# EXPERIMENTOS MENTAIS E PROVAS MATEMÁTICAS FORMAIS: UM OLHAR SEMIÓTICO

*Willian José da Cruz*
*Instituto Federal do Sul de Minas Gerais*
*Willian.cruz@ifsuldeminas.edu.br*

**Resumo:**
A Educação Matemática é uma área de pesquisa muito complexa. Essa complexidade pode ser reduzida, se considerarmos que o seu segredo encontra-se na relação entre a Linguagem, a Lógica, a Filosofia e a própria Matemática. Mas como lidar com esse contraste que, por um lado, coloca a argumentação dependendo de uma intuição de diagramas como um experimento mental e, por outro, coloca a Linguagem e a Lógica sustentando a ideia de uma prova totalmente formal tomando conta da Matemática? Este trabalho mostra-se como um indicativo na tentativa de entender essa problemática.
**Palavras-chave:** Experimentos mentais, provas matemática formais, intuição, complementaridade.

## 1. Introdução

Todo pensamento acontece por meio de signos. Esta convicção fundamental justifica a abordagem semiótica do pensamento, ensino e aprendizagem.

Semiótica pode ser conceituada como a ciência que trata basicamente de signos e de como eles se referem aos seus objetos e a outros signos. Charles Sanders Peirce (1839-1914) e Ferdinand de Saussure (1857-1913) são considerados, embora tendo estabelecido a teoria de modos diferentes, os pais da Semiótica. Em nosso trabalho, colocamos nosso foco na Semiótica sob o ponto de vista de Peirce.

Para Peirce, o signo é uma relação de representação, ou seja, o sinal media a relação entre os objetos e o interpretante. Ele oferece uma tríade e distingue entre os sinais: o *representâmen,* o sinal; o *interpretante,* o sentido ou significado feito pelo sinal, seja imediato (o significado *é* o sinal), dinâmico (o significado é um efeito) ou final (sentido normativo / ideal); *e o objeto,* representado pelo sinal, seja imediato (o objeto é representado no sinal) ou dinâmico (o objeto real) (BRENT, 1998).

Segundo Otte (2012), as coisas no mundo são essencialmente de dois tipos: objetos e símbolos. Os objetos possuem existência bem determinada, mas não têm sentido, enquanto que os símbolos (signos) têm sentido, mas não têm existência própria. Ambos têm importância para o nosso pensamento, pois não existe uma relação de dependência fixa entre estes dois tipos de coisas.

A comunicação matemática ocorre por meio de provas formais. Mas há neste fato um paradoxo das provas.

A Matemática não é um jogo mecânico ou um jogo de xadrez, pois sempre levar à construção de generalizações, ou seja, partindo de uma proposição particular como, por exemplo, *"esta pedra cai"*, para chegar a uma proposição mais geral, isto é, se x é uma pedra então irá cair, nós temos de acreditar na realidade das relações, nas leis da natureza, nos universais, nas ideias etc., tem de haver uma certa crença no platonismo.

Para generalizar, é necessário representar o impossível, o imaginário ou o irracional (no sentido de não existir na razão imediata), ou seja, é preciso ver o impossível, o insolúvel e o irracional como apenas relativo.

Por esse motivo, há a necessidade de generalização da perspectiva, mesmo dentro de uma prova, pois, se os argumentos da prova fossem totalmente reducionistas, como poderíamos ganhar novos conhecimentos através da prova? Surge, então, a hipótese dos experimentos mentais tão frequentemente usados nas áreas empíricas que poderiam ter um papel importante na Matemática.

Neste trabalho, faremos um mergulho em algumas noções que envolvem a relação entre os experimentos mentais e as provas matemáticas formais, presentes no contexto de ensino e aprendizagem em matemática.

## 2. Os experimentos mentais e provas matemáticas formais

Conceituamos os experimentos mentais como formas que o sujeito tem para colocar seu próprio pensamento, dentro de um determinado contexto, como objeto de consideração, por meio de uma representação, servindo a um duplo papel complementar: o primeiro, mostrando a coerência do próprio conceito do ponto de vista do conteúdo; e o segundo, permitindo uma melhor compreensão das possibilidades de aplicação de tal conceito.

Outro fenômeno que aponta nessa mesma direção é que, desde o Renascimento, existe uma discussão se a ciência e a Matemática têm um valor instrumental, ou se elas realmente contêm verdades sobre o nosso mundo. Na Matemática pura, esse problema mostra-se na distinção entre *provas que provam*, ou seja, que trazem certezas e convicções subjetivas, e *provas que explicam*. Alguns filósofos como Aristóteles e Bolzano, por exemplo, consideravam as primeiras meras verificações, enquanto as segundas mostrariam os fundamentos objetivos de tais verdades. Essa distinção resulta da diferenciação entre as coisas que aparecem antes no processo do pensamento (intuição) em contraste com outras que tem prioridade no sentido da estrutura objetiva do conhecimento (lógica).

Aristóteles foi o primeiro a nos alertar para o fato de que o que aparece primeiro, ou seja, em primeiro lugar na percepção e no pensamento, não necessariamente é o mais fundamental de um ponto de vista objetivo. Se fosse diferente e se tudo fosse tal como aparece diante de nós, então todo e qualquer ensino seria supérfluo e desnecessário.

No entanto, a perspectiva da prova formal que temos hoje, conduz a Matemática para o campo da linguagem formal, como argumentado por Otte:

> A perspectiva do argumento e da prova inevitavelmente transforma Matemática em uma coleção de proposições. A prova pertence a metamatemática e parece ser um exercício de lógica, e lógica nada tem a declarar sobre qualquer coisa que não seja uma proposição (OTTE, 2012, p. 41).

Nesse contexto, Otte (2012) considera que a teoria matemática e a sua linguagem misturam-se, substituindo todos os seus objetos por algumas de suas descrições. Para Otte (2012), compreendemos somente aquilo que significa algo para nós e que esse significado depende da língua e, geralmente, da conexão, ou seja, da continuidade. A explicação de um fato significa primeiramente relacionar esse fato a outros equivalentes.

Otte continua afirmando:

> O que transforma uma observação individual num pensamento é sua explicação numa expressão linguística e a conexão com outros eventos ou observações. Também é verdade que provas matemáticas funcionam por estabelecer essa continuidade ou estrutura (OTTE, 2012, p. 41).

A questão que se apresenta é verificar se a Matemática essencialmente é uma lógica ou uma língua, um sistema de proposições ou um produto sintético, ou seja, uma construção. Talvez a resposta mais comum seja dizer que são ambas, mas, segundo Otte (2012), a perspectiva da prova que temos hoje nos leva na direção da língua. O desequilíbrio entre diferentes orientações básicas da cognição Matemática e a integração com a realidade é resultante da ênfase dada à compreensão da prova como verdade absoluta.

## 3. O paradoxo das provas

A visão que se tem hoje da Matemática a caracteriza como um determinado tipo de raciocínio, expressando-a como um amontoado de fórmulas, sendo a Matemática consistida de afirmações. A atividade matemática se configura tipicamente como uma atividade de demonstração de provas, que reduz o novo ao antigo num processo paradoxal.

Para Otte (2012), essa convicção corresponde a outra, a qual indica que não é a referência aos objetos especificamente matemáticos que diferencia a Matemática das demais ciências, como a Botânica distingue-se da Biologia Marinha pela distinção dos objetos estudados (OTTE, 2012, p. 42).

A geometria, por exemplo, foi excluída da Matemática pura, ou, de forma mais específica, foi dividida em um ramo teórico e outro ramo empírico. Nesse contexto, uma argumentação geométrica como, por exemplo, a definição do termo "*linha reta*" (OTTE, 2012, p. 42), em um ambiente de alguma língua, substitui um objeto pelo conceito, não permitindo usar o desenho ou diagramas geométricos, para se verificarem proposições como essa, deixando de lado a intuição, para se referir apenas aos significados das definições.

Entendendo que todo conhecimento começa com atividades concretas, a geometria, então, seria um estudo sobre seus objetos? Como podemos representar esses objetos? Então, o que é uma representação? Essa, como afirma Otte (2012), torna-se a pergunta essencial para o realismo matemático. Apesar de não ter uma resposta para essas perguntas, Otte (2012) contesta o que considera uma concepção muito limitada desses termos: "por que restringir o próprio idioma a um sistema representacional? Por que favorecer o conceitualismo? Por que não, por exemplo, estabelecer o raciocínio matemático e diagramas visuais?" (OTTE, 2012, p. 47). Existem duas razões que são apontadas por Otte (2012). A primeira para destacar o papel de infinito na Matemática e a segunda para a exigência de continuidade e de coerência como pré-requisito para o significado.

Em suma, se a ideia de prova formal for a única preocupação da Educação Matemática e também da Matemática pura, essa atitude favorecerá o conjunto de definições rígidas e de fundamentações puramente linguísticas.

O paradoxo das provas é interpretado por meio da consideração de que uma atividade de prova e, para ser explicativa, tem de generalizar e não apenas verificar. Uma prova formal estabelece uma equivalência lógica formal entre premissas e conclusão, ou seja, uma prova formal não pode generalizar.

Na verdade, há duas opções: o platonismo cognitivo de Brown ou a Matemática como ciência de conceitos, no sentido de Kuhn e Tharp.

Brown (2005) sugere um tipo de platonismo contemporâneo que não precisa abraçar tudo que apresenta a teoria de Platão no seu aspecto original. O essencial é a existência e a acessibilidade das formas em si, em especial das formas matemáticas, esse é o interesse de Brown em defesa de platonismo contemporânea que ousamos dizer platonismo cognitivo. Mas Brown (2005) concorda que isso é uma enorme suposição, pois descrevê-lo e torná-lo plausível não é tarefa fácil.

A proposta de Brown (2005) é estabelecer uma analogia entre a Física e a Matemática, com base na premissa do platonismo, mostrando que a Matemática trata tanto de objetos como a Física, ou seja, a fertilidade dessa analogia está no fato de podermos usar a intuição.

Kuhn, em defesa do uso dos experimentos mentais, considera que os conceitos não são pensados para aplicação em todos os mundos possíveis, mas somente ao mundo como o cientista o percebe. Seus usos são indicadores do compromisso daqueles que o utilizam com um corpo mais amplo de leis e teorias

Tharp (1986) propõe que afirmações matemáticas deveriam ser consideradas como expressando relações entre conceitos. A matemática dentro de um determinado ponto de vista deve ser baseada em definições amplamente arbitrárias e estritamente específicas. Tharp (1986) apresenta um exemplo, fazendo uma analogia com uma história bem curta sobre os personagens Gertrude e Hamlet.

Gertrude é uma rainha; Hamlet, um príncipe; e Gertrudes é mãe de Hamlet.

Várias estipulações podem ser constituídas desse enredo, ou seja, várias consequências dos conceitos de "príncipe", "rainha" e "mãe" podem ser evidentemente verdadeiras na história. Por Exemplo, nenhum príncipe é rainha; Gertrudes e Hamlet são diferentes; Hamlet não é a mãe de Gertrude. Tharp afirma que nenhuma dessas conclusões decorre logicamente da história dada.

Otte (2012), interpretando Tharp, escreve que as verdades obtidas da história são analíticas e não se podem questionar fatos que não foram apresentados. Não se pode

perguntar, por exemplo, qual é a cor dos olhos de Hamlet. Os objetos matemáticos considerados nessa concepção são entidades puramente semânticas, como a filosofia analítica desde Bolzano acreditava que fosse realmente.

## 4. O princípio da complementaridade

Sabemos pela história da matemática e das ciências exatas que os experimentos mentais sempre desempenharam um papel importante para o desenvolvimento. Nós, portanto, supomos que os experimentos mentais desempenham um papel importante no processo do pensamento matemático e na aprendizagem também.

Na verdade, todas as provas matemáticas até o final do século 18 eram algum tipo de experimentos mentais, ao invés de provas no sentido da prática da matemática pura de hoje. Toda a epistemologia de Kant é baseada neste fato. Por isso, examinamos as analogias entre as provas formais e os experimentos mentais. Uma diferença entre os dois, que é imediatamente impressionante, consiste na complementaridade de conceitos e intuições. Como experimentos mentais tem sempre a ver com as relações entre o nosso aparato conceitual e uma realidade objetiva o pensamento intuitivo desempenha aqui um certo papel.

Mas, o que é complementaridade? O princípio da complementaridade foi formulado pela primeira vez por Niels Bohr por volta de 1930 (OTTE, 2003). A noção de complementaridade de Bohr foi motivada pelo fato de que, ao observar os fenômenos atômicos, teria de se concluir que uma realidade independente, no sentido físico comum, poderia não ser atribuída aos fenômenos nem às agências de observação. Bohr acreditava na importância geral epistemológica e metafísica de seu princípio.

Bohr afirmava que as propriedades complementares dos objetos não podiam ser medidas ao mesmo tempo com precisão. Por exemplo, os aspectos de partícula e de onda dos objetos físicos são fenômenos complementares. Ambos os conceitos são emprestados da mecânica clássica na qual é impossível considerar que um objeto é, ao mesmo tempo, uma partícula e uma onda. Portanto, é impossível medir por completo as propriedades de onda e de partícula em um momento particular.


ISSN 2178-034X

Silva (1972) escreve que as ideias de Bohr tiveram, aparentemente, a sua origem em correntes psicológicas do começo do século XX e, sobretudo, no fluxo do pensamento de W. James, cujo *Tratado sobre Psicologia*, seria o fator que influenciou Bohr.

A prática matemática que, segundo Otte (2003), tem se libertado cada vez mais da metafísica, desde os dias de Cantor e Hilbert, requer uma abordagem complementar, com o intuito de ser entendida corretamente.

Segundo Abbagnano (2007), dois conceitos opostos que se corrigem reciprocamente e se integram na descrição de um fenômeno são denominados complementares.

Todo conhecimento é feito por sinais. Um conhecimento para ter um impacto formativo em nossas mentes, deve ser subjetivamente significativo em primeiro lugar, e, por sua vez, atrair um interesse para a teoria dos significados e para a complementaridade dos aspectos intensionais e extensionais do sistema de signos e linguagem.

A epistemologia da complementaridade sucede à epistemologia da dualidade, da polarização, da oposição, da separação, da exclusão. Ao invés de separar conceitos em "isto ou aquilo", nós consideramos ambos como "isto mais aquilo".

Pode se perguntar, porém, se não seria mais apropriado falar dos dois aspectos complementares do pensamento simbólico, em vez da complementaridade de conceitos e intuições.

Como qualquer símbolo deve ser caracterizado pela complementaridade de sentido e referência, e toda a língua pela complementaridade de sintaxe e semântica, nós escolhemos esta complementaridade como nossa ferramenta principal de investigação na comparação de provas formais e experimentos mentais.

Os experimentos mentais mostram o lado humano da ciência, enquanto a formalização, baseando-se nas relações de identidade e diferença, serve para eliminar os caprichos e as flutuações imprevisíveis do espírito humano e estabelecer uma implementação formal ou tecnológica do pensamento e do conhecimento.

## 5. Considerações finais

Toda prova tem um elemento de generalização e, por isso, deve ter uma conexão entre experimentos mentais e provas matemáticas formais, porque, se assim não for, as provas não seriam capazes de fornecer um conhecimento novo.

Consideramos que a matemática surgiu do contexto social e não natural e, dentro desse contexto, encontra-se a teoria geral dos signos como uma tentativa de desenvolver ideias gerais. Isto significa que toda atividade cognitiva é uma atividade semiótica. O próprio signo é um processo.

O conceito, nessa perspectiva, é um tipo de processo que assume formas, dependendo de onde está sendo aplicado. A mudança de conceito depende de novos contextos, ou seja, muda a referência. Essa é a complementaridade do conceito (sentido e referência), de Leibniz e Newton, por exemplo.

Dependendo do contexto, damos ao conceito uma formulação diferente, ou seja, a ideia é uma maneira diferente de enxergar e aplicar os conceitos. Peirce dizia que o signo é alguma coisa que representa algo para alguém. Nesse contexto, temos que o interpretante (ideia) é sempre uma nova representação. O que acontece no futuro está no interpretante, portanto não precisamos que o interpretante exista; é sempre uma possibilidade.

O signo tem sentido e referência. Ele representa alguma coisa, o seu objeto, mas não em todas as suas representações. O signo tem objetividade, independentemente do humano. Tem uma relação triádica com o objeto e o seu interpretante. O interpretante é determinado pelo objeto do signo.

O teorema de Pitágoras, por exemplo, não é direto. A maior controvérsia na matemática, no ponto de vista da escola, é que os alunos já sabem que os problemas têm solução. Mas, em certo sentido, nenhum problema fornece meios para sua solução, temos de procurar um contexto para que o problema seja resolvido.

O que Peirce quer dizer é que a matemática não pode ser reduzida à lógica. Para ser teoremático, tem de reduzir a um processo de generalização. No pensamento teoremático, temos de criar novas premissas, isto é, criar uma generalização.

É necessário pensar a Matemática como uma atividade e, nesse contexto, a intuição ganha força da realidade, mas, na realidade em si, não há uma interpretação da interpretação. Então, como podemos juntar conceito com intuição? Por meio da semiótica deixamos a diferença entre conceito e intuição relativa.

## 6. Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de Filosofia*. 5ª ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BROWN, J. R. *The Laboratory of the mind: Thought experiments in the natural sciences.* This edition published in the Taylor & Francis e- Library, 2005.

BRENT, J. *Charles Sanders Peirce: A life*. Revised and Enlarged Edition, 1998.

KANT, I. *Crítica a razão pura*. Trad. M. P. Santos e A. F. Morujão. Introdução e notas de A. F. Morujão. 4ª ed. Lisboa: Fundação Caloute Gulbenkian, 1997.

KUHN, T. S. *A tensão essencial***.** São Paulo: Editora UNESP, 2011. 257 – 282 pp.

OTTE, M. F. *Complementary, Sets and Numbers*. Educational Stud. in Math 53, 2003. 203-228 pp.

OTTE, M. F. *A realidade das Idéias: Uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática.* Cuiabá: EDUFMT, 2012.

PEIRCE, C. S. (CP). *Semiótica*. Trad. Jose Teixeira Coelho Neto. 4ª ed. São Paulo: Perspectiva, 2010.

SILVA, M. R. *A Evolução do Pensamento Científico*. São Paulo: HUCITEC, 1972.

THARP, L**.** *Myth and mathematics: A conceptualistic philosophy of mathematics, part I.* Synthese, n. 81, p. 167-201, 1989.