HÁ INFINITOS MAIORES QUE OUTROS?

Leo Akio Yokoyama
UFRJ
leo.akio@ufrj.br

Resumo:
Através da História da Matemática, surpresas, emoções e poesia, este minicurso fora aplicado em turmas do 9º ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal do Rio de Janeiro e no 3º ano do ensino médio do Instituto Federal do Rio Grande do Norte (Campus São Paulo do Potengi). Pretende ser uma proposta de aula, para séries do ensino fundamental II ou início do ensino médio, sobre os diversos tipos de infinito e mostrar o quão estranhos eles são! O infinito dos números pares é menor que o infinito dos números naturais? Como acomodar infinitas pessoas no Hotel de Hilbert se todos os quartos já estiverem ocupados? Como introduzir o conceito de número irracional através de um diálogo entre Sócrates e o escravo Mênon? Quem foi Georg Cantor? Um maluco ou um visionário?

Palavras-chave: Infinitos; História; Cantor; Hotel de Hilbert.

1. Introdução

"Longe, ao norte, numa Terra chamada Svithjod, existe uma rocha. Possui cem milhas de altura e cem milhas de largura. Uma vez em cada milênio, um passarinho vem à rocha para afiar seu bico. Quando a rocha tiver sido assim totalmente desgastada, então, um único dia da eternidade ter-se-á escoado". Hendrik Van Loon

Muitos alunos do ensino médio, talvez a maioria, trabalham com funções reais sem realmente conhecer a reta real, todas as suas peculiaridades e "segredos". Utilizam números irracionais desde o ensino fundamental, quando aprende sobre a raiz quadrada de 2, radiciação e suas propriedades, o número Pi, sem saber ao certo como surgiram tais números, por que eles foram motivo para serem considerados um marco no pensamento da humanidade e algo muito perturbador para os pitagóricos.

Antes dos estudantes aprenderem sobre funções reais, é importante que eles tenham uma noção sobre o que acontece na reta real. Para isso é necessário ter um conhecimento sobre o infinito dos números reais, e para conhecer o infinito dos números reais, é desejável que se conheça, previamente, o infinito dos números naturais, que é um assunto fascinante.

Então, este minicurso abordará, a partir do infinito dos números naturais, alguns aspectos muito interessante para um outra visão da matemática tradicional. Não aquela matemática com problemas, contas, resoluções, procedimentos, mas como as ideias matemáticas surgem, como as conjecturas são criadas, como nossa intuição pode nos trair e como a matemática tem o poder de retirar uma pessoa, que não sabe sobre os diversos infinitos, da “caixinha”, do nosso mundo limitado, tridimensional e regido por números racionais.

ISSN 2178-034X

2. O 1º Infinito

O minicurso começa com a pergunta: O que é infinito para vocês?

A partir das diversas respostas, o professor pode levantar diversas questões e discussões acerca do que é o conceito de infinito.

Onde no cotidiano, na natureza, na vida, encontra-se algo infinito? Será que o infinito existe ou é uma invenção do intelecto humano?

Os físicos não chegaram a uma conclusão se existe uma menor partícula, ou se o Universo observável tem um limite. O tempo, daqui para frente, é infinito, ou seja, existe a Eternidade? E com relação ao tempo passado? Houve um início ou o Universo sempre existiu, tendo assim uma eternidade passada?

Essas são algumas das possíveis discussões sobre as primeiras impressões sobre o infinito.

Alguém poderá dizer que os números são infinitos. E é justamente sobre o infinito dos números que os matemáticos se debruçaram e descobriram fatos muito estranhos, a começar pelo infinito dos números naturais.

A segunda pergunta a ser feita é: *Existem mais números naturais ou mais números pares? Ou ambos têm a mesma quantidade?*

Segundo Penteado (2004), a maioria dos alunos responde que existem mais números naturais que pares, e a argumentação deles é que os pares estão inseridos no conjunto dos naturais. Porém, os conjuntos em questão, são conjuntos com infinitos elementos e não é possível quantificá-los como se fossem conjuntos finitos. É necessária outra maneira de poder compará-los, e essa maneira chama-se associação um-a-um.

Imagine que é preciso saber se há mais cadeiras ou mais pessoas em uma determinada sala de aula. Para isso, não é necessário contar os elementos de cada conjunto (cadeiras e pessoas), basta cada pessoa sentar em uma única cadeira. Se sobrar cadeiras sem pessoas sentadas, obviamente haverá mais cadeiras. Se, por outro lado, sobrarem pessoas em pé e todas as cadeiras forem ocupadas, então existirá mais pessoas que cadeiras.

Para comparar conjuntos infinitos faz-se o mesmo. Então, se for possível encontrar uma associação de todos os elementos de um conjunto em um único elemento do outro e vice-versa (uma bijeção), ter-se-á provado que ambos os conjuntos têm a mesma quantidade de elementos.

Então, nessa primeira etapa, é possível mostrar que o infinito dos números naturais é igual ao infinito dos números pares, dos números ímpares, dos números inteiros e dos números racionais!

Interessante notar que alguns alunos, percebendo que os infinitos têm a mesma cardinalidade, podem conjecturar o seguinte: *Se dois conjuntos possuem uma infinidade de elementos, então eles têm a mesma quantidade de elementos, ou seja, têm a mesma cardinalidade.* O professor, por sua vez, deve alertá-los que isso é apenas uma conjectura e não pode se verificar sua validade no momento. Há de se esperar surgir um outro infinito maior que o infinito dos números naturais!

A cada descoberta, os estudantes vão percebendo que sua intuição pode enganá-los, às vezes. Mesmo alunos do início da graduação em matemática, desconhecem esses fatos sobre os diversos infinitos, mostrando assim que o ensino sobre esse assunto na educação básica não é o suficiente.

3. Hotel de Hilbert – Todos os quartos ocupados, mas sempre há uma vaga para você!

O Hotel de Hilbert é um experimento mental matemático sobre conjuntos infinitos, criado pelo matemático alemão David Hilbert. Esse hotel possui infinitos quartos individuais.

Cada nova situação, que se apresenta, parece ser impossível solucioná-la. Daí vem a riqueza desta atividade. Os participantes precisam pensar em novas formas e maneiras de resolução, pois a anterior já não dá conta.

1ª situação: Chegam infinitos hóspedes querendo se hospedar.

Solução: Acomoda-se cada hóspede em um único quarto, sem problemas. Todos os quartos ficam ocupados.

2ª situação: Chega 1 hóspede e todos os quartos estão ocupados.

Solução: Acomoda-se este novo hóspede no quarto 1 e todos os outros, já acomodados, passam para o quarto n+1.

3ª situação: Chegam 10 hóspedes e todos os quartos estão ocupados.

Solução: Acomoda-se este novo hóspede no quarto 1 e todos os outros, já acomodados, passam para o quarto n+10.

4ª situação: Chegam *infinitos* hóspedes e todos os quartos estão ocupados.

ISSN 2178-034X

Solução: Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto 2n, ficando livres todos os quartos ímpares!

5ª situação: Chegam 2 ônibus com *infinitos* hóspedes em cada, e todos os quartos estão ocupados.

Solução: Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto 3n, ficando livres todos os quartos não múltiplos de 3! Os integrantes do 1º ônibus ocuparão os quartos 1, 4, ... 3n – 2. Os integrantes do 2º ônibus ocuparão os quartos 2, 5, ... 3n - 1

6ª situação: Chegam *infinitos* ônibus com *infinitos* hóspedes em cada, e todos os quartos estavão ocupados.

Solução: Todos os hóspedes acomodados passam para o quarto 2^n, ocupando assim todos os quartos de potência 2. Os integrantes do 1º ônibus ocuparão os quartos 3^n. Os integrantes do 2º ônibus ocuparão os quartos 5^n. Os integrantes do 3º ônibus ocuparão os quartos 7^n. Ou seja, toma-se todos os números primos, que são infinitos, e para cada primo associa-se um ônibus, e cada integrante dos ônibus são alocados no quarto de número enésima potência do número primo correspondente!

Em todas as situações o gerente do Hotel consegue hospedar todos os novos visitantes e, além disso, no final, sobram infinitos quartos!

4. Sócrates e o escravo Mênon

A história a seguir é inspirada no diálogo platônico intitulado *Mênon* (ROQUE, 2012).

Sócrates propõe ao escravo de Mênon um problema para encontrar o lado de um quadrado de área 8, a partir de um quadrado de área 4, ou seja, de lado 2.

O escravo começa, então, a conjecturar os possíveis lados de tal quadrado. A primeira medida considerada pelo escravo é 4, porém ele é guiado por Sócrates a concluir seu erro. A segunda tentativa é o lado 3, e novamente Sócrates o faz concluir seu erro. Por fim o escravo não sabe resolver o problema. Sócrates apresenta-lhe, então, o tal quadrado de área 8 e desenha, diante os olhos do escravo, seus lados.

Apesar de o quadrado estar alí desenhado na frente de ambos, nenhum deles consegue determinar a medida do lado do quadrado de área 8. Surge então o maior problema matemático daquela época, pois tal medida não poderia ser representada através do universo dos números admitidos até então.

Essa é então, uma possível introdução ao conceito de números irracionais e a investigação de como é o infinito desse novo conjunto de números.

5. O 2º infinito – Georg Cantor e o paraíso dos Infinitos

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em São Petersburgo no dia 3 de março de 1845 e veio a falecer em 6 de janeiro de 1918. Cantor foi um matemático rejeitado pelos seu colegas, como por exemplo, um dos mais eminentes matemáticos da época Henri Poincaré. Isso teve consequências muito ruins em sua vida. Teve diversos colapsos nervosos e o tornou paranóico (MORRIS, 1998).

Porém, seu trabalho foi de suma importância para o desenvolvimento do conceito de infinito. Até mesmo o próprio Cantor não acreditava nos resultados que estava obtendo. Em uma carta endereçada ao matemático Richard Dedekind, em 1877, Cantor escreve: *"Vejo que é assim, mas não acredito"*.

Cantor consegue mostrar que existem infinitos maiores que outros! A começar pelo infinito dos números irracionais. Cantor prova que os irracionais não podem ser enumeráveis, portanto é um infinito estritamente maior que o infinito dos naturais.

Outros resultados mostram que o infinito dos números reais é mais esquisito e contra-intuitivo que o infinito dos números naturais, que já é esquisito.

1º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos que qualquer segmento na reta real.

2º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos que a reta real!

3º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos que o quadrado de lado 1.

4º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos que o cubo de lado 1.

ISSN 2178-034X

5º fato impressionante: O intervalo (0,1) possui a mesma quantidade de pontos que qualquer espaço de dimensão n!

6º fato impressionante: Existem infinitos tipos de infinitos!

6. Considerações Finais

Acredito que com essa abordagem, os estudantes consigam ter uma melhor noção do conceito de infinito, dos números irracionais, dos números reais, além de ter uma visão de como a matemática é viva, cheia de histórias interessantes, que é feita por sere humanos com suas questões pessoais, problemas de aceitação, que não é criada do dia par a noite, e sim através de anos e anos de estudo.

As experiências vividas nas turmas do ensino fundamental e médio, onde foram aplicadas essas atividades, foram muito satisfatórias. Os alunos se mostraram interessados e fascinados com os resultados totalmente contra-intuitivos apresentados.

Dessa forma, espero que este minicurso inspire outros professores a olharem com mais carinho para o conceito de infinito, mostrarem a matemática como um assunto inspirador, tanto para matemáticos como para poetas.

"Ninguém haverá de nos expulsar do paraíso que Cantor criou para nós".

David Hilbert

7. Referências

MORRIS, Richard. **Uma breve história do Infinito – dos paradoxos de Zenão ao universo quântico**; tradução Maria Luiza X de A. Borges. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1998.

PENTEADO, C. B. **Concepções do Professor de Ensino Médio relativas à densidade do Conjunto dos Números Reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2004. Disponível em: <http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/processaPesquisa.php?pesqExecutada=1&id=3658 > . Acesso em: 29 mar. 2016

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática – Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Editora Zahar, 2012.

ISSN 2178-034X