor implica em ter tido uma história como aluno, tanto na Educação Básica como na Universidade.

Embora nosso grupo se detenha a investigar o *Conhecimento Profissional Docente,* esse trabalho se insere na proposta de analisarmos, posteriormente, como os professores participantes de nossa pesquisa procuram trabalhar em sua prática com questões que abordem diferentes possibilidades de resolução e quais conhecimentos são evocados em sua prática, para que equívocos conceituais, como os analisados neste trabalho, sejam prevenidos.

6. **Referências**

ALVES, K. A.; FAGUNDES, L. V. N.; ROSETTO, M. C. do N.; SILVA, T. H. I.; GOMES, V. M. S. A prova Brasil/2011: identificando dificuldades relacionadas às concepções de álgebra por meio dos descritores. In: **Anais do Encontro Paulista de Educação Matemática**, 2014, Birigui. Educação matemática no contexto das propostas do ensino integrado: projetos e políticas, 2014. p. 72-88.

BURIASCO, Regina Luzia Corio de; CYRINO, Márcia Cristina de Costa Trindade; SOARES, Maria Tereza Carneiro. **Um estudo sobre a construção de um manual para correção das provas com questões abertas de matemáticas** - AVA 2002. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2004, Pernambuco. **Anais... .** Recife: SBEM, 2004. p. 1 - 15.

DEMO, Pedro. **Metodologia do conhecimento científico**. São Paulo: Atlas, 2000.

ESTEBAN, M. P. S. **Pesquisa qualitativa em educação: fundamentos e tradições**. Porto Alegre: Artmed, 2010.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar ... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições.** São Paulo, v.4, n.1 [10], p. 78 – 91. mar. 1993.

LEE, L. **Early – but which algebra? The future of the teaching and learning of algebra**. CIDADE***:*** ICMI STUDY CONFERENCE, 2001.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

______________________. Sobre a Álgebra. In: LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus Editora, 2001. Cap. III, p. 89 – 157.

Olimpíada Brasileira de Matemática das escolas públicas: Banco de questões 2015. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/bq/bq2015.pdf>. Acesso em: 29 mar. 2016.

SILVA, R. L.; SAITO, D. S.; SOUZA, D.; BEZERRA, F. J. B. **Concepções de álgebra: uma tentativa de construir um "quadro de referência" por integrantes de um grupo colaborativo**. In: Anais do Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática 4º, 2015, Ilhéus. **Anais... .** Ilheús, Bahia, Brasil, p. 2612 - 2623.

SILVA, R. L.; SOUZA, D. S.; BEZERRA, F. J. B. Que concepções de álgebra surgem nas questões de macroavaliações: o caso do ENEM 2011. In: **Anais do Encontro Paulista de Educação Matemática**, 2014, Birigui. Educação matemática no contexto das propostas do ensino integrado: projetos e políticas, 2014. p. 30-41.

USISKIN, Zalman. **Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis.** In: COXFORD, Arthur F.; SHULTE, Alberto P.(Org). As idéias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995.