RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO-RETÂNGULO: A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE SENO, COSSENO E TANGENTE, COMO UMA RELAÇÃO NO ÂNGULO AGUDO, POR MEIO DE MATERIAL MANIPULATIVO.

Angélica Novaes de Assis
Universidade do Estado do Pará
assis_novaes@hotmail.com

Resumo:
O presente trabalho apresenta os resultados parciais de uma proposta metodológica envolvendo a construção do conceito de seno, cosseno e tangente, que está sendo desenvolvida como tema de monografia do curso *lato-sensu* em Educação Matemática. O objetivo deste estudo é de possibilitar a alunos do 1º ano do Ensino Médio, a partir do uso de material concreto, a construção do conceito de seno, cosseno e tangente, como uma relação em um ângulo agudo de um triângulo-retângulo. A presente proposta desenvolver-se-á em cinco etapas: aplicação de questionário socioeconômico, pré-teste, construção de material, registro e analise mediante manipulação e pós-teste – sistematizadas em duas etapas paralelas: a de manipulação e a de registro da atividade. Os primeiros resultados assinalaram que o uso de materiais manipulativos demonstra ser um forte instrumento de atribuição de significados a alunos do 1º ano do Ensino Médio na compreensão das relações trigonométricas básicas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Relações Trigonométricas; Material Manipulável.

1. Introdução

A Trigonometria, como ramo da Matemática, é constituinte de uma linguagem de utilidade em diferentes segmentos da vida real e está presente nas mais diferentes situações, desde as triviais do dia a dia, até as mais complexas no mundo que nos cerca. Esse tópico de estudo, no âmbito escolar, aparece com os primeiros conceitos por volta da 8ª série, reestabelecendo-se no 1º ano do Ensino Médio. No entanto, conjecturamos que o mesmo é fortemente sustentado pela memorização de fórmulas e relações, reconhecimento dessas relações e ainda aplicações. Esse conhecimento parte, muitas vezes, da definição de seno, cosseno e tangente, como uma "fórmula" e, em outros, como uma relação pronta onde o aluno deve o seguir (ex.: seno = cateto oposto/hipotenusa), sem atribuição de significados e construção, baseada na repetição excessiva de exercícios relacionados. Segundo D' Ambrósio (1989, p. 15)

> A típica aula de matemática, a nível de primeiro, segundo ou terceiro graus ainda é uma aula expositiva, em que o professor passa para o quadro negro aquilo que ele

> julga importante. O aluno, por sua vez, copia da lousa para o seu caderno e em seguida procura fazer exercícios de aplicação, que nada mais são do que uma repetição na aplicação de um modelo de solução apresentado pelo professor.

Apesar de a Matemática ser considerada como uma ciência estática (diferente de outras ciências no que diz respeito aos avanços e produção) no interior dela, porém, acontece uma matemática dinâmica (ou deveria) com uma vasta e grande mobilização de conhecimentos que desaguam na própria ciência, mas que, nem sempre, é proporcionada aos que com ela se relacionam.

O uso de material concreto, nas aulas dessa disciplina, assim como o uso de jogos, história da Matemática, Tic's etc. demonstra, no que diz respeito às pesquisas em Educação Matemática, um valoroso instrumento de aquisição, formalização e representação de conceitos e procedimentos de forma concreta, pois compreende a atribuição de significados a partir das articulações de mobilização entre o real e o mental. De acordo com MOYER (2001, p. 01), "Materiais manipulativos são objetos projetados para representar, explícita e concretamente, ideias matemáticas que são abstratas". É devido a isso que conjecturamos que os alunos, por não vivenciarem situações de confronto por meio da visualização coisas/objetos, não estabelecem relações matemáticas com os que estão ao seu redor.

Por todas as premissas expostas e baseando-se no questionamento sobre qual o resultado de uma série de atividades com material manipulativo voltado à construção e à compreensão das relações trigonométricas no 1° ano do Ensino Médio, foi que se elaborou uma sequência didática para análise e construção de significados mediante ao objeto manipulável, com o intuito de possibilitar ao público alvo a construção do conceito de seno, cosseno e tangente, por meio de semelhanças de triângulos, a partir do uso de material concreto, pois compreendemos que propor situações de visualização contribui para o desenvolvimento de um domínio satisfatório da linguagem trigonométrica, a qual os alunos possam fazer analises, comparar, conjecturar e, a partir daí, "ler" o espaço físico em sua volta, abrindo um leque de ferramentas para representá-lo e compreendê-lo.

2. Objetivo

Possibilitar a alunos do 1º ano do Ensino Médio a construção do conceito de seno, cosseno e tangente, como uma relação em um ângulo agudo de um triângulo-retângulo, por meio de semelhanças de triângulos, a partir do uso de material concreto.

3. O Ensino das relações trigonométricas sob o olhar da teoria dos campos conceituais.

Para a compreensão da proposta metodológica, é importante salientar que as ações mediadoras no processo de ensino de Trigonometria, em especial das relações trigonométricas, devem partir da apreensão do sujeito frente à aquisição de seus conhecimentos. Dessa maneira, a elaboração e, consequentemente, a aplicação da atividade trazem à luz a teoria dos campos conceituais de Vergnaud 1993, pois, apesar de se relacionar a uma teoria complexa por "tratar-se de uma teoria psicológica do processo de conceitualização do real que permite localizar e estudar continuidades e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual" (VERGNAUD apud MOREIRA, 2002, p. 08), traz consigo grandes contribuições à compreensão da aquisição cognitiva pelo aprendiz.

Assim, Vergnaud (apud MOREIRA, 2002, p. 08) afirma que "toma como premissa que o conhecimento está organizado em campos conceituais". Ainda segundo o mesmo, seria um conjunto informal e heterogêneo de pensamentos conectado uns aos outros, de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações, durante o processo de aquisição. (Ibidem, 2002, p. 08).

Dada a sua importância, colocamos em foco o processo de construção de um conceito, cuja formalização, segundo Vergnaud (apud MOREIRA, 2002, p.09), depende do fato de o aprendiz ser confrontado com mais de um tipo de situação, a fim de generalizá-lo, além do que uma única situação deve conceber mais de um conceito. Neste sentido, as situações de aquisição de conceito requerem tempo, pois o mesmo não pode ser meramente reduzido a sua definição, já que deve adquirir significado e sentido para o indivíduo (e isso exige tempo), pois a simbolização é construída num progressivo domínio de situações. Percebemos que "situação é um conceito-chave" (MOREIRA, 2002, p. 09) que não se refere a situações didáticas, mas no sentido de tarefa que não anula uma situação, como um combinado de tarefas (VERGNAUD, ibidem MOREIRA, 2002, p. 11). É o concomitante dos argumentos envolvidos que levaram Vergnaud ao conceito de campo conceitual.

Desse modo, destaca-se o fator "tempo", e nos referimos a ele não só como período de formalização do conceito, mas do intervalo de apropriação, mediante a testagem, mobilização e, no que se refere à metodologia proposta à manipulação, exploração e análise do ambiente e do que se faz no ambiente.

Segundo Vergnaud, podemos definir conceito, por meio de três conjuntos, denominados "S", "I" e "R": o referente, o significante e o significado, respectivamente. O primeiro corresponde a situações que dão sentido ao conceito; o segundo, aos invariantes, e o terceiro, às representações simbólicas. Esse último, na forma de linguagem comum ou matemática – por meio de gráficos, de equações etc. que são utilizados para representar o segundo conjunto referente a objetos, propriedades e relações. É a união desses conjuntos que devemos considerar para a obtenção do conceito (Vergnaud apud MOREIRA, 2002, p. 10), baseando-se no que já foi citado anteriormente, em relação ao tempo, que o aprendiz requer para essa aquisição.

A ação, nesse processo, é vista como uma sequência de situações, de certa forma, como um esquema. Vergnaud (apud MOREIRA, 2002, p. 12) aborda o conceito de esquema como "organização invariante do comportamento de uma classe de situações dada" (ibidem) constituindo-se de mobilizações acima de tudo mentais, das quais destaca: metas e antecipações, regras de ação, invariantes operatórios e inferência-raciocínio. A primeira refere-se a construções pelas quais o aprendiz descobre a finalidade de sua atividade; a segunda, por meio da continuidade da sequência observa analogias. A terceira refere-se aos "teoremas-em-ação" e "conceitos-em-ação", a articulações do que é importante para o desenvolvimento de uma atividade/situação, como uma caixa cheia de conhecimentos onde o aprendiz deve selecionar aquilo que é pertinente, podendo inferir. Por fim, ressaltamos a inferência-raciocínio, a qual permite que, a partir dos invariantes (objetos, propriedades e relações), o indivíduo preveja as regras e antecipações através das informações, fato indispensável à generalização de um esquema para a formalização do conceito. (VERGNAUD, apud MOREIRA, 2002, p. 12)

A teoria dos campos conceituais de Vergnaud permite-nos a compreensão dos aspectos que permeiam a construção do conhecimento pelo discente e do modo como ocorre a construção de situações em que os conhecimentos podem ser configurados a partir do crescimento progressivo inerentes a formalização de um conceito, pois, para Vergnaud (apud MOREIRA, 2002, p. 13), "são os invariantes operatórios que fazem a articulação essencial entre teoria e prática, já que a percepção, a busca e a seleção de''' informação baseiam-se inteiramente no sistema de conceitos-em-ação, disponíveis para o sujeito" numa perspectiva construtivista, a qual compreende que o conhecimento é fruto da interação entre "sujeitos" e entre "sujeito e meio", por entender que a participação ativa do educando é condição indispensável para uma aprendizagem significativa em Matemática. Assim, as condições para que o aluno construa seu próprio conhecimento devem ser justas, porque, à medida que os instrumentos para aquisição sejam de sua ciência, promove-se o retrospecto de ideias para análise e a progressão frente analogias, comparações e conjecturas.

Dessa maneira, colocamos a construção do conceito das relações trigonométricas como um processo de aquisição por meio de material manipulável, através do qual o aprendiz pode "ler" e compreender o espaço mediante suas hipóteses e testagens.

4. Trajetória Metodológica

A referida proposta está sendo desenvolvida com uma turma inicialmente composta de 28 alunos cursando a 1ª série do Ensino Médio, de uma escola pública da rede estadual do município de Salvaterra, na Ilha do Marajó, no estado do Pará.

A primeira etapa consistiu da elaboração e levantamento de dados por meio da aplicação de um questionário socioeconômico com o objetivo não só de traçar um pouco do perfil dos sujeitos de nossa pesquisa como também de analisar e entender algumas variáveis, como o gosto pela disciplina Matemática e estudo da mesma fora da escola, ocorrência ou não de ajuda de terceiros nas tarefas, a maneira como o professor proporciona o ensino desse componente curricular e, em particular, sobre a Trigonometria.

A segunda etapa é referente à aplicação de um pré-teste contendo 10 questões que envolviam a noção de seno, cosseno e tangente, comunicando previamente aos alunos os objetivos dessa ação e sua importância no trabalho. Para o desenvolvimento efetivo da proposta, envolvemos, para a aplicação da atividade, apenas 6 alunos, os quais obtiveram um desenvolvimento consideravelmente bem mais negativo em relação à turma no pré-teste inicial.

Assim, encaminhamos esses estudantes a sessões de aulas no contra turno, o que corresponde à terceira etapa dessa pesquisa, que abordavam a revisão de conceitos, como o de semelhança de triângulos e leitura de ângulos, razão, retas perpendiculares e semirretas, pois acreditamos que, sem esses conhecimentos prévios e/ou consolidação dos mesmos, tornar-se-ia inviável a manipulação mediante o registro na atividade, conforme veremos na etapa de aplicação, em que o discente, para executar algum comando dado pelo professor na atividade escrita, necessita mobilizar conhecimentos anteriores para a construção de um novo conhecimento. Para a concretização dessa etapa, foram necessários cinco tempos de aula, de 45 minutos cada.

Após esse momento, ocorreu o trabalho de elaboração da atividade, mediante a utilização de materiais, como isopor (para a base de servir de sustentação do material), tachinhas ou alfinetes coloridos (para simular pontos no plano), nylon transparente, canudinho, furador de papel e impressão da ficha de atividade e dos planos cartesianos (anexos II e III), que ficaram a cargo do professor. A duração da construção correspondeu a um tempo de aula, de 45 minutos.

Figura 1: alunos em atividade de construção do material.

Ao final dessa etapa, foi importante observar, junto com o aluno, os recursos já elaborados disponíveis, de modo que ele compreendesse que estaria de posse de um material que simula um plano cartesiano e dois modelos de ângulos agudos. Além disso, foi fundamental notar que o canudinho encontra-se no ponto A (2,1) do plano no ângulo 1, e ao trocar pelo ângulo 2, colocar nos pontos (4,3) que podemos considerar, respectivamente, como largura e altura em ambos.

Em seguida, com base nas informações anteriores e com a ajuda do material convidamos os alunos a preencherem a tabela a abaixo, considerando um ângulo AÔB = ɵ, $0^{\circ} < ɵ < 90^{\circ}$. A cada deslocamento do canudinho, a partir do ponto C na semirreta AO e D na semirreta OB, traçar com o lápis as perpendiculares às semirretas.

Tabela 1: exemplo de preenchimento referente ao ângulo 1.

(Continua)

Ponto	Afastamento(cm)/ largura	Altura (cm)	Triângulo formado
A	4cm	3cm	ΔOPP’

Ressaltamos que o aluno é quem determina o afastamento x, que deve ser constante, a partir do afastamento dado nos dois ângulos. Assim, paralelamente ao preenchimento das tabelas, uma espécie de questionário foi proposto, com o objetivo de analisar, comparar e formalizar ideias, conjuntamente com a manipulação do material, pois o aluno pode "voltar" e "avançar" nos pontos, "colocar" e "retirar" os ângulos propostos à medida que desejar analisando-os frente aos questionamentos. Ressaltamos, assim, a importância de um questionário para cada tabela.

QUESTIONÁRIO.

1 - O que acontece com a razão entre a altura e o afastamento (no eixo x) correspondente a cada ponto? Existe alguma regularidade? Qual a explicação? *Dialogando com a classe, o professor mediador fez com que os alunos percebessem que os valores da razão obtida em cada ponto são constantes quando comparados nos dois ângulos. A seguir, buscou com os alunos explicações para o fato.*

2 - O que observamos ao compararmos os triângulos formados em cada ângulo? *Os alunos facilmente perceberem que os triângulos formados (cuja denominação é de cada aluno) por meio da manipulação dos objetos são semelhantes tanto no ângulo 1 quanto no ângulo 2.*

3 - Conhecendo e utilizando-se da semelhança de triângulos, qual relação pode-se estabelecer a partir do que denominamos de "altura" e "largura", com os triângulos formados em cada ângulo? *Evidenciou-se a compreensão dos alunos ao emitirem que "permanece a mesma." Logo em seguida, mediando o trabalho, aplicaram-se os conhecimentos de semelhança de triângulos chegando-se à seguinte conclusão, com base em uma de suas denominações: CD/OD = EF/OF = GH/OH =...constante para o ângulo 1, tornando a observação para a segunda bem melhor compreendida.*

4 - Essa relação depende do quê? *Esse item demorou um pouco mais de tempo para ser compreendido. Assim, solicitamos aos alunos que comparassem os dois desenhos de ângulos com suas devidas observações, para que analisassem que a relação depende apenas do ângulo* θ*, e não do tamanho do triângulo, por exemplo. Foi neste momento, a partir das*

construções mentais e escritas realizadas, que introduzimos a notação para o que vem a ser, primeiramente, a tangente de um ângulo (pois, acompanhando o processo mental de que iniciamos com a relação entre "altura" e "largura") como tan ɵ = medida do cateto que é oposto ao ângulo sob a medida do cateto adjacente.

5 - De modo análogo ao da semelhança de triângulos, no que diz respeito a "altura" e deslocamento na semirreta AO, quais relações podemos estabelecer? *O mesmo se aplica no item 2, e, utilizando-se dos conhecimentos de semelhança de triângulos obtivemos: CD/OC = EF/OE = GH/OG =... constante para o ângulo 1, observou-se o mesmo para o ângulo 2*

6 - Essa relação depende do quê? *Assim como no item 4, os alunos compreenderam, a partir da análise, que a relação anterior obtida também depende apenas do ângulo ɵ. Introduzimos a notação simbólica de sem ɵ = medida do cateto que é oposto ao ângulo sob a medida da hipotenusa.*

7 - Da semelhança de triângulos, no que se refere à "largura" e deslocamento na semirreta AO, quais relações se pode estabelecer? *OD/OC = OF/OE = OH/OG = ...constante para o ângulo 1, observamos conjuntamente o mesmo para o ângulo 2*

8 - Essa relação depende do quê? *Compreendemos que, a partir da análise, que a relação anterior obtida também depende apenas do ângulo ɵ. Assim, introduzimos a notação simbólica de cos ɵ = medida do cateto que é adjacente ao ângulo sob a medida da hipotenusa.*

Ao final de cada item da atividade para avaliação da aprendizagem, tornou-se interessante que os alunos socializassem os resultados e as ideias empregadas na busca das explicações de maneira conjunta, a fim de que se promovessem o diálogo, a discussão e conclusão de argumentos e de que se estabelecessem comparações com os resultados dos colegas, construindo analogias frente às diferenças de notações na atividade proposta.

A última parte da proposta consta da aplicação do pós-teste que se refere ao mesmo aplicado incialmente, com o objetivo de estabelecer a comparação da evolução ou não do desempenho dos alunos com baixo rendimento no teste inicial em relação a atividade com material manipulativo abordada nesse experimento. Essa etapa ainda se encontra em fase de aplicação.

5. Resultados Parciais.

A análise de dados dá-se concomitantemente ao final de toda pesquisa, no entanto algumas etapas analisadas já se mostram no caminho da positividade em relação ao uso da proposta, pois, com base nas análises obtidas dos registros feitos no pré-teste, observamos uma expressiva dificuldade, tanto no estabelecimento das relações, quanto em conhecimentos básicos, como a simples identificação dos catetos e hipotenusa em um triângulo-retângulo. Todavia, a construção do material manipulável para desenvolvimento da atividade por parte dos alunos mostrou-se de grande importância, haja vista que possibilitou a iteração professor-aluno e aluno-aluno, além de, já nessa etapa, tornar possível a visualização de alguns conceitos.

Na construção das tabelas, tornou-se necessária, por vezes, uma participação mais efetiva do professor nas orientações, mantendo-se claros os objetivos a serem alcançados pela atividade, de modo a conduzir o aluno à construção desses significados. Através disso, constatamos, com base nas primeiras análises e nos registros orais dos alunos, uma dificuldade acentuada no preenchimento da primeira tabela, além da falta de compreensão relativa ao fato de que, por meio de cada novo ponto encontrado a partir de um determinado afastamento (largura) no eixo OB, encontra-se uma nova altura no eixo AO. Assim, verificamos que seria necessário um número maior de tabelas para esse momento, inclusive envolvendo valores decimais. No entanto, a formação de triângulos a cada novo deslocamento, formados pelas perpendiculares que os alunos traçaram, foi facilmente identificada.

As primeiras análises dos registros escritos e da socialização, ao final da quarta etapa, demonstraram que as relações de seno, cosseno e tangente estariam atribuídas a uma "fórmula" e ainda ao decorar da mesma. Contudo, verificamos uma positiva apreensão do conhecimento envolvido na atividade, com base nas respostas dos questionários.

Julgamos importante salientar que a metodologia proposta, assim como qualquer outra atividade, deve ser realizada de forma eficiente, jamais de maneira improvisada e sem objetivos empregados na ação docente. Recomendamos ainda que as atividades devem ser estruturadas de forma prática e de fácil compreensão, pois, para Fossa (2001, p. 79), "Atividades usadas indiscriminadamente, sem constância, ou sem a devida preparação são fadadas a ser, na melhor das hipóteses, apenas interlúdios recreativos para o aluno.".

O referido autor ainda julga que essas atividades deveriam conter registros orais e/ou escritos, além da utilização de materiais manipuláveis (concretos) visto que isso "pode ser um excelente catalisador para o aluno construir o seu saber matemático, dependendo da forma que os conteúdos são conduzidos pelo professor." (ibidem, 2001, p. 79), pois o componente manipulativo, por si só, não garante a promoção de aprendizagens e, na melhor das hipóteses, pode tornar-se apenas um recreativo lúcido para o aluno.

Segundo MORE (2001, p. 03), "O aspecto físico de materiais manipulativos concretos não carrega o significado das ideias matemáticas por trás dele. Os estudantes devem refletir sobre suas ações[...] para construir significados." Acreditamos, então, que é preciso que esta abordagem esteja vinculada a registros escritos e/ou orais para que a aquisição do conhecimento seja efetivada.

6. Algumas considerações.

A utilização de metodologias um tanto quanto diferentes das já existentes no ensino de Matemática é um desafio a muitos professores, em especial aos dessa disciplina, pois a eficácia do método utilizado depende unicamente do preparo do docente e da aplicação correta da atividade. Nesse sentido, o ensino de Trigonometria perpassa por fatores referentes ao próprio ensino de Matemática, que estão correlacionados à vivência e à relação do professor com essa ciência. Além disso, é enorme a influência sua própria formação, sendo necessário estar bem qualificado e participar de formações continuadas, acrescidas da pesquisa científica, que se torna imprescindível.

Compreender o ensino-aprendizado de Trigonometria, no que se refere à efetiva compreensão das relações de seno, cosseno e tangente, como um instrumento de (re) conhecimento do espaço em que vivemos, bem como de um processo pelo qual se objetiva a formação do indivíduo ativo frente a situações do mundo real que envolva tal conhecimento e no relacionamento deste com outras áreas do saber humano, é, sobretudo, assimilar a função formativa da Matemática.

As pesquisas em Educação Matemática são constantes e comprovam que a aplicabilidade de ferramentas metodológicas diferenciadas das que se observam no atual contexto da sala de aula são, de fato, importantes para se obter uma aprendizagem mais significativa. Afinal, os novos tempos exigem um padrão educacional que esteja voltado para o desenvolvimento de um conjunto de competências e de habilidades essenciais, participando e agindo no contexto de uma sociedade comprometida com o futuro, e a Trigonometria, como uma das ferramentas para a compreensão do espaço que nos cerca, supre, em grande parte, essas necessidades e exigências, desde que seu ensino esteja voltado à formação global do indivíduo.

7. REFERENCIAS

FIORENTINI, Dario; Maria Ângela Miorim. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da Matemática. Boletim da SBEM-SP, n.7, de julho-agosto de 1990.

FOSSA, John A. Ensaios sobre educação matemática. Belém: EDUEPA, 2001.

MOREIRA, M.A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. Investigações em Ensino de Ciências, Porto Alegre, v. 7, n. 1, p. 7-29. março 2002. Disponível em <http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID80/v7_n1_a 2002.pdf >. Acesso em: 28 set de 2015.

MOYER, Patricia S. Ainda estamos nos divertindo? Como os professores usam materiais manipulativos para ensinar matemática.Texto adaptado. Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. Educational Studies in Mathematics 47: 175-197, 2001.

RIBEIRO, Erika da Costa. Material concreto para o ensino de trigonometria. Universidade Federal de Minas Gerais. Instituto de Ciência Exatas – ICEX. Departamento de Matemática. Belo Horizonte. 2011.

TURRIONI, Ana Maria Silveira. O laboratório de educação matemática na formação inicial de professores. 2004. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro. Disponível em: <http://adm-net-a.unifei.edu.br/phl/pdf/0036355.pdf.> Acesso em: 10 de set de 2015.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro. p. 1-26, 1993.

APÊNDICE A : Modelo para construção