

## RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS: RALI MATEMÁTICO NUMA ESCOLA PÚBLICA PAULISTA

Marília Prado  
mariliap@ime.usp.br

Ana Paula Jahn  
IME-USP  
anajahn@ime.usp.br

### Resumo

Este trabalho apresenta os principais resultados da dissertação de mestrado que teve como tema a Resolução de Problemas no ensino e aprendizagem da Matemática na Educação Básica, inserindo-se no projeto *Ensino de Matemática na Escola Elementar*, do Observatório da Educação<sup>1</sup>. Seu objetivo foi investigar de que maneira práticas de Resolução de Problemas podem ser implementadas na sala de aula e como são vivenciadas pelos alunos, com ênfase no papel das diferentes representações semióticas nos processos de resolução dos alunos. Para tanto, propôs-se uma experiência em na 1ª série do Ensino Médio de uma escola pública de São Paulo/SP, inspirada na competição internacional *Rali Matemático*. A análise dos dados coletados no estudo experimental de intervenção mostrou que os alunos vivenciaram a experiência como participantes ativos nos processos de resolução dos problemas e reconheceram a importância das representações.

**Palavras-chave:** Resolução de Problemas; Ensino Médio; Rali Matemático; Representação semiótica.

### 1. Introdução

Segundo Onuchic e Allevato (2004), a utilização da Resolução de Problemas (RP) como metodologia vem sendo destacada desde meados da década de 80, em todo o mundo, como um dos propósitos do ensino da Matemática. Nas pesquisas referentes ao tema, observa-se uma tendência em considerar que a RP deve proporcionar a descoberta, dar oportunidade de o aluno desenvolver diferentes tipos de raciocínio e estratégias, pensar matematicamente, ampliar seu conhecimento, de forma a dar sentido a conceitos e propriedades matemáticas.

---

<sup>1</sup> Projeto CAPES n. 20698 desenvolvido no IME-USP, propiciou auxílio financeiro à primeira autora.

Ao usarmos o termo “problema”, é preciso ter claro seu significado e vários significados podem ser considerados. Polya (1985), por exemplo, destaca que temos um problema sempre que procuramos os meios para atingir um objetivo. Segundo o autor, quando temos um desejo que não podemos satisfazer imediatamente, pensamos nos meios de satisfazê-lo e, assim, está colocado um problema.

Para Schoenfeld (1985), a realização de uma tarefa matemática nem sempre caracteriza a resolução de um problema. Esse autor define *problema*, num sentido relativo, como uma tarefa que é difícil para quem está tentando resolvê-la. Nessa perspectiva, ele explica que se alguém já tem acesso a um plano para a solução de uma tarefa matemática, essa tarefa é um exercício e não um problema.

Apesar dos estudos e do que se discute sobre o potencial da RP no ensino, fazer com que essa metodologia seja incorporada à sala de aula de forma efetiva, com os objetivos previstos, não é uma tarefa fácil. Para grande parte dos professores da Educação Básica, abordar conceitos e métodos sob a perspectiva da RP, ainda se limita a explicar um procedimento que funcione para resolver determinados tipos de problemas e fazer com que seus alunos se apropriem e reproduzam essa técnica. Dessa forma, a resolução de um problema em Matemática se apresenta como algo “estático”, restrito à identificação de uma técnica ou estratégia específica, não estimulando nem propiciando o desenvolvimento do pensamento matemático e da criatividade. Tal perspectiva contribui para que os alunos não compreendam o valor e não vejam sentido nos conceitos e métodos matemáticos ensinados na escola.

As questões referentes à efetiva implementação da Resolução de Problemas, em sala de aula, têm relação com a formação dos professores. Muitas vezes, as limitações ocorrem, pois, estudantes de cursos de Licenciatura (em formação inicial) não recebem o embasamento necessário para estudar e discutir metodologias de ensino de Matemática diversificadas em suas aulas e no estágio supervisionado. Antes do início da atividade docente, dificilmente esses estudantes têm a oportunidade de vivenciar, na prática, experiências que as envolvam.

Assim, percebemos a falta de preparo de muitos professores que estão hoje na sala de aula, devido à abordagem superficial no que se refere às metodologias de ensino durante sua formação. Durante o curso, conhece-se as metodologias de ensino, as principais justificativas e benefícios de se usar cada uma delas, mas não sabia como implementá-las na prática

docente. Entre elas, a Resolução de Problemas se destaca, em particular pela quantidade de trabalhos de pesquisa existentes sobre esse tema. No entanto, poucos mostram resultados práticos a partir do uso dessa metodologia, sendo menos frequentes pesquisas com experiências reais nas salas de aula dos anos finais da Educação Básica.

Segundo Allevato (2005), a RP favorece um trabalho mais autônomo, em que o conhecimento construído fará mais sentido para o aluno, aumentando a confiança em suas próprias capacidades, por isso as razões para que tal metodologia seja utilizada devem ser consideradas.

Com isso em mente, buscou-se uma maneira de realizar uma experiência com base na resolução de problemas, na intenção de que os alunos vejam a Matemática como algo que são capazes de entender, que proporcione a eles o desenvolvimento do raciocínio e de estratégias e que, além disso, motive-os na busca por soluções de problemas diversificados e pelo conhecimento matemático.

Durante a busca da solução de um problema, as ideias precisam ser organizadas a partir da representação de relações e objetos matemáticos. Conforme aponta Carreira (1999), os diferentes tipos de representações de ideias matemáticas são entendidos como ferramentas úteis que os alunos devem mobilizar corretamente perante uma situação concreta. Segundo a autora, se o aluno estiver em condições de desenvolver códigos gráficos ou simbólicos que lhe permitam representar uma situação, ele terá mais poder matemático para lidar com um problema.

Ainda sobre a questão da representação, Duval (2009) destaca que os objetos matemáticos não são diretamente acessíveis à percepção, portanto, o acesso a eles é obtido por meio de representações semióticas, que são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema semiótico de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.

O papel fundamental das representações semióticas é que elas são um sistema particular de signos – por exemplo, língua natural, língua formal, escrita algébrica ou gráficos – não apenas usadas como simples meios de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, ou seja, para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem, mas são igualmente essenciais à atividade cognitiva de pensamento.

Do ponto de vista do ensino, possibilitar a apropriação desses diferentes registros implica em criar condições para a apreensão de conceitos matemáticos pelos alunos, pois a distinção entre um objeto e sua representação é um ponto estratégico para a compreensão da Matemática, uma vez que, segundo Duval (2012), quando se confunde o objeto com sua representação, há uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem.

Em especial, os registros figurais aparecem na resolução de problemas de Geometria como auxiliares, por vezes permitindo acesso mais fácil à ideia da solução. Para Duval (2012), as atividades de construção de figuras podem “ensinar a ver”, isto é, permitem descobrir, mobilizar ou controlar a produtividade heurística delas.

A heurística de problemas de Geometria está relacionada a um registro de representações que originam formas de interpretações autônomas, entre elas, a apreensão operatória. Esse tipo de apreensão consiste na divisão de uma figura e a análise de suas partes – combinando-as e recombinando-as – e permite a operação de reconfiguração.

Para Duval (2012), a reconfiguração é um tratamento que possibilita a comparação e, eventualmente, o reagrupamento de subfiguras de uma figura a partir de sua divisão. Quando for o caso, pode-se, ainda, incluir certo número de partes da figura, fazendo a divisão de suas unidades elementares. Assim, obtém-se uma figura diferente daquela dada inicialmente. Portanto, as reconfigurações possibilitam o uso de figuras com sua função heurística na resolução de problemas.

Desta forma, entendemos ser válido considerar um estudo sobre o papel das representações nos processos de resolução de problemas, e principalmente, visando nosso desenvolvimento profissional, ter a oportunidade de vivenciar uma experiência com essa metodologia.

## 2. Desenvolvimento do estudo

A pesquisa compreendeu um estudo experimental – elaboração, realização e análise de situações de resolução de problemas, com ênfase no uso de diferentes representações – cujas análises foram de natureza qualitativa. Envolveu a participação de três turmas de 1º ano do Ensino Médio de uma escola estadual da cidade de São Paulo, totalizando 97 alunos.

A inspiração para planejamento e elaboração dos instrumentos utilizados na experiência veio do trabalho de Fagnant e Vlassis (2013), com as necessárias adaptações, principalmente, devido ao nível de escolaridade dos alunos pesquisados. Essas autoras destacam o papel das representações no processo de resolução de problemas. Elas realizaram testes com alunos que não tinham familiaridade com a produção e utilização de representações para resolver problemas, examinando o impacto de dois tipos de representações esquemáticas no desempenho dos alunos na resolução de problemas não-rotineiros.

Buscando compreender o papel das representações na atividade de resolução de problemas, apoiamo-nos nos estudos de Duval (2009, 2011) que enfatiza a importância e necessidade de um ensino pautado nos registros de representação semiótica para a aprendizagem em Matemática. Segundo esse autor, a compreensão em Matemática supõe a coordenação de, ao menos, dois registros de representação semiótica. Tal coordenação está presente na atividade de conversão que é a transformação de uma representação em uma interpretação em outro registro, conservando total ou parcialmente o conteúdo da representação inicial.

Segundo Duval (2011), a conversão é fundamental do ponto de vista cognitivo, uma vez que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão, e não pode ser reduzida a uma simples “codificação”. Trata-se de uma transformação externa ao registro de início (o registro da representação a converter). Dessa forma, o autor destaca que a compreensão integral de um conteúdo conceitual se manifesta pela rapidez e espontaneidade da atividade cognitiva de conversão.

Nesse contexto, pretendemos enfatizar o uso de diferentes representações semióticas em atividades de resolução de problemas visando auxiliar os estudantes na aquisição dessas habilidades. Portanto, buscamos analisar atividades de conversão na produção dos alunos ao resolverem problemas.

Em relação ao experimento, os alunos, em grupos, resolveram problemas dentro do princípio de trabalho coletivo que é proposto no *Rali Matemático*<sup>2</sup>, uma competição entre classes (de 8 a 16 anos) baseada na resolução de problemas matemáticos. Teve início em 1993

---

<sup>2</sup> Organizados pela *Associação do Rali Matemático Transalpino*, para mais detalhes ver: [www.armtint.org](http://www.armtint.org)

na Suíça e hoje se desenvolve em 9 países. Está na sua 23<sup>a</sup> edição, contando atualmente com a participação de mais de 4000 turmas.

Os problemas das provas do Rali são diferenciados pelos domínios matemáticos necessários para sua resolução e pela categoria às quais se destinam. Os referidos domínios considerados são: Aritmética, Álgebra, Geometria e Lógica. Com isso, o *Rali* pretende propor situações para as quais os alunos não necessariamente dispõem de uma solução imediata, mas que possibilitam a “invenção” ou elaboração de uma estratégia para experimentar, conjecturar, verificar, justificar sua solução, para explicar o desenvolvimento de seu raciocínio.

Dessa forma, os organizadores estabelecem que os problemas propostos devem ser inéditos – uma vez que se os alunos já conhecem a solução, não é mais um problema! – ricos e estimulantes para os alunos, o que os caracterizam como verdadeiros problemas, de acordo com as definições encontradas na literatura.

Com essa escolha, fizemos a hipótese que o *Rali* fornece um contexto ou ambiente favorável à aprendizagem matemática via Resolução de Problemas. Mais especificamente, as discussões de problemas do *Rali* permitiriam um tipo de intervenção com ênfase nas representações, nos moldes da pesquisa de Fagnant e Vlassis (2013), citada anteriormente.

O experimento foi realizado em três fases, conforme mostramos no Quadro 1: na Fase 1, os alunos fizeram uma atividade (Atividade Inicial) e responderam um questionário cujo foco eram o reconhecimento da relação deles com a RP. Na atividade inicial dessa fase foi pedido que os alunos, em duplas, encontrassem a solução para duas questões que envolviam os mesmos conceitos matemáticos. No entanto, a primeira exigia a aplicação direta de uma propriedade conhecida: o Teorema de Pitágoras. A segunda, se enquadra na definição de problema, uma vez que sua resolução demandava interpretação e escolha de propriedades e conhecimentos a serem aplicados, além de apreensão operatória das figuras geométricas envolvidas. Assim, a resposta não poderia ser obtida de forma imediata.

A realização dessa atividade justificava-se, pois, segundo Echeverría e Pozo (1998, p.17), os limites entre a solução de problemas e a realização de exercícios nem sempre são fáceis de estabelecer.

Entretanto, é importante que nas atividades de sala de aula a distinção entre exercícios e problemas seja bem definida e, principalmente, que fique claro para o aluno que as tarefas exigem algo mais de sua parte do que o simples exercício repetitivo.

Quadro 1: Quadro Sinóptico do Dispositivo Experimental

Quadro Sinóptico do Dispositivo Experimental			
Fases do Estudo		Atividades	Instrumentos de coleta de dados
Fase 1	<i>Relações pessoais dos sujeitos sobre a Resolução de Problemas</i>	<b>Etapa 1 (duração: 2 x 50min.)</b> Atividade inicial: Problema e Exercício, em dupla. Questionário inicial Apresentação do <i>Rali Matemático</i>	Produções escritas (das duplas ou grupos)  Respostas ao questionário  Notas de observação
		<b>Etapa 2 (duração: 1 x 50min.)</b> Prova I: Resolução, em grupo, de 3 problemas do <i>Rali Matemático</i>	
		<b>Etapa 3 (duração: 2 x 50min.)</b> Discussão dos problemas da Prova I com ênfase no uso de diferentes representações	
Fase 2	<i>Exploração de diferentes representações na resolução de problemas</i>	<b>Etapa 1 (duração: 1 x 50min.)</b> Prova II: Resolução, em grupo, de 3 problemas do <i>Rali</i> , com indicação de representação a ser utilizada	Produções escritas dos grupos (respostas da Prova II)  Notas de observação
		<b>Etapa 2 (duração: 2 x 50min)</b> Discussão dos problemas da Prova II com ênfase nas diferentes representações possíveis para resolução	
Fase 3	<i>(Re)Utilização de representações na Resolução de Problemas</i>	<b>Etapa 1 (duração: 1 x 50min)</b> Prova III: Resolução de 3 problemas do <i>Rali</i>	Produções escritas dos grupos (respostas da Prova III)  Respostas ao questionário  Notas de observação
		<b>Etapa 2 (duração: 1 x 50min)</b> Questionário final	

FONTE: Prado (2015, p. 62)

Tendo esclarecido o tipo de atividade da qual os alunos participariam, eles resolveram três problemas em grupo extraídos do banco de questões do *Rali Matemático* – atividade denominada *Prova I*.

Como nas demais provas, os dois primeiros problemas envolviam o domínio das Funções e o último, da Geometria. Abaixo, reproduzimos um dos problemas aplicados.

Rali Matemático	PROVA I	©ARMT
-----------------	---------	-------

**1. TEMPOS DE COLHEITA DE UVA**  
Nas vinhas do Sr. Bruno, num dia de colheita de uva, com toda uva colhida, enchem-se 18 tanques grandes e 13 tanques médios. Para transportá-los à adega, o Sr. Bruno dispõe de três tratores:

- o trator A pode transportar, completamente carregado, 3 tanques grandes e 2 médios;
- o trator B pode transportar, completamente carregado, 2 tanques grandes e 1 médio;
- o trator C pode transportar, completamente carregado, 1 tanque grande e 1 médio;

No referido dia, Sr. Bruno utilizou pelo menos uma vez todos esses tratores e sempre completamente carregados.

**Quantas viagens o Senhor Bruno pode ter feito com cada um desses tratores para transportar todos os tanques para a adega?**  
**Descrevam todas as viagens possíveis e expliquem como vocês as encontraram.**

Figura 1: Problema da Prova I

Fonte: <http://www.armtint.org/>, tradução nossa.

Nos problemas de Geometria de todas as provas, a operação de reconfiguração tem papel fundamental na produtividade heurística das figuras. Reproduzimos na Figura 2 um dos problemas utilizados.

Rali Matemático	PROVA III	©ARMT
-----------------	-----------	-------

**3. PARTILHA JUSTA**  
Lucas e Catarina herdaram um grande terreno que tem a forma de um trapézio isósceles. Eles querem dividir o terreno em duas partes de mesma área por meio de uma cerca retilínea, partindo de uma estaca que se encontra em um dos lados paralelos do trapézio (na figura, o ponto P).

**Desenhem na figura o segmento PQ, que divide o trapézio em duas partes de mesma área.**  
**Expliquem como determinaram a posição da extremidade Q do segmento e porque as áreas são iguais.**

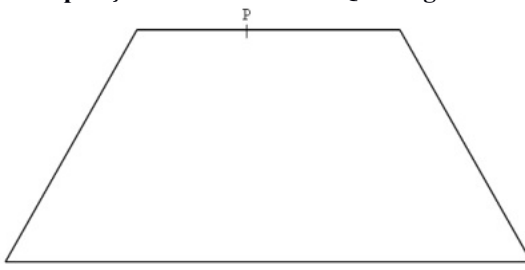


Figura 2: Problema da Prova III

Fonte: <http://www.armtint.org/>, tradução nossa.

A Fase 2, também em grupo, consistia na aplicação de três problemas do Rali (Prova II), que permitem representações semelhantes às abordadas na fase anterior. No entanto, os dois primeiros problemas são modificados de modo que, para solucioná-los, os alunos devem realizar um procedimento específico indicado no enunciado, como vemos na Figura 3. Tal procedimento é baseado em uma das representações possíveis para a resolução do problema. Para o problema de Geometria, a indicação de uma operação a ser realizada para a resolução



anularia qualquer pesquisa prévia a ser empregada. Assim, não foi sugerido uma representação específica a ser utilizada pelos alunos.

Na Fase 3, novamente em grupo voltaram a resolver problemas sem qualquer sugestão (*Prova III*).

Após cada etapa foram feitas intervenções cujo objetivo era colocar em discussão a solução dos problemas com enfoque nas possíveis representações utilizadas para a resolução dos problemas, enfatizando atividades de conversão de registros (Duval, 2009). Para isso, buscamos nos basear nas ideias dos próprios alunos e coordená-las com as possíveis maneiras de representar as situações propostas. Assim, visamos analisar o papel das representações envolvidas nas resoluções, considerando um trabalho efetivo sobre elas e identificar a reutilização de estratégias discutidas em cada fase do experimento.

Rali Matemático	PROVA II	©ARMT
<b>1. DIA DE CHUVA</b>		
Toda semana, Max e Leonardo compram na banca o último número da <i>Super Legal</i> , a revista preferida deles, e uma “coletânea” que inclui 5 edições antigas juntas.		
Numa tarde de chuva, Max lê a última edição publicada, a 5802, e Leonardo, a coletânea das edições antigas, 4506, 4507, 4508, 4509 e 4510, que acabou de ser publicada.		
Num certo momento, Leonardo pergunta: “ <i>Em breve não haverá mais coletâneas porque elas alcançarão o último número da Super Legal! O que eu vou ler então?</i> ”		
Max responde: “ <i>Você tem razão! Eu nunca tinha pensado nisso, mas não se preocupe, isso vai demorar muitas semanas para acontecer, até lá a chuva terá parado!</i> ”		
<b>Em quantas semanas as “coletâneas” de números antigos coincidirão com o novo número da revista Super Legal?</b>		
<b>Para responder, utilize a tabela abaixo. Ao final, justifique sua resposta.</b>		
<b>Semana</b>	<b>Nº da nova revista</b>	<b>Último nº da coletânea</b>
0	5802	4510
1	5802+1	4510+5
2		
...		
<i>N</i>		

Figura 3: Problema da *Prova II*

Fonte: <http://www.armtint.org/>, tradução nossa.

Ao final, os alunos responderam um questionário final que permitiu examinar a maneira como eles interpretaram a experiência com Resolução de Problemas e, ainda, a opinião deles em relação ao experimento.

### 3. Resultados

Na primeira fase, vimos que os alunos foram capazes de resolver um problema que requer apenas a aplicação de uma fórmula, mas não souberam mobilizar os conhecimentos necessários para a resolução de uma questão que exigia a elaboração de uma estratégia diferenciada.

Com a análise dos resultados da *Prova I*, notamos que, apesar de muitos alunos compreenderem as situações propostas, eles tiveram dificuldade em produzir representações adequadas e úteis para resolução de um problema. Esse fato ficou ainda mais claro durante as intervenções, quando os alunos puderam expor suas ideias iniciais e, com a devida organização, guiados pela pesquisadora, concluíram as soluções.

Percebemos que a presença do registro de representação na *Prova II* auxiliou os alunos na obtenção de informações pertinentes para as resoluções dos dois primeiros problemas. A dificuldade para concluir as soluções se revelou a partir do momento em que foi necessária a conversão do registro numérico tabular para o simbólico algébrico, o que já era esperado. De fato, como afirma Duval (2011), trata-se de uma atividade complexa que os alunos não realizam espontaneamente. Assim, é papel do professor propor situações diversas para que se familiarizem com ambos os registros e evoluam em suas articulações.

No problema de Geometria da mesma prova, observamos que alguns alunos reutilizaram uma estratégia de reconfiguração, que foi amplamente discutida na *Prova I*. O mesmo se pode afirmar sobre a resolução do problema de Geometria da *Prova III*, para a qual os alunos também se basearam nas atividades anteriores.

Já na Fase 3, vimos que mesmo sem obter respostas corretas para os dois primeiros problemas da *Prova III*, grande parte dos grupos apresentou tentativas de representação de um dos tipos discutido nas etapas anteriores, ou, ao menos, uma maneira mais organizada de apresentar os dados e expor suas ideias. Cabe observar que a indicação do tipo de registro a ser utilizado nos problemas da *Prova II* teve um efeito positivo, na medida em que tal registro esteve presente na maioria das soluções apresentadas. E mais, cabe observar que a realização da *Prova III* ocorreu cerca de dois meses após a devolutiva da segunda prova.

Com a análise das respostas do *Questionário Final* e, lembrando os encontros no decorrer do desenvolvimento da pesquisa, constatamos que, de maneira geral, a experiência foi válida para os alunos. Eles se mostraram motivados, envolvidos, concentrados em suas próprias ideias e dispostos a discuti-las e defendê-las no grupo, tanto na realização das provas,

quanto durante as discussões. Muitos alunos concordaram que a experiência de trabalhar em grupo foi motivadora, pois compartilhavam ideias e podiam avançar nas conclusões. Além disso, de certa forma, compreenderam a ênfase dada às diversas formas de representar os problemas, conforme ilustra a resposta de um dos alunos:

*“Na minha opinião gostei do Rali e dos problemas que são propostos, até porque nos ensina a pensar por etapas, utilizar tabelas e etc.”*

#### 4. Considerações Finais

Consideramos que os objetivos do trabalho foram globalmente atingidos. Temos que a implementação da Resolução de Problemas e a maneira como as atividades foram organizadas permitiram que os alunos vivenciassem a experiência como participantes ativos nos processos de resolução dos problemas. Ainda mais, a escolha do contexto do *Rali Matemático* favoreceu o trabalho cooperativo e colaborativo, incentivando os alunos na busca por defender e discutir suas ideias, além de redigir explicações de suas resoluções.

Especificamente, obtivemos poucas informações sobre o impacto de se trabalhar as representações semióticas de modo efetivo. Apesar de os alunos reconhecerem o foco e a importância dada às representações, como já mencionado, eles não viram a proposta do *Rali* e das discussões como integradas às aulas regulares de Matemática. Além disso, as intervenções foram pontuais e as representações trabalhadas, muito específicas. Portanto, o experimento não nos permitiu avaliar com clareza até que ponto os sujeitos adquiririam habilidades necessárias para escolher, utilizar, produzir e manipular certos tipos de representação na busca de soluções para problemas diversos.

Para o nosso desenvolvimento profissional, a pesquisa em relação ao tema e a implementação efetiva da experiência em Resolução de Problemas teve grande relevância. Vivenciar tal experiência envolveu dedicação ao preparo das atividades e das devolutivas, análise atenta dos dados e cuidado para controlar algumas variáveis de modo que os objetivos fossem atingidos. Todo o trabalho favoreceu, então, uma investigação sobre nossa prática docente e confirmou a motivação inicial de que o ensino de Matemática pode – e deve – ser baseado na Resolução de Problemas.

## 5. Referências

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o Computador à Resolução De Problemas Fechados: Análise De Uma Experiência**. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005, p.37-70.

CARREIRA, S. P. G. O Papel das Representações na Resolução de Problemas de Matemática Aplicado. In: ABRANTES, P. et al (Org.). **Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo**. Lisboa: APM, 1999, p. 253-265.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registro semióticos e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. Organização: Tânia M. M. Campos. Traduzido por Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Tradução de Mérciles Thadeu Moretti. **Revista Eletrônica de Matemática**, v. 07, n. 1, 2012. p.118-138.  
Disponível em: <[www.periodicos.ufsc.br](http://www.periodicos.ufsc.br)>. Acesso em: 30 mar. 2016.

ECHEVERRÍA, M. P. P; POZO, J. I. Aprender a Resolver Problemas e Resolver Problemas para Aprender. In: POZO, Juan Ignacio (org.). **A solução de problemas**: Aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

FAGNANT, A.; VLASSIS, J. Schematic Representations in Arithmetical Problem Solving: Analysis of Their Impact on Grade 4 Students. **Educational Studies in Mathematics**, 84(1), 2013, p. 149-168

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução e problemas. In: BICUDO, M.A.V.; BORBA, M.C. (Org.) **Educação Matemática: Pesquisa em movimento**. São Paulo: Cortez, 2004, p. 213-231.

POLYA, G. Ensinando por meio de problemas. **Revista do Professor de Matemática**, n. 7. Rio de Janeiro: SBM, 1985. p. 11-16.

SCHOENFELD, A. H. **Mathematical Problem Solving**. Flórida: Academic Press, 1985.